ГЛАСНИК

СРПСКОГ УЧЕНОГ ДРУШТВА

КЊИГА XLI

СА 12 ГРАФИЧКИХ ТАБЛИЦА И ЈЕДНОМ ТАБЛИЦОМ ДАЉИНА.

У БЕОГРАДУ

ШТАМПАНО У ДРЖАВНОЈ ШТАМПАРИЈИ

1875

Где је што.

СТРАНА

51 1. **Стање земљорадње у Србији.** État agricole de la Serbie. Од Владимира Јакшића. Са 12 графичких таблица 84 Г. 44 с. 418 и 379 1

89'5 2. **Опис рудничког округа.** С једном таблицом даљина. Од Јована Мишковића. (Наставак из Гласника XXXIV.) 84 Г. 44 с. 393 и 418 104

77# 2½ 3. **Кинематички проблеми.** Неколико задатака о геометријским значењима и њиова примена. Од Љубомира Клерића 10# Г. 44 с. 421 283

4. **Примене графостатике на решавање геометријских задатака.** Од Љубомира Клерића 316

25# 5. **Анализе београдских пијаћих вода.** Од М. Лозанића 25# Г. 44 с. 395 327

187#8½ 6. **Говор,** којим је изасланик Српског ученог друштва за снимање уметничких старина по Србији, Михаило Валтровић, отворио други излог снимака архитектоних. скулптурних и живописних, 14 Априла 1874 год. 339

7. **Два прилога к српским старинама.** Од Стојана Новаковића. I. Звона градачка; II. Хрисовуља краља Стефана Душана манастиру Трескавачком 356

8. **Библиографија српске и хрватске књижевности.** С белешкама онога што су о нама странци писали. За 1874. Саставио Стојан Новаковић. 362

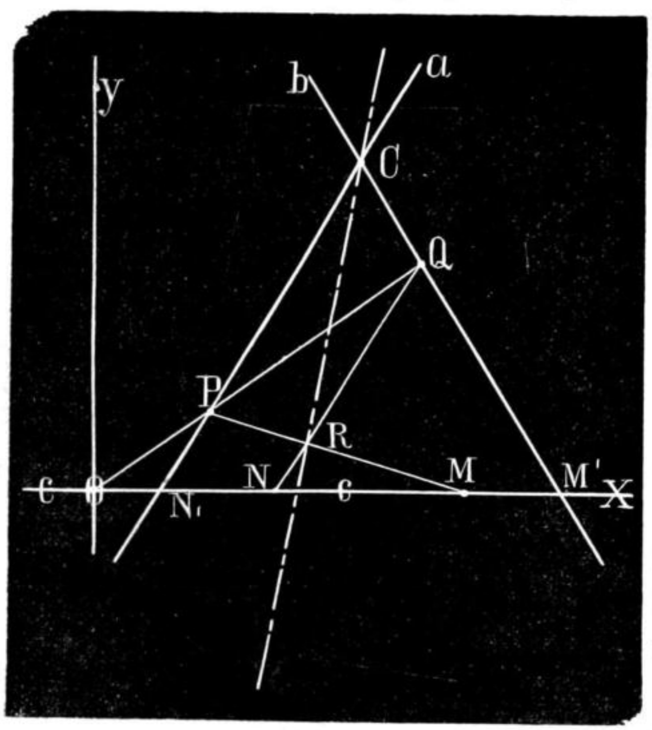
9. **Радња и стање** Српског ученог друштва. Читано на годишњем скупу друштвеном за 1874 годину 400

КИНЕМАТИЧКИ ПРОБЛЕМИ

Неколико задатака о геометријским значењима и њиова примена.

(КИНЕМАТИЧКИ ПОСТАНАК КУПИНИХ ПРОСЕКА У РАВНИ).

1. Дате су три сталне праве a, b и c слика 1, и у правој c три сталне тачке O, M и N. Односно према том датоме креће се један промењливи триугао PQR тако, да његова два ћошка P и Q пузе непрестано по правилима a и b, док се међутим правци страна PR, QR и PQ око дати тачака M, N и O, као око неких осовина обрћу. Питање је сад, какав ће пут описати онај трећи ћошак R?



Сл. 1.

Ради олакшице у задатку, узмимо OX за абсцисну осовину ортогоналнога система, а сталну тачку O, за почетну тачку координата. Стална одстајања ON и OM ставимо односно равне β и α.

Тачка R, јесте пресечна тачка страна PM и QN. Ако дакле поставимо једначина тих двеју прави, па их онда у цељи изналажаја заједничке тачке R међусобом вежемо добиһемо и потребан однос за тачку R. По овоме једначине правих PM и QN морају бити следеһег облика:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).\ \text{и} \ldots\ldots (k).$$

Овде је сада ток радње овај:

1.) Свезивање праве OQ са правима a и b, зарад изналажаја координата тачака P и Q.

2.) Замењивање координата најпре тачака, P и Q а после тачака M и N у образу (k), ради изналажаја једначина правих PM и QN.

3.) Избацај из једначина правих PM и QN, оног сачиниоца, који се у тим из једначине праве OQ налази и

4.) Тражење геометријског значења добивене једначине претресом исте.

Као резултат поменутог претреса изаһиһе, да се треһи покретни һошак променљивог троугла креһе по извесној правој d, која кроз пресек правих a и b пролази.

РЕШЕЊЕ.

1.) Једначина праве a, јесте $y = A_1 + B_1$ једначина праве b, јесте: $y = A_2x + B_2$. Сачиниоци A и B ових једначина познати су јер су праве a и b дате.

Једначина праве OQ, као праве која кроз почетну тачку координата пролази, биһе:

$$y = Ax..$$

Спајајуһи ову једначину са једначинама правих a и b добијамо координате тачака P и Q. Дакле координате тачке P јесу:

$$x_1 = \frac{B_1}{A - A_1},\ y_1 = \frac{AB_1}{A - B_1};$$

координате тачке Q јесу:

$$x_1 = \frac{B_2}{A - A_2},\ y_1 = \frac{AB_2}{A - A_2};$$

2.) Ставимо ли даље те вредности у ону једначину под (k), онда смо у исто доба и тај услов испунили, да нам права PM пролази кроз тачку P, а права QN кроз тачку Q. Напослетку заменимо у прву од добивених једначина, дакле за праву PM, да је $y_2 = o$, $x_2 = OM = \alpha$, а у другу за праву QN, да је $y_2 = o$ и $x_2 = ON = \beta$; па ћемо онда напослетку тих операције добити ове једначине, т. ј. за праву PM биће:

$$y = \frac{AB_1}{B_2 - \alpha (A - A_2)} (x - \alpha)$$

као и једначине праве QN биће:

$$y = \frac{AB_2}{B_2 - \beta (A - A_2)} (x - \beta).$$

3.) Избацајем произвољног сачиниоца A, из ових једначина, добија се и једначина геометријског места, које слободни ћошак *R* променљивог троугла PQR описује. Дакле кад избацивање или замену извршимо биће:

$$\frac{B_1 + \alpha A_1}{B_2 + \beta A_1} = \frac{B_2 (x - \beta) + \beta y}{B_2 (x - \beta) + \beta y},$$

Решењем ове једначине по непознатој *y*, изилази:

$$y = \frac{B_1 (B_2 + \beta) - B_2 (B_1 + \alpha A_1)}{B_1 + \alpha A_1) \beta - (B_2 + \beta A_2) \alpha} x$$
$$+ \left[B_1 B_2 (\beta - \alpha) + \alpha\beta (A_1 B_2 - A_1 B_1)\right]$$

4.) Ова је једначина овог оштег облика:

$$y = px + q,$$

из чега сљедује да је геометријско значење тачке R: пруга савршено одређеног положаја, јер сачиниоци у њеној једначини јесу познати бројеви. Напослетку се из те једначине даље види још и то важно, да та права пролази кроз пресечну тачку правих *a* и *b*, а то је врло увиђавно отуда, што су сачиниоци те нађење праве склопљени из сачиниоца последњих.

Отуда даје се овај став извести:

a) Ако се какав тригуго на тај начин по величини *и положају његовом мења, да му његова два ћошка пузе дуж двеју датих сталних правих, а правци његових трију страна да му се окрећу увек око трију сталних тачки једне треће праве — која је стална и дата — као око осовина, онда ће онај трећи триуглов ћошак, који је слободан, описати једну такву праву која ће да пролази и кроз пресечну тачку оних првих двеју.*

Из тога става излази овај сљедујући оном *реципрокни :*

β) Ако се неки промењљиви триуго тако мења, да се његова три ћошка крећу по трима датим правилима, а у исто доба да му се две његове стране окрећу око двеју датих сталних тачака, онда ће и она трећа страна — у сваком положају триугла — увек да пролази кроз једну и исту тачку, која ће са оним двема датим лежати у истој правој.

Оно што је под *α)* речено, може се са свим уопште овако изразити:

Ако се будикаквог n. угоља, n—1 његових ћошкова, крећу по n—1 произвољно датих правих, а у исто доба да му се његови n страна увек окрећу око n произвољно датих сталних тачака једне праве, онда ће и онај n-ти или последњи ћошак описати једну праву која ће да буде савршено опредељена. И реципрокни став томе врло је лако изрећи.

Доказ о томе, путем аналитичне геометрије, био би доиста врло заплетен, а на против путем новије геометрије, — перспективитетом и пројективитетом, — оправдало би се просто са неколико речи, што је тамо и доказано па би доказ овде, био сасвим излишан.

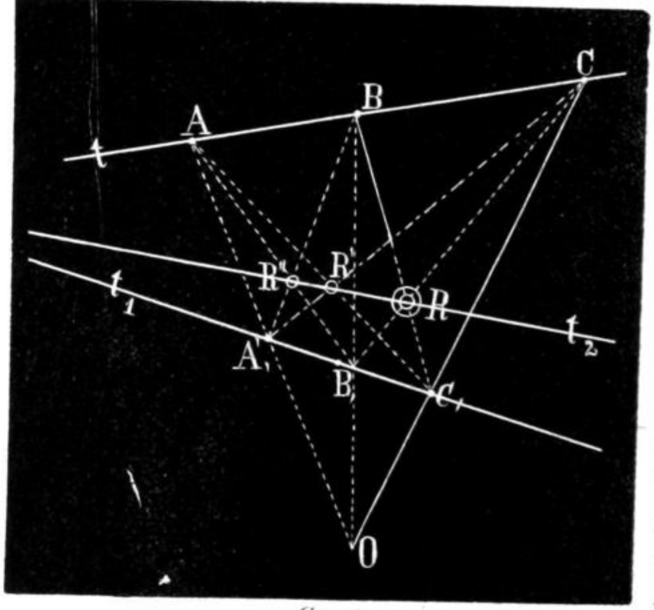
Узмимо сада један специјалнији случај, нека су тачке M и N на правој c, и то на месту где се она са b и a сече, дакле *M* да преместимо у M_1 а N да дође у N^1, у том случају сваки зрак, који будемо из *O* повукли, гради са основицом *c* и оним двема датим правилима *a* и b по један четвороугољак н. пр. PQM_1N_1, који је тог својства да му се дијагонале секу у тачкама једне праве d, а то је геометријско значење пресека дијагонала — која пролази прво кроз пресек правих *a* и *b* а друго пресек њен са трећом *c* оп је *четврта хоризонтална тачка* са тачкама M, N и Q; што је без сумње врло увиђавно, и излази из посматрања, четвороугољка PQRC. Отуда излази и ово: Ако је тачка O дата, онда праву *c* можемо са будикалом од зракова кроз O заметути, или ако кроз O повучемо произвољан број зракова, они ће са правима a и b образовати саме четвороугољке, и њиве дијагоналесеће се у тачкама којих је геометријско место једна права што кроз пресек *C* пролази.

Отуд се дају још млого важна извести што сваки читаоц може за се учинити.

Напослетку, усљедујућем показаћу неколико важни а и занимљивих примера, у којима се горе изложени закони применути могу, па да се задатци просто графичким путем реше, и то само сретством прижника. Од ових задатака што ће да сљедују, први налази примену код решавања потенотовог проблема и то кад се Боненбергеро — Беселавом методом послужимо.

α) По реципракном ставу и то оном специјалном даје се овај задатак решити: *Дате су две секуће се t и t* слика 2; *захтева се да се из неке произвољне тачке R, повуче к пресеку првих нека друга права;* међутим пресек тих правих или неможемо н. пр. на хартији да добијемо — дакле кад нам се на цртежу не секу — или је можда та тачка због оштрог сечења не тачна, па је неможемо да употребимо, или је из R може бити неможемо ни да видимо; а сви ти случаји долазе врло често у задатцима геометрије.

Повуцимо кроз дату тачку R два произвољна зрака B'C и BC', које ће бити две дијагонале добивеног четвороугољка BCB'C'; за тим саставимо B са B' и C са C', па продужимо те праве до њиовог пресека O, а то је једна помоћна тачка, која овди игра ону исту улогу што је и у првој слици чинила узимајући још нијзад, што и јест у самој ствари, да нам тачке B' и B као и C_1 и C играју улогу тачака N и M, онда ће нам и то бити врло јасно како сада средством тачке O, можемо наћи још



Сл. 2.

друге тачке R' и R'' који ће са R без сумње лежати у једној и истој правој, и то таквој, која ће к пресеку правих t и t' ићи, а тим решавамо и задатак. Дакле повуцимо кроз O још један зрак н. пр. OA, па ћемо онда добити још два нова четвороугољка а та су AA_1C_1C и AA_1B_1B, којих дијагонале секу се у тачкама R' и R'' које заједно са тачком R леже у истој правој, која кроз пресек датих t и t' пролази. По томе дакле тражена права: она је t_2 и њом смо задатак решили. Доказ тога налази се у оба прво изречена става.

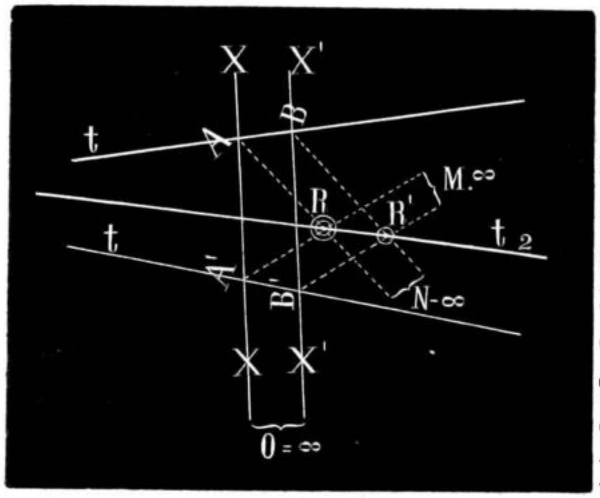
Ако би дијагонални пресеци (дакле R_1, R_1, . . .) пали на близо па можда би сумњали о тачности праве, која би кроз две или три такве на близо лежеће тачке пролазила (премда је права увек, и то савршено тачно определена и ако је дата двема на близу лежећим тачкама, јер ваља што лежи нормално на тетиви он је и полови), онда би тек само као ради контроле, могли узети, и још један или више помоћних зракова кроз тачку O, и тако би из пресека дијагонала добили још једну или више тачака.

Да је тај построј код нацртне геометрије а нарочито код геометријског цртања од велике користи то је јасно, а задатак је тај још и са тога користан, што се њим може да, или контролише или тачно определи неки оштар пресек, у ком случају ваља нам тачку R увек ван угла да узмемо па онда отуд да оштром пресеку повлачимо праву. У том случају пала би помоћна тачка измеђ правих t и t_1.

Приметба. Најзад мислим да је врло увиђавно то, како се та конструкција даје и онда употребити кад би t и t_1 готово паралелне праве биле а тачка R близо или баш и у математичној средини кракова t и t_1 лежала. У том случају би истиса добили тачку O ила врло далеко или у другом случају у самој бесконачности; а да би задатк решили та нам тачка баш треба, *јер из ње имамо још најмање један зрак да повучемо.* Кад је дакле само за тим стало да се из *O*, још један зрак повуче, онда се томе може лако доскочити. Ваља само узети неку произвољну тачку r и то најбоље ван прва два зрака која ка невиђеном O иду, из тачке r ваља повући најмање три зрака и то на она прва два, па ћемо добити познате четвороугољке, и дијагонале четвороугољака сеће се у тачкама које ће лежати у правој што к *O* иде, па та права, биће трећи тражени зрак. У таквој се прилици дакле задатак само удвојено повраћа; с том разликом што овди r произвољно бирамо дакле гди нам је драго.

Ту дакле, слику 1. тако рећи непосредно употребљавамо.

Професор велике школе г. Д. Нешић, показао ми је једну другу методу којом се опет из неке дате тачке, к непознатом пресеку двеју датих правих има да једна трећа



Сл. 3

права повуче. Г. Нешић сече дате праве t и t_1 слика 3. произвољном правом н. пр. XX а добија по датим правима пресеке A и A_1, саставља и исте са датом тачком R; за тим повлачи другу X'X', ка првој XX паралелну, избија пресеке B', и B повлачи паралелнуиз B, са AR а из B' паралелну са A'R, пресек њиов дакле R', лежи са дато R у оној правој која и кроз пресек прави t, t_1 пролази. Овај је начин решења доиста прост а и занимљив, и није ништа друго по специјалан случај закона што су сликом првом показани. Ова метода оправдава се просто тиме ако узмемо прву тачку O у безконачној даљини а друго у исто доба и праву c, дакле и тачке M и N. —

b) По првом ставу, т. j. по ономе оппттем одговору на главни задатак, даје се овај интересантан задатак да реши. Н. пр. дато је *n произвољних правих и n сталних тачака што у једној правој леже, сад се захтева да се построји један такав n-то угољак кога ће прво стране да пролазе кроз тих n тачака а друго да му ћошкови леже у датим n правима.*

Решење тог задатка бива просто на овај општи начин. Кад би знали само један ћошак n-тоугољка и то ма у којој од датих правих, онда би, што је природно, и сви они остали били опредељени, т. j. могли би их просто постројити. Да би дакле тај први ћошак нашли ваља нам овако радити. Узмимо нек је дато само *n—1* правих од тих n датих, а у исто доба и сви n тачака. Постројавајући сада друге n-тоугољке, којих да им се *n—1* ћошкова крећу по n—1 датим правима, док им међутим стране пролазе редом кроз тих n тачака, онда ће они последњи ћошкови, као што знамо, лежати у једној правој. Ако сад у тој нађеној правој изберемо ма коју тачку за последњи ћошак, тим смо онда определили потпуно одма и неки n-тоугољак. Али како та нађена права пресеца ону последњу — а у послу донекле изостављену — у некој извесној тачки, са тога је онда та пресечна тачка, која ће нам задатак да реши; јер тачка та даје нам такав n-ти угољак, који не само што задовољава n—1 дате праве но још и ону последњу изостављену; а исто тако и ону помоћну. Са тим је дакле и задатак решен; јер кад будемо ту тачку нашли, нацртаћемо врло лако и n-то угољак zактеване особине. (Употребљене n—1 стране и она помоћна или нађена у том су положају, да ма у којој изберемо неку тачку за ћошак неког n-то угољка, добићемо увек такав, ког ће остали ћошкови лежати у осталим правима узимајући увек да му још и свака страна има да прође кроз једну од n тачака).

Ради боље јасности тог решења што је овди на општи начин показато, применимо тај задатак на једном особеном примеру, н. пр. на једном четвороугољку.

Дакле нек су нам дате четири произвољне праве: a, b, c и d слика 3, на таблици, и четири произвољне тачке: 1, 2, 3 и 4 које у истој правој xx леже. Ћошкове траженог четвороугољка, што леже на правима a, b, c и d означимо са писменима A, B, C и D; а сам четвороуго нека је тако положен, да му страна AD пролази кроз 1, страна AB кроз 2, страна BC кроз 3 и страна CD кроз тачку 4.

Ако хоћемо задатак по оном општем правилу да решимо морамо да изоставимо једну од датих правих, н. пр. праву d, па онда узмимо остале три a, b и c као дате, а што тако и све четири тачке па онда постројмо помоћне четвороугољке, који нека у свему одговарају оном четвороугољку што га тражимо; са изузетком само последњих ћошкова, јер ће сви до некле лежати у другој правој а не у d. Дакле пређимо к раду и узмимо у правој a будикоју њену тачку $\overset{+}{A}'$ и саставимо је са 2, па кад тај правац $\overset{+}{A}2$ пресечемо са $\mathfrak{b}$, добићемо ћошак $\overset{+}{B}'$, саставимо $\overset{+}{B}'$ са 3 па ћемо у пресеку тог зрака са правом $\mathfrak{c}$ добити тачку или ћошак $\overset{+}{C}'$, и на последак саставимо ћошак $\overset{+}{C}'$ са 4 а ћошак $\overset{+}{A}'$ са 1. Где нам се сад $\overset{+}{C}'4$ и $\overset{+}{A}'1$ пресеку а то бива у тачки $\overset{+}{D}'$, ту добијамо четврти или слободан ћошак првог помоћног четвороугољка. На савршено исти начин ваља изабрати на правој a неку другу тачку $\overset{+}{A}''$ као први ћошак другог помоћног четвороугољка, па ћемо као и мало час што смо радили наћи његов четврти ћошак $\overset{+}{D}''$, и ако сад $\overset{+}{D}'$ и $\overset{+}{D}''$ саставимо, добићемо у тој правој $\overset{+}{\mathfrak{d}}$ ону праву, у којој морају да леже сви слободни ћошкови такових четвороугољака дакле и онога траженог. И доиста пресек праве $\overset{+}{\mathfrak{d}}$ са датом правом $\mathfrak{d}$, решава нам задатак, јер кад у њиовоме пресеку, а то је овди тачка D, нашли будемо ћошак траженог четвороугољка, што у правој $\mathfrak{d}$ лежи, онда идимо просто на трашке; т. ј. саставимо D са тачком 1, па пресеком зрака D1 са правом a добијамо први ћошак A, саставимо сада ћошак A са тачком 2, добићемо пресеком зракова A2 са правом $\mathfrak{b}$ у истој други ћошак B, саставимо B са 3, добићемо пресеком зрака B3 са правом $\mathfrak{c}$ ћошак C и најзад још контроле ради ако C саставимо са 4 онда C4 мора да пролази кроз тачку D, као што то и ваља да буде. *ABCD* је тражени четвороуго.

Дакле тако се задатак решава, и као што смо видили само са пружником, па због тога баш и јесте задатак првог ступња.

Међутим да је место једне будикоје од правих дата каква крива (види приметбу), онда би и задатак или његово решење било онога истог реда ког је и крива, осим тога ако би још и од n—1 правих била једна опет са неком кривом замењена, онда у овом случају не би описао последњи ћошак помоћног n-то угољка праву пругу но на против криву. И тај ћемо случај пропратити мало доцније, опет на једном особеном а врло занимљивом примеру. Кад би се сви такви примери решавали аналитичним путем, наишли би без сумње на врло велике тешкоће.

У примеру четвороугољка видели смо како су нам нужна била најмање два помоћна четвороугољка или у опште две помоћне манипулације; међутим кад би нам дате биле само три праве a, b и c слика 4, и три сталне тачке 1, 2 и 3 у правој xx, онда нам је довољна само једна помоћна манипулација или један помоћни триуго.

Ово долази отуда, што кад му нађемо његов слободан ћошак $\overset{+}{C}$, онда по познатоме знамо, да сви такви ћошкови осталих троугољика леже у правој $\overset{+}{c}$ која се може из $\overset{+}{C}$ к пресеку правих *a* и *b* повући, са претпоставком да смо праву *c* изоставили. Где се буду сад праве $\overset{+}{c}$ и *c* пресекле а то је овди у C, ту ће лежати и један ћошак траженог триугла који ће нам zактеве испунити. Триугао је тај ABC и он је тога својства да му страна AB пролази кроз 1, BC кроз 2 и AC кроз 3; ћошкови његови леже редом у правима a, b и c. Што се тиче построја, тај је из слике увиђаван, јер све што је помоћно узето, то је тачкастим правима означено, а над помоћним ћошком има одозго знак +, исто је тако и помоћна права тим знаком обиљежена.

Врло је занимљив задатак у том случају, кад је место оне треће праве, дакле н. пр. место c (у горњем примеру) дат неки купин пресек kk слика 4 на таблици и то од тог пресека ништа више да није дано но само његових пет тачака: T, 𝔄, 𝔅, ℭ и T'; па онда да купин пресек који тима тачкама одговара, и не цртамо, но да се просто само са тих његових пет елемената послужимо; т. ј. да решимо савршено подобан задатак о триуглу, као што смо то и мало час чинили. Дакле ваља постројити један триугао таквог својства, кога ће два ћошка лежати на правима a и b, а трећи на кривој *kk*, даље да му стране његове још пролазе кроз 1, 2 и 3 које у правој *xx* леже, и то н. пр. тако: да страна *AB* пролази кроз тачку 1, која нек лежи у бесконачној даљини праве *xx*, стране BF кроз тачку 2 а страна CF кроз тачку 3, ако овди са F означимо ћошак у купином пресеку што ваља да лежи.

Решавајући овај задатак учинимо овди подобно ономе што смо у њему сродном задатку извршили, т. ј. место што смо тамо изоставили праву *c*, изоставимо сада овди сам крупин пресек *kk;* па онда поступајмо са правима *a* и *b* а и тачкама 1_∞, 2 и 3 исто онако као и горе, па ћемо на тај начин добити помоћан триуго A_1^+ B_1^+ C_1^+, а са њиве и праву f^+. Та права f^+ коју будемо нашћи, она ће нам и задатак решити, јер у њој мора да лежи онај трећи ћошак траженог триугла, а само место тог ћошка биће без сумње оно, гди се права f^+ са купиним пресеком *kk* пресекла буде; јер онда задовољавамо и праву a у исто доба крупин пресек, што и треба да буде. Но како је познато да ће права f^+ пресећи купин пресек у двема тачкама то је и решење тог задатка другог ступња, што значи то, да има два триугла који постављеном услову одговарају, а то је са свим и природно. Дакле кад смо нашли помоћну праву f^+, онда нам остаје још само то, да нађемо пресек те праве са датом купином кривом *kk*, па тим налазимо и оно што тражимо.

У овој прилици налази се пресек праве f^+ са кривом *kk,* као што је познато овако: ваља будикоје две тачке од датих пет тачака (којима се купин пресек опредељава) узети за темена два *„пројективна зрачна прамења у равнини“* (Ein ebenes Strahlen-Bücshel). Узмимо дакле за такве тачке овди нека су н. пр. T и T_1, па онда из истих тачака пројецирајмо остале три тачке $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ на праву f^+ и пројекције тих означимо односно из тачке T са писменима A, B и C а из тачке T_1 са писменима A_1, B_1 и C_1. На тај начин имамо два пројективична реда у њиовом истоветном носиоцу f^+, те зато мора да је

$$(ABC \ldots) = (A_1B_1C_1 \ldots)$$

Ваља нам сад том реду да нађемо његове двогубе тачке или елементе, што су као што знамо у правој f^+ оне тачке, у којима ће се доистна тачка са њеним пројецијом у једно да се стекну, које без сумње неће ништа друго да буде но тражени пресек праве f^+ са кривим *kk*. Дакле ако хоћемо да све могуће двогубе елементе изнађемо, ваља нам — што је најпрактичније — узети у помоћ један нови и то *цикличан* ред тачака, т. ј. изберимо у равни слике будикакав помоћан круг k′, а у његовој периферији будикоју тачку н. пр. τ, (τ') (која треба да носи два имена зато, што ће иста да буде сада носиоц два пројективна прамена у равнини), па ту сада сматрајмо као носиоца два нова пројективна прамена у равнини. Из те тачке даље пројецирајмо ABC . . . и $A_1B_1C^1$ . . . на саму периферију тога круга k′, па одговарајуће циклиничне пројекције означимо са писменима α, β, γ и α_1, β_1, γ_1. Овом приликом дакле имамо прво један циклиничан ред тачака а друто још и два пројективна прамена: $(\tau.\ ABC) = (\tau_1.\ A_1B_1C_1)$ истоветног носиоца (τ, τ_1'). Најзад имамо да нађемо за та два нова прамена све њиове двогубе зракове, које ћемо по познатоме врло лако постићи, ако само тачке $\alpha\beta\gamma$ $\alpha_1\beta_3\gamma_1$ сматрали будемо исто онако као и један *Паскалов* шестоугољак; па нашавши Паскалову праву p, добићемо на круној периферији без сумње и два пресека $\varphi\varphi'$ и $\overset{+}{\varphi}\overset{+}{\varphi}'$, које тачке јесу таког својства, да кроз њих пролазе и тражени двогуби зраци, дакле саме тачке $\varphi\varphi'$ и $\overset{+}{\varphi}\overset{+}{\varphi}'$ оне су у исто доба и двогуби елементи циклиничног реда тачака. Дакле кад будемо на тај начин нашли двогубе зраке ваља их само продужити донде, док не пресеку праву f^+, па онда у пресеку томе а таква има два, која су FF' и $\overset{+}{F}\overset{+}{F}'$, добијамо без сумње и двогубе елементе пројективних редова у правој f^+, а тиме се и задатак решава, јер смо на тај начин нашли два места трећем ћошку триугла захтеваног својства.[1])

Дакле је у тачки F (или што је исто у F_1) лежи трећи ћошак једиога триуга ABF, а у оној другој тачки $\overset{+}{F}$ ($\overset{+}{F}_1$) или у купином пресеку лежи трећи ћошак другога триугла $\overset{+}{A}\overset{+}{B}\overset{+}{F}$, а оба та - постављеном услову одговарају потпуно.

Приметба: Задатак овај могли смо, без сумње и на овај начин да решимо; ваљало је да смо купин пресек из његови пет тачака построили па онда просто определи пресек праве f^+ са купином кривом kk. Али тај начин био би, прво мало заметнији, а друго још што је најглавније и не тачан, јер тачке F и $\overset{+}{F}$ неби никад тако тачно определили као по горњем начину гди добијамо те тачке готово математично тачно. Напротив да је место криве kk дат неки круг, онда би ова друга метода без сумње простија била. Најзад и то је јасно да ће решење у сваком случају бити доистно, ако само помоћница f^+ дату криву kk пресеца, на против уображен ако то не чини. На том

[1]) Паскаљова права p, налази се овако: $\alpha\beta_1$ и $\alpha_1\beta$ кад се пресеку дају тачку I, праве $\beta\gamma_1$ и $\beta_1\gamma$ дају у пресеку тачку II исто тако и праве $\alpha\beta_1$ и $\alpha_1\beta$ дају у пресеку тачку III, све те три тачке I, II и III морају лежати у истој правој или p, а та је паскалова права.

малом задатку види се врло јасно, велика корист и плодност новије геометрије, која у себи свата још велику множину других а још важнијих задатака и теорема.

II. Овај други задатак биће са свим сродан оном првом, а разликоваће се од првог тиме, што у овом случају неће се кретати оба триуглова ћошка на правима, но на против један ће ићи по правој а онај други кретаће се по периферији некога сталнога круга; све оно остало остаје исто онако као и у првом примеру.

Дакле нека је дат неки променљиви триуго GHQ слика 5 на таблици који по његовој садржини и положају тако нек се мења, да му се стране окрећу око трију сталних гачаке A, B и C које све три у правој xx леже, и то на тај начин да се HG окреће око A, страна GQ око B и страна HG око тачке C; даље, један ћошак G нека пузи по правој g која нека је на xx нормално положена, док на против онај други ћошак Q он нека пузи по периферији некога сталног круга k, ког средиште нека је одма у тачки C. На тај је начин и двизање триугла сасвим опредељено и остаје нам даље то као задатак, да још испитамо или нађемо геометријско значење онога трећег или слободног ћошка H.

У сљедујућем занимаћемо се дакле са решењем задатка, па тога ради да би нам исто простије испало, нек је права xx, одма и абсцицна осовина, а ординатна, на првој нормална нек пролази кроз центрум C датог круга, даље тачке Q нека су координате x_1, y_1 а исто тако и тачке H, коју тражимо, нека су јој координате x, y; ставимо краткоће ради нек је $AO = a$, $BO = b$ и $BC = c$ метимо још $AC = a + b + c = d$ а полупречник датог круга означимо са ϱ. Тим смо дакле означили све вредности што ће у рачуну да требају, и најзад онда неостаје нам ништа друго, но да склопимо једну једначину овога облика:

$$y = f\ (x;\ a,\ b,\ c,\ \rho);$$

до које ћемо сљедујућим путем доћи.

Једначина датог круга ова је:

$$1) \dots .\ x_1^2 + y_1^2 = \rho^2$$

права QH, она пролази кроз тачку $x_1\ y_1$, за то јој је и једначина овог облика

$$2) \dots .\ y = \frac{y_1}{x_1} x;$$

но како је трећи триуглов ћошак H пресек те последње праве са правом *AG*, која кроз A и G пролази, а међу тим тачка G она је, која се добија из пресека праве QB са правом *g*, са тога ваља пре све свега још да нађемо и саму једначину те праве. Јвдначину њену добићемо врло лако, ако само у општој једначини правих, дакле у

$$\frac{x}{A} + \frac{y}{B} = 1$$

просто место сталних количина A и B њиове вредности ставимо. Овди је дакле $A = -d$, а из подобности триуглове BGO и BQQ_1 а после из подобности триуглова AOG са ACC′ изилази:

$$CC_1 = B = -\frac{by_1 d}{a\ (c + x_1)},$$

ако дакле те нађене вредности за A и B заменимо где је нужно и довољно сведемо добићемо и једначину праве AG, а та је ова:

$$3) \dots .\ y = -\frac{by_1}{a\ (c + x_1)}\ (x + d)$$

На тај начин нашли смо оне три једначине које нам требају па да нађемо геометријско значење оном слободном ћошку. Дакле, ако хоћемо да имамо координатну једначину тог ћошка, ваља просто из тих трију једначина на будикоји начин да избацимо количину x_1 и y_1. То ћемо можда најбоље на тај начин постићи да из једначина 2 и 3 определимо количну x_1 и y_1 а те су:

$$x_1 = -\frac{acx}{b(x+d)+ax} \text{ и } y_1 = -\frac{a\,c\,y}{b(x+d)+ax}$$

па те вредности заменимо у једначини *1,* па кад замену извршимо и довољно скратимо и по x уредимо добићемо оно што тражимо, које је претстављено у овој једначини:

$$y^2 = \left\{\left(\frac{\varrho(a+b)}{ac}\right)^2 - 1\right\}x^2 + 2bd\,(a+b)\left(\frac{\varrho}{ac}\right)^2 x$$
$$+\left(\frac{b\,d\varrho}{ac}\right)^2 \ldots \text{ I.}$$

Једначину ову можемо и овако опште написати:

$$y^2 = AX^2 + BX^2 + C \ldots \text{ II.}$$

у којој су сталне количине ове,

$$A = \left(\frac{\varrho(a+b)}{ac}\right)^2 - 1,\ B = 2bd\,(a+b)\left(\frac{\varrho}{ac}\right)^2 \text{ и}$$

$$C = \left(\frac{bd\varrho}{ac}\right)^2.$$

Сматрајући сад једначину II, опазићемо одмах на први поглед да је то координатна једначина неке хиперболе, чије је теме a и средиште у осовини XX, а средиште њено. оно није у почетној тачки координата.

На тај начин добијамо и одговор као решење задатка, т. ј. геометријско значење оног слободног ћошка, оно је у оваком случају Хипербола.

Међу тим за то што количине A, B и C могу да буду и разне вредности а и разно означење, са тога могу ту и специјални случаји наступити, па за то једначину II можемо као најопштије решење да сматрамо и она нам преставља најопштију једначину купиних пресека, за то је онда одговор на задатак, као решење тога, овај много прецизнији: *Геометријско је значење слободног ћошка у опште неки крупин пресек и то: Хипербола ако добијемо једначину у виду II дакле кад су све три сталне* *количине положне, Елипса ако је B одречно а парабола ако је A = O.*

По томе докле можемо слободноме ћошку да пропишемо онаку путању какву ми желимо (која мора наравно да буде један купин пресек), јер тога ради имамо само параметре а, b и с, према мало час показатим условима да удесимо.

Дакле узмимо, нека нам слободан ћошак описује *параболу.* У том случају мора да је A = O, т. ј. мора да постоји овај однос:

$$\rho\,(a + b) = ac,$$

а ако још ту узмемо да је $\rho = a$ онда је по томе $a + b = c$, као што је то у слици *6* претстављено. Ако даље од та три последња параметра два дамо, онда је наравно по томе трећи опредељен а са њиме и све остало, јер једначина I, добија на себе у овом случају следећи облик:

$$y^2 = (4b)\,x + (2b)^2. \; . \; . \; . \; \mathrm{III}.$$

За овај је случај у слици 6 види таб. извршен и построј, којије врло увиђаван, и не потребује објаснења; од куд се још нека својства построја могу да спазе.

Даље, ако хоћемо да нам слободан ћошак опише *елипсу*, онда мора да је B одречно а то се може постићи само онда: прво, ако је b одречно и у исто доба $b <$ а даље друго, још и онда, ако је количина а одречна а у исто доба а онет веће од b.

Ради боље увиђавности и распореда тих сталних количина, први је случај претстављен у слици 7, а други случај у слици 8. види таб.

Дакле из свег тога врло је јасно како једначина I скрива у себи све те купине пресеке, због чега је и можемо назвати општа једначина купиних пресека, а исто тако и начин пестојања тих пресека — као што смо видели двизањем некога триугла на известан начин — можемо слободно да назовемо, *општи постанак купиних пресека у равни.*

Напослетку важно ће бити да се у сљедујућем још и то каже, како се просто путем построја и само пружником могу да определе темена купиних пресека. Тога ради морамо се и овди резултатима првог задатка да послужимо, т. ј. користити се оним случајем где два троугла леже у перспективном положају. Узмимо дакле тачку C слика на страни 9 за носиоца или центар трију пројецирајућа зрака Cx, Cy и Cz; на се онда за такав случај вели:

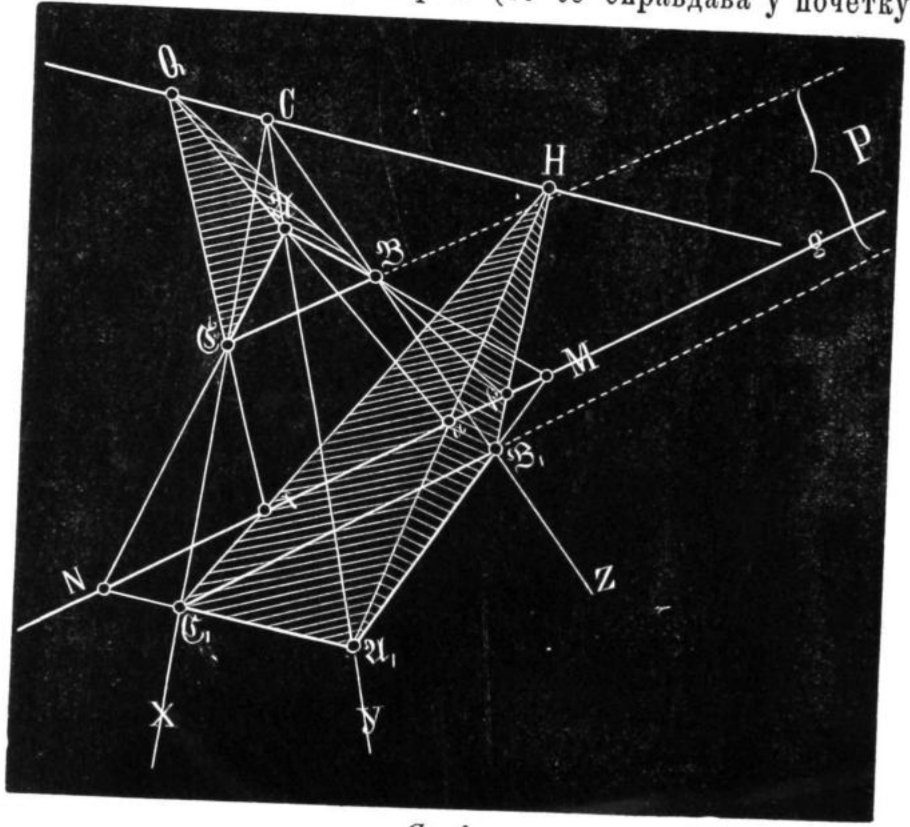
Ако су два триугла $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1$ *Химологна* т. ј. тако положена да се њихове две и две одговарајуће стране секу у таквим тачком M, N и P које ће лежати у једној истој правој g, даље ако из будикоје тачке н. пр. Q будемо пројецирали првог триугла ћошкове $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ опет на праву $\mathfrak{g}$, и те пројекције које да означимо са α, β и γ, будемо споили са оним другим ћошковима $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{C}_1$, онда је резултат тога овај: спојне праве $\mathfrak{A}_1\alpha$, $\mathfrak{B}_1\beta$ и $\mathfrak{C}_1\gamma$ секу се у једној тачки H, и уз то још, права QH пролази кроз центар C.

По томе дакле кад би хтеки да имамо само тачку H. онда би њу могли да нађемо само пројекцијом једне тачке $\mathfrak{A}$, јер кад би се још и тачкама $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ послужили, оне би нам истоветно H дале; претпостављајући наравно, да се само Q није променило. У том случају могли би дакле $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}_1$ заменити с тачкама $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}_1$ или са $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{C}_1$, а тек само контроле ради могли би све три тачке да употребимо, па да H изнађемо.

Да би све то што је ту речено доказали морамо првој да докажемо да се права $\mathfrak{C}_1\gamma$ доиста сече у оној истој тачки у којој се и праве $\mathfrak{A}_1\,\alpha$ и $\mathfrak{B}_1\,\beta$ пресецају. Ово се доказује овако.

Троугли $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}$ Q и $\mathfrak{A}_1$ $\mathfrak{B}_1$ H_1 имају такав положај, да се одговарајуће стране секу у такам тачкама M, α и β

које све три у правој g леже, па за то онда и *права QH пролази кроз* центар С (то се оправдава у почетку



Сл. 4

првим примером); т. ј. кроз ону тачку у којој се стичу зраци што два и два ћошка тих триугла спајају.

Међу тим што кроз тачку С пролази и зраз $\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$, са тога и триугли $\mathfrak{A}Q\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{A}_1H\mathfrak{C}_1$ имају такав положај да се зраци одговарајући ћошкова секу исто тако у тачки С. Дакле и пресеци химологних страна морају у једној и истој правој лежати; и то са тога што се $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ а $\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1$ у тачку N секу, даље $\mathfrak{A}Q$ и $\mathfrak{A}_1H$ сече се у тачки α, па мора онда да се и $Q\mathfrak{C}$ са $H\mathfrak{C}_1$ сече у једној тачки γ која у правој $N\alpha$ лежи или што іе исто γ лежи на правој MN.

То са другим речима значи ово: зрак $\mathfrak{C}_1\gamma$ пролази кроз ону исту тачку Н, у којој се тачки по напред реченом и зраци $\mathfrak{A}_1\alpha$ и $\mathfrak{B}_1\beta$ секу, што је и ваљало доказати.

Тачка је H дакле потпуно опредељена пресеком правих $\mathfrak{A}_1\alpha$ и QC. Ако даље сада још и сва остала докучења скупимо изилази ово важно правило: *да ако тачке $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^1$ и Q не мењамо, можемо кроз центрум C провлачити произвољан зрак н. пр, CX и ако даље у правој g изберемо произвољну тачку N (па макар и безконачно удаљену), и ако ту саставимо са тачком $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}_1$, добићемо онда у пресеку зракова $N\mathfrak{A}$ и $N\mathfrak{A}_1$ на правој CX две нове тачке $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{C}_1$, које односно на тачку H имају оно и исто значање што и тачке $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}_1$, сљедователно ове се са оним новима потпуно замењују, наравно само онда ако хоћемо H да нађемо.*

Ако се у сљедујућем тим својством користимо, моћемо врло лако да нађемо и темења купиних пресека. Узмимо дакле нек у овој слици 9 права $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ оно исто значи што у слици 10 види таб. права AB, дакле она права у којој ће темена купиног пресека да леже, и ако по познатим правилима будемо постројавали тачке купиних пресека, доћићемо најзад до таког положаја да се зраци AH и BQ слика 10 савршено покривају, у ком случају не би могли ни пресек њиов определити, или штогод буде тачка β лежала ближе осовине, тим би H све нетачније налазили. Такви положаји тачке β доводе нас на нужност да построј предругојачимо, које ћемо врло лако да постигпемо ако само место тачака A и B слика 10 узмемо неке друге тачке, које ће их — што се тиче изналажаја и H — потпуно заменити. Ово бива овако:

Кроз тачку C повуцимодв а произвољна нова зрака cx и cy слика 10, види таб. на правој g изберимо две произвољне тачке D и E, па онда D саставимо са A и B исто тако и тачку E опет са тачкама A и B, на тај начин онда добијамо на зрацима Cx и Cy нове тачке $\mathfrak{C}_1$ и $\mathfrak{C}$ као и тачке $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}$. Те нове тачке имају — као што већ знамо — ту особину, да нам потпуно замене тачке A и B и то тачку A замењују сада $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{C}_1$ а тачку B замењују $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$. С' тим тачкама дакле можемо онаква иста пословања да чинимо као што смо са тачкама A и B радили кад смо тачке H тражили.

Наизад на питање оно, како ћемо наћи темена купиног пресека, но то је сада врло лако одговорити, па и та темена наћи. Темена морају лежати у правој XX. Означимо темена купиног пресека са писменима S и S_1 за који случај та пасмена замењују писме H, а тачка Q и она ће у овом случају прећи у N_s и N_s^1, или што је ист, то су пресеци праве XX са сталним кругом.

Дакле темена се овако налазе: пројецирајмо ћошкове троугла $\mathfrak{B}BC$ на праву g и то једаред из тачке Ns а други ред из тачке N^1_s, па онда пројекције тих ћошкова (у првом су случају пројекције те β_n, O и γ_n а у другом β_{n1},O и γ_{n1}), саставимо са хомологним или одговарајућим тачкама оног другог троугла $\mathfrak{B}^1A\mathfrak{C}^1$. На тај начин добивени нови зраци или састављајуће праве, сеће се у првом случају у тачки или темену S а у другом случају у темену S_1. Овим смо дакле видили како се темена могу врло лако, а на прост и практичан начин да изнађу. Построј око изналажаја темена, цртан је на сликама са тачкастом пругом.

Построј тај око изналажаја темена а и других тачака што близу темења леже много ће простији да испадне у оном случају кад тачке D и E узмемо да су на правој g у безконачној даљини. У том ће случају и зраци CX и Cy сећи се са оним паралелнима које из A и B према правој g будемо повукли. Тачке оне које будемо тим путем добили на зрацима Cx и Cy имаће ону исту вредност као и пре, т. је. њима моћићемо тачке A и B заменити. А како већ знамо да ће тиме у XX лежати (са том поставком да је $g \perp XX$), биће нам довољан само један зрак који кроз С повукли будемо, н. пр. Сх. У сликама 6 и 7 на таблици, ту је тај начин и употребљен.

Осим тога, ваља овди још и ово важно да напоменем. Кад би н. пр. — контроле ради из неке периферијске тачке Q слика 10, види таб., пројецирали тачке В, 𝔅 и ℭ на праву g, па би онда пројекције њиове споили са тачкама које би првим хомологне биле дакле са: $A_1 𝔅_1$ и $ℭ_1$ онда би нашли на то, да се сви такви спојни зраци пресецају у једној тачки Н, која је у исто доба и тачка купиног пресека. По томе свему јасно је како место праве XX можемо све могуће друге праве да узмемо које би кроз С пролазиле, па онда ако само у њима место тачака А и В друге изберемо. Све такве замењујуће тачке покрећаће се по правима које кроз А и В пролазе и према g паралелно стоје, дакле где зрак неки те две паралелне пресекао буде ту ће лежати онда и оне тачке које се место А и В узети могу. У тим случајима дакле не смемо С дирати. Стране промењивог троугла могу се по томе окретати и око других тачака а не само баш око А и В, но и око оних 𝔅 и 𝔅, које смо на познати начин добили, па опет да нам онај последњи ћошак купин пресек опише. Могли би дакле наћи безконачни број тачака, што би тачке A и B заменули па да се решење ниучему не мења. Или ако би место A узели да је нека друга извесна тачка замени, онда би одма и она друга била савршено опредељена која би морала да тачку B замени.

То је дакле све што се о том последњем задатку може у кратко да покаже; т. ј. о постанку купиних пресека у равнини. А да би се о томе имало још млого више написати и то је јасно, па би се може бити наишло још на нека важна конструктивна а и анамитична својства тога задатка. Нарочито могло би се породити ово питање: како би имали да стоје тачке А, О, В и С заједно и величина круговог пречника т. ј. које би морале да буду бројне вредности количина a, b, c и ϱ? па да оне вреде за неки сасвим опредељени кунин пресек. Дакле кад би нам били дати параметри куниних пресека како би ји онда по показаној методи нацртали? Ту би нам дакле требало знати тачке A, O, B и C а исто тако и полупречник ϱ. Ваља дакле тражити однос који измеђ пафаметара купиних пресека и количина a, b, c и ϱ постоји. Посматрајући најзад тачно како на показани начин купини пресеци постају, може се врло лако и једна таква справа саградити која би нам *механички све купине, пресеке нацртала.* Справа је та доиста за параболу врло употребљива, јер ту је врло лако наћи однос, за који мало час питах. Справа она, која би имала задаћу, да све купине пресеке црта, била би по мом схваћању тек онда важне практичне користи, кад би се на положено питање одговорило. Решење тога, остављам дакле другим математичарима, којима би више времена на расположењу стало; а ако мени то за руком испадне ја ћу и то одма јавности предати.

1. Маја 1868 год. у Београду.

Љубомир Клерић
инжињер рударски.

ПРИМЕНЕ ГРАФОСТАТИКЕ НА РЕШАВАЊЕ ГЕОМЕТРИЈСКИХ ЗАДАТАКА.

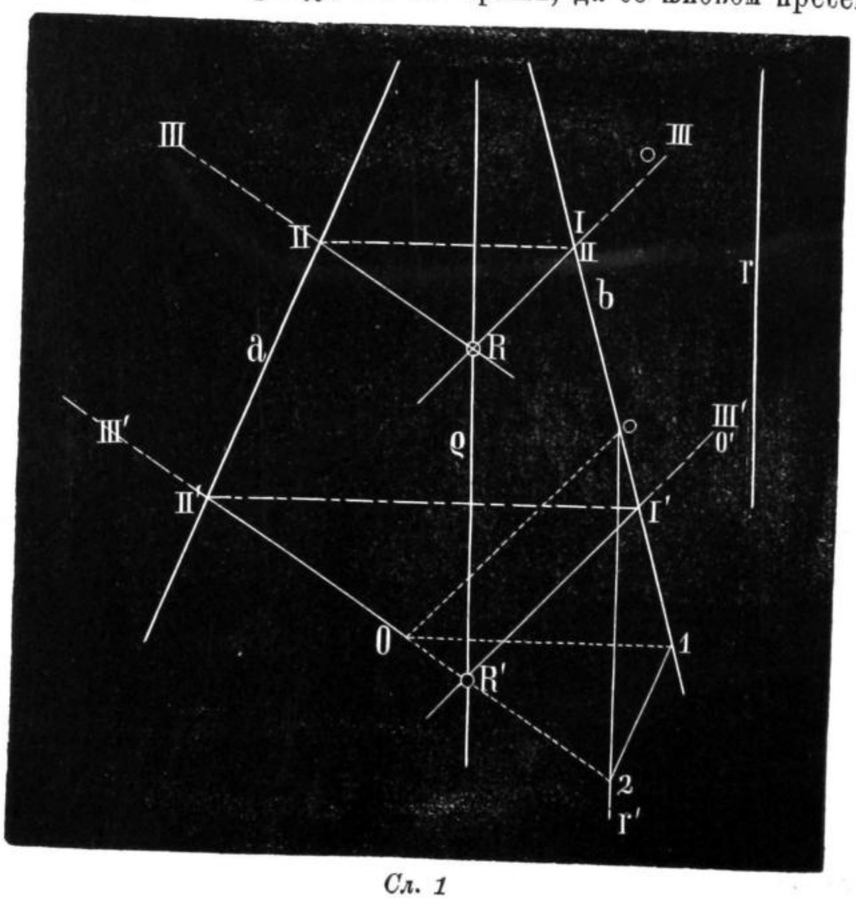
Као што се по геометријским правилима могу решавати задатци статике, исто тако и обратно можемо решити неки геометријски проблем по правилима која о статици важе. Кад се геометријски проблеми решавају путем статике, онда је решење њиово сасвим просте природе; јер доказа ради имамо само ово да упамтимо: како резултанта двеју компонената мора да пролази кроз пресечну тачку њиову, а правац резултанте и њена величина (а код паралелних сила и њено место) зависиће од правца и величине компонената. Две компоненте можемо спојити у једну силу (резултанту), једну силу можемо у две или три компоненте да разложимо, а исто тако и кад нам је резултанта по правцу положају и величини дата, заједно са једном од њених компонената, можемо врло лако и другу компоненту наћи, и то по правцу и величини њеној.

У оном случају кад су дате две компоненте, по величини правцу и положају, можемо врло лако наћи њиову резултанту, а да и не употребимо пресечну тачку тих компонената. Тога радиваља нам построити само полигон сила, па ћемо тим наћи правац и величину резултанте, а затим ако построимо још и верижни полигон, наћићемо и једну будикоју тачку кроз коју мора резултанта проћи; а кад кроз ту тачку нацртамо праву, паралелно са резултантом што је у полигону сила, онда ће ова, као што је познато, морати пролазити и кроз пресечну тачку датих компонената. На тој правој ваља још и њену величину пренети, а та се добија из полигона сила, па је онда задатак решен.

Ако нећемо да повлачимо паралелну са нађеном резултантом, и то из тачке у којој се крајње стране верижног полигона секу, онда нам ваља само да начинимо још један верижни полигон првом паралелан, па где се његове крајње стране секу, и туда мора резултанта проћи. Дакле те две добивене тачке и она где би се компоненте секле, морају у истој правој да леже; а ова права је у исто доба паралелна и са резултантом што је у полигону сила. Како се полигон сила и верижни полигон дају да употребе на решавање геометријских задатака, видићемо у овим задатцима.

ЗАДАТЦИ.

1.) Дате су две праве a и b (слика 1) коих пресек C не пада на артију, па се тражи, да се њиовом пресеку



Сл. 1

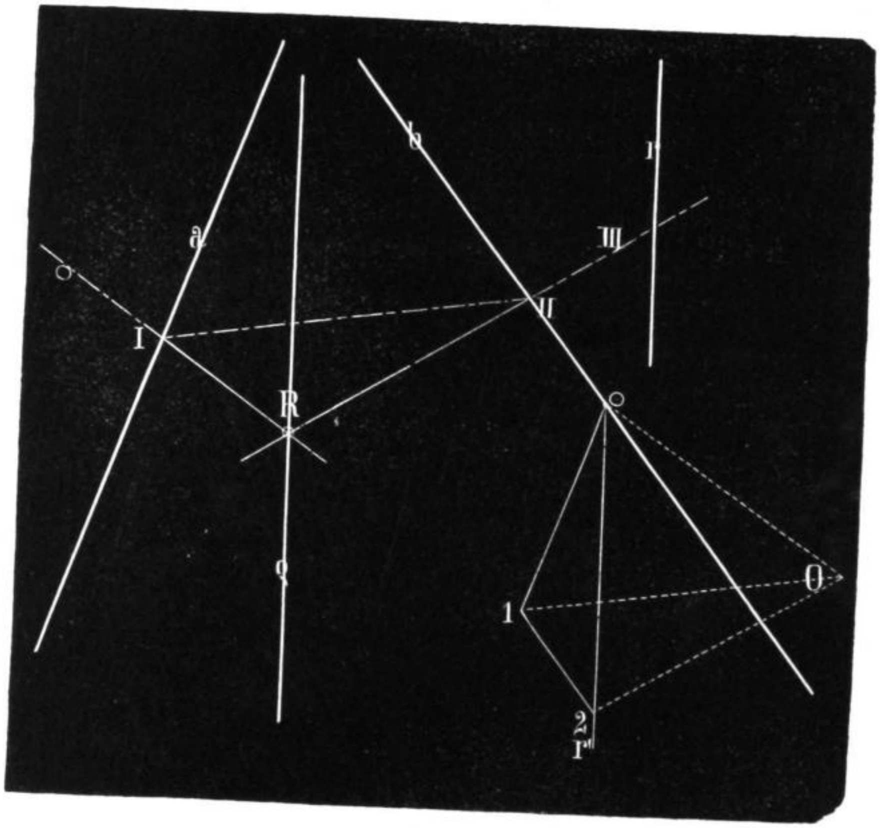
С повуче једна права ϱ, која нека је паралелна са другом неком r.

РЕШЕЊЕ. Треба у будикојој од датих прави н. пр. у правој b узети неку произвољну тачку o, кроз ту тачку повући праву $or' \parallel r$ и у тој узети произвољну величину н. пр. $\overline{02}$. па онда ту праву $\overline{02}$ сматрати као резултанту, коју ваља разлошити у компоненте које ће у правима a и b дејствовати. Праву ту $\overline{02}$ сматрајмо као резултанту некога полигона сила, ког остале стране или компиненте добијамо престо на тај начин кад кроз 2 повучемо једну паралелну са правом a, гдн она праву b сече, а то је ту у тачки 1, одређен је у тој тачки и трећи ћошак полигона сила, где је 01 једна компонента за праву b а $\overline{12}$ друга компонента што у правој а дејствује за резултанту $\overline{02}$.

Наишли би на исти резултат да смо из 0 (слика 2) повукли к правој a паралелну па онда из тачке 2 повукли паралелну правој b, где би се те праве секле а то је овде у тачки 1, ту би био и трећи ћошак троугла сила који је резултанти противположен. И ту су $\overline{01}$ и $\overline{12}$ компоненте које ће у правима a и b дејствовати а за разултанту $\overline{02}$.

Ради одређивања самога места резултантиног, ваља нацртати још и *верижни полигон*. Узмимо дакле неку произвољоу тачку O за пол полигона сила (у обема сликама 1 и 2), па нам је онда OI II III одговарајући верижни полигон, где је OI $\parallel$ Oo, I II $\parallel$ 01, II III $\parallel$ 02.

У тачки R секу се крајње стране верижног полигона а те су овде III II и OI, и то је она тачка кроз коју мора да пролази разултанта компонената што у правима a и b дејствују. Дакле кад кроз ту тачку R повучемо праву ϱ, паралелно са датом r или са or', онда смо тиме



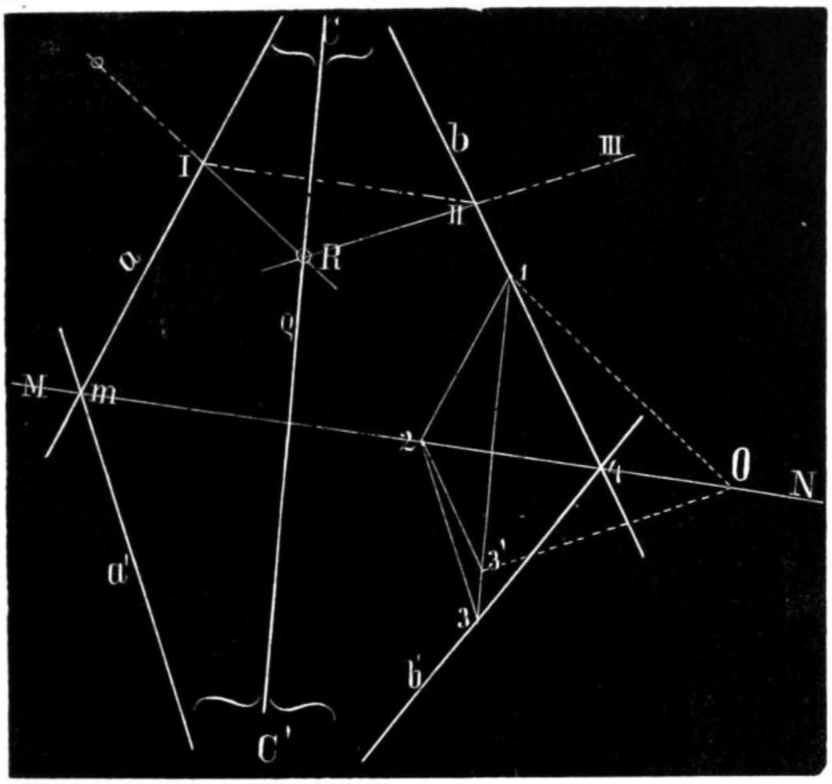
Сл. 2

и задатак решили; јер та права ϱ што кроз R пролази а паралелна је са r, мора у исто доба да пролази и кроз тачку C, а то са тога, што смо тај задатак решавали на тај начин, гди смо тражили разултанту за компоненте 01 12, па зато права она ϱ која кроз R пролази а паралелна је са r, мора и кроз C пролазити.

Ако се није хтело да повлачи кроз тачку R права са датом r паралелна, могао се задатак и тако решити, да смо верижни полигон преместили на друго место а тај други био би н. пр. O'I'II'III' сл. 1 који је са првим паралелан. Ово можемо одма тако да извршимо кад страну O2 продужимо до пресека II' са правом a, па је онда II'III' одма и једна страна тог другог верижног полигона. И тог полигона крајње стране сеће се у тачки R' која мора да лежи у правој која R и C спаја, а у исто још иде са датим r паралелно.

Овај задатак има своју примену још и у графостатици, у оном случају, кад се крајње стране верижнога полигона не секу на хартији, а њиов пресек требамо са тога, што ту мора резултанта да пролази; без те тачке неби могли ни место резултанте одредити. У том случају се са тим странама верижног полигона на исти начин ради, као што смо са странама a и b у овом задатку радили. Резултанта што је у полигону сила има у овом случају смисао праве r.

2.) Задатак. Дате су две праве a и b (слика 3) и још друге две a′ и b′ и то по њиховом правцу и положају, дакле



Сл. 3

оне заклапају један четвороуго. Четвоуго тај је на хартији тако положен да пресечне тачке C и C′ страна a, b и a′, b′, не падају на хартији а напротив друге две тачке m и 4 оне су још на хартији. Дакле m4 то ће бити онда једна дијагонала тог четвороугла. Тражи се да се конструктивно нађе она друга дијагонала C′C или да се повуче права која саставља пресечне тачке правих a, b и a', b'.

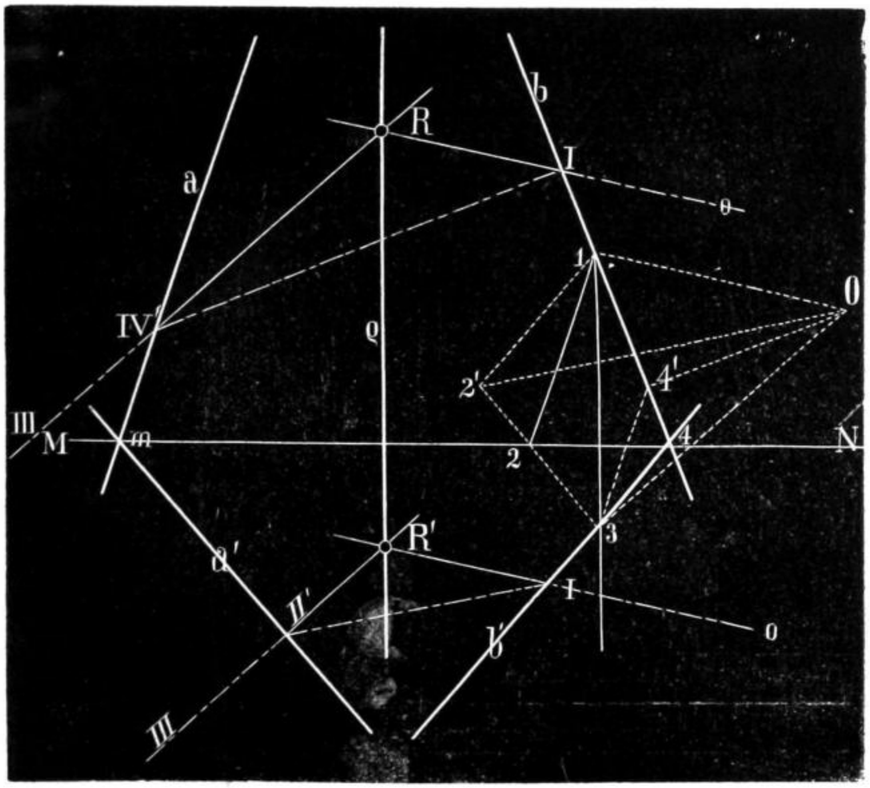
РЕШЕЊЕ. Ваља у будикојој од правих a и b, н. пр. у правој b узети неку произвољну тачку 1, из ње повући $\overline{12} \parallel$ a, где та сече дијагоналу m4 а то је у тачки 2, повући отуда $\overline{23} \parallel$ a' до пресека исте у тачки 3 са правом b'. Сад је и врло јасно како је нови четвороуголак 1234 подобан са датим CmC'4, те са тога је и дијагонала 13 паралелна са оном CC' коју још незнамо.

У овом случају своди се задатак на онај први, т. ј. треба нам да повучемо праву, која да кроз C пролази а да у исто доба иде паралелно са правом $\overline{13}$.

Узмимо да нам је $\overline{12}$ одма једна компонента (што ће у правој a дејствовати), друга ће нам бити $\overline{13'}$ коју смо начинили са b да је паралелна, па је у овом случају резултанта равна правој $\overline{13'}$. На овај начин имамо за силе, које би у правима *a* и *b* дејствовале одма и троуго сила а тај је 123'. Ради одређивања једне резултантине тачке, узмимо н. пр. у правој MN тачку O за пол тога троугла сила, и начинимо му одговарајући верижи полигон OI II III, ког се крајње стране морају сећи у такој тачки *R* кроз коју мора резултанта проћи. Ваља дакле још кроз *R* повући паралелну према $\overline{13}$, па ће та иста морати проћи и кроз тачку C, коју на хартији немамо. Да ће права RC или ϱ морати проћи и кроз ону другу тачку C', то је врло јасно, са тога, што је RC паралелно самој дијагонали датог четвороуголка и са тога још, што та права ϱ пролази већ кроз тачку C, мора без сумње пролазити и кроз тачку C'.

Задатак овај могли смо и тако да решимо, да смо разлагање силе узели у правима a' и b' а тога ради задржали $\overline{13}$ одма за резултанту. У том случају биће $\overline{32'}$ и

$\overline{2'1}$ компоненте које ће у a′ и b′ да дејствују. Дакле 32′1 био би полигон сила. Ради одређивања верижног полигона узмимо неку тачку O за пол полигона сила. Одговарајући верижни полигон, том полу и полигону сила биће OI II′III, ког крајње стране секу се у тачки *R′*, а то је она кроз коју мора проћи резултанта компонената што у a′ и b дејствују. Ако смо на начин што је пре овог изложен нашли још и другу тачку R, онда ваља R′ са R да саставимо, па ће нам права ϱ, пролазати кроз C и C′, а тећи са $\overline{13}$ паралелно.



Сл. 4

Одовуд изилази ово конструктивно правило: ваља начинити четвороугао 1244, који ће бити подобан са датим CmC′4, и то тако да дијагонала првога падне у дијагоналу m4 овог другога, а ћошак један 4 да је заједнички. Из тачке 3, ваља повући праву 34′ ∥ 12, па ћемо добити полигон сила 14′3, затим ваља из неке тачке O повући зракове O_1, O_4' и O_3 а исто тако и један полигон OIIV' III такав да је O1 || OI, O4' || I II и O3 || II'III. Полигон тај имаће то особено својство, да ће му се крајње стране OI и II'III довољно продужене сећи у такој тачки R, у којој ће лежати она права ϱ, која тачке C и C' везује, или тачка R то је тачка дијагонале $\overline{CC'}$. Дакле кад смо на тај начин тачку R добили, ваља кроз њу само да повучемо праву ϱ || 13, па ће иста кроз C и C' пролазати.

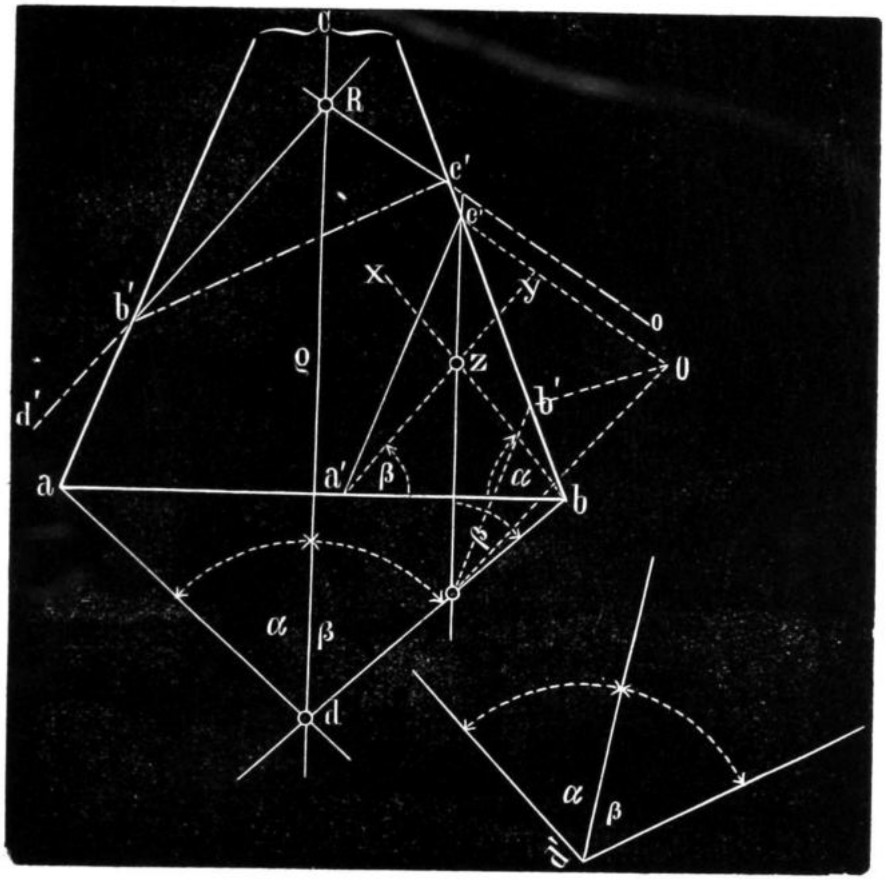
Ако нећемо да повлачамо ϱ са 13 паралелно, онда ваља још и из 1 повући паралелну 12' према страни b', затим продужити страну 23 до пресека 2' са оном првом. Ту тачку 2' ваља саставити са тачком O и начанити други полигон OI II' III тако да је O'I' || O1, I'II' || O2' и II'III' || O3. Ваља затим продужити стране OI и III II' до њиовог пресека R'. Кад смо још и R' добили, ваља само да R и R' саставимо са правом ϱ, па ће она кроз C и C' пролазити,

Оба та задатка налазе примену при решавању потетотовог проблема, у оном случају кад некога троугла abc трећа тачка c не лежи на асталу, а по таком троуглу имао би се проблем решити.

Дакле на асталу имамо само тачке a и b и правце из a и b на трећу тачку c, слика 5.

Кад се тај задатак на познате графиске начине решава, требају свакада да су нам све три тачке на асталу дате.

У случајима где су од троугла *abc* само две тачке a и b на асталу дате решава се задатак овако. Треба на асталу из неке тачке d'' која је вертикална над тачком *D* у природи, нацртати углове $\alpha = ad'C$ и $\beta = Cd''b$. Затим построити троуго $c'a'b \sim cab$, начинити $ya'b = \beta$ а $xba' = \alpha$. Праве bx и a'y сеће се у некој тачки z, и кад z са c' саставимо добијамо да је c'z. паралелно са правом dc, тек коју тражимо. Кад будемо даље начинили



Сл. 5

c′d′b = β, онда ће d′b бити она права, у којој ће морати да лежи тражена четврта тачка d. Треба нам још повући праву ϱ која ће кроз c пролазити и са c′d′ паралелно ићи, па онда где се та права ϱ буде са продуженом правом bd пресекла, а то ће бити овде у тачки d, то ће бити онда она четврта d која се тражила и која ће оној у природи D одговарати или троуго adb биће подобан троуглу ADB у природи. Кад смо добили праву cd′ онда се овај задатак просто своди на онај први. Нека је ту дакле полигон сила c′b′d′ где je b′d′ ‖ ac и узмимо још неку тачку O за пол истога, па онда томе одговара верижни полигон oc′b′d′, у ком je oc′ ‖ OC′ c′b′ ‖ Ob′ и b′d′ ‖ Od′. Дакле кроз тачку R мора пролазити и ϱ у којој ће c и d лежати. Зато нам ваља кроз R повући ϱ ‖ c′d′, где се она са правом d′b сече, а то је у тачки d, она нам је онда и она четврта која нам задатак решава.

Контроле ради ваља још d са a саставити, и ако је угао adc $= \alpha$ што га имамо нацртано, онда је и задатак добро решен, или што исто значи $\triangle$ adb $\sim \triangle$ ADB.

Наизад имам овде још ово да приметим, да ми можемо пол O увек тако да изберемо да нам се крајње стране верижног полигона на артији пресеку, а под којим се углом секу крајње стране полигона сила или стране што резултанту заклапају под истим углом сећи се и крајње стране верижног полигона.

Љубомир Клерић

ГЛАСНИК

СРПСКОГ УЧЕНОГ ДРУШТВА

КЊИГА XLII

С ЈЕДНИМ ПЛАНОМ.

У БЕОГРАДУ
ШТАМПАНО У ДРЖАВНОЈ ШТАМПАРИЈИ
1875

Где је што.

	страна
1. Српски поменици XV—XVIII века. Од Стојана Новаковића	1.
2. Бока и Зета. Од архим. Н. Дучића	153.
3. Моравска клисура међу Овчаром и Кабларом. Са једним планом. Од Мих. Ник. Илића	186.
4. Константин философ и његов живот Стефана Лазаревића деспота српског. По двјема српско-словенским рукописима изновице издао В. Јагић .	223.
5. Путничке слике. I. Косово. Од П. Срећковића .	328.
6. Податци за историју цркве у Старој Србији. Додатак к забелешкама штампаним у Гласнику XL. Од Ив. Јастребова.	353.
7. Мера дужине (comparator) независна од промене топлоте. Измислио и конструисао Љуб. Клерић .	363.
8. Исправци и додатци к животу Стефана Лазаревића (види бр. 4). Од В. Јагића	373.

МЕРА ДУЖИНЕ

(COMPARATOR)

НЕЗАВИСНА ОД ПРОМЕНЕ ТОПЛОТЕ.

ИЗМИСЛИО И КОНСТРУИСАО

ЉУБ. КЛЕРИЋ.

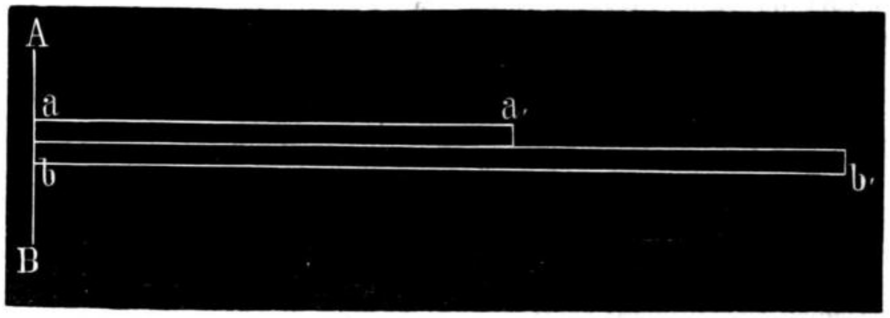
Знамо да се сва тела од увећане топлоте шире, па по томе и свака мера, која би на 0° имала своју нормалну дужину, била би дужа над тим степеном топлоте, а краћа, кад би се оладила испод тог степена. Из овога излази да и мерења нису тачна, кад истом мером на разним температурама меримо. Кад температуру не би у рачун узимали, понајчешће би нашли, да је неко одстојање краће, но што је у самој ствари; то долази отуда, што меримо таквом мером, која је упливом топлоте постала дужа, но што је њена нормална дужина. С тога се при сваком тачном мерењу опажа и температура мере, па се према томе корекција израчуна, и мера се своди на њену нормалну дужину, а то је дужина на температури 0°. Као пример овакког тачног мерења, навешћу мерења основица за већа премеравања земаља, а тако исто и при неким физичним опитима води се овај исти рачун о нормалној дужини мере. Уплив температуре на дужину мере има не само теоријску, него и практичну вредност, с тога су физичари одлучили, да се мере за тачна мерења граде од платине или стакла, а то су тела која се на топлоти најмање истежу. Као што се види, овом је мером само умањена погрешка мерења, али никако није са свим отклоњена. У најновије доба тражен је други неки метал, који се на топлоти мање шири но платина, и тако је на једном скупу у Паризу усвојена за то легура од платине и иридијума. Пре четири године поднео је Soleil француској академији једну меру од берила, која ни на којој температури своју дужину не мења. Поодавна је опажено на кристалима берила, да се под утицајем топлоте скупљају у правцу њихове главне осовине, а истежу се у оном правцу, који стоји нормално према главној осовини; из овога излази дакле, да ое ови кристали никако неистежу нити скупљају у оном правцу, који је у средини између ова дра поменута правца. Солељ је исекао кристале берила у овом правцу, па је добио плочице, које ни на којој температури своју дужину не мењају; од ових плочица градио је мере, које одиста задржавају своју праву дужину и на нижој и на вишој температури. Као што се види, ова мера одговара свима условима, који се траже од једне мере за тачна мерења, само што је берил по себи скупо тело, па би мало њих такву меру имали, а осим тога не находи се у великим кристалима, да би се од њега дужа мера наградити могла. Поред свега овога нужна су тачна оптичка посматрања, те да се кристал берала одиста пресече у оном правцу, у коме му се дижина никако не мења. Ове три незгоде чине те мера од берила још није јако распрострта.

Ја подносим овде друштву опис и цртеж једне моје мере, која потпуно одговара свима условима, што сам их код мере од берила набројао, а која има у исто време превагу над овом мером у томе, што није скупа, доста се лако може наградити, и што јој дужину од воље дати можемо. И моја мера не мења своју дужину под утицајем топлоте. Ја ћу овде прво да опишем ту моју меру, па ћу онда прећи на израчунавање њено.

У Сл. 1. (види таблицу I) нацртан је укупан изглед те мере. Мера сама означена је у тој слици са AB; она се састоји из два различита тела, која су, као што ћемо мало час видети, стакло и бакар (или ма који други метал). Од 1 до 2 бакар је, који лежи на стакленој плочи $m\ n$ (Сл. 3.). Бакар код 1. (Сл. 1.) има као неку куку, са равном површином $a\ c$ (Сл. 3.), ту површину додирује стаклена плоча $m\ n$ и то у тачку m, а додирује је дејством федере $k\ l$, који се о дрвену површину $o\ p$ одупире; други крај стаклене плоче n означен је у сл. 4. цртом s z. Та два мерила (бакар и стакло) леже у једном дрвеном сандуку, који је код 1 5 (Сл. 1.) и код 4, (Сл. 2.) отворен, како би се увек могло видети, да федер одиста притискује, и да је бакар и стако непрестано у додиру на равнини $Y'Y'$ (Сл. 2.). Бакарна плоча има слободног простора од 2 до 3 (Сл. 6.) или од a до d' (Сл. 3.) па се може по вољи дужити и скупљати. Све ово са кутијом заједно метуто је на једну даску, која је тако ижљебљена (:$e\ f\ g\ h\ i\ k$ Сл. 2.:) да кутија може у њој стати, а да површине стакла и бакра ($a'\ b$ Сл. 6.) леже у равнини $a''\ b''$. Даље $x\ v$ и $y\ v$, то су два метална мерила, од ма каквог метала, који се оштрицама код v само додирују, и могу се другим својим крајеа око горњих ивица металних призама p и p' (Сл. 1.) нагибати, као теразије око своје тачке вешана, а тако исто горњи крајеви тих мерила могу се код v, у ужљеботини $j\ v\ \delta$, окретати, а да се увек у ивицама додирују. $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$, тоје једна коцка, која се може кретати правцем $D\ C$ и обрнуто, и то кроз један јарам $\alpha'\ \beta'\ \gamma'\ \delta'$ (Сл. 4.). Сам јарам видимо у Сл. 1, ту је означен овим писменима: $\alpha'\ \beta'\ \gamma'\ \delta'\ m\ n\ m'\ n'$, а просек његов види се у Сл. 4. $\alpha'\ \beta'\ \gamma'\ \delta'$. Да се не би јарам кретао правцем C или D, провучен је кроз отворе r и s; отвори су ови у комаду MN, који је за даску утврђен. Јарам се овај креће само правцем $A\ B$ и обратно; за то и јесте могуће да се тачка v сваким могућим правцем креће. Кретање јарма правцем AB ваља да је паралелно са правцем OP, а кретање призме DC ваља да је нормално, према кретању јарма. Коцку $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ притискује федер $\varphi\varphi'$ правцем CD, и то чини те се мерила ивицама својим у v увек додирују. Федер је утврђен на коцми, а одупире се о површину $\mu\mu'$. —

Одстојање оних тачака $(x,\ y)$, где доњи крајеви поменутих металних мерила призме додирују, остаће на свакој температури непромењено, и то из ових узрока:

Узмимо ма каква дра различита метала, који се на топлоти различито истежу. Нека је једнога којефицијенат истезања δ, а другога δ_1. Нека је на температури t° један метал дугачак X_t, а други Y_t. У Сл. 1 положена су



Слика 1.

та два метала једно на друго, од којих $a\ a$, претставља дужину X_t, са његовим којефицијентом истезања δ; $b\ b_1$ представља дужину Y_t, са својим којефицијентом истезања δ_1. Положимо их тако, да једним својим крајем додирују раван $A\ B$, па сад меримо им тужине од те равни. На некој другој температури, узмимо на температури $t_1 > t$, имаће ови метали седеће дужине:

$$X_{t_1} = X_t + \delta\,(t_1 - t)\,X_t \ldots . \alpha$$
$$Y_{t_1} = Y_t + \delta_1\,(t_1 - t)\,Y_t \ldots . \beta$$

Одузмимо прву једначину од друге, онда ћемо имати на температури t_1 разлику дужине ова два метала, а то је одстојање од a' до b'; које нам претставља ова једначина:

$$Y_{t_1} - X_{t_1} = Y_t - X_t + \delta_1 (t_1 - t) Y_t - \delta (t_1 - t) X_t$$

или

$$Y_{t_1} - X_{t_1} = Y_t - X_l + (\delta_1 Y_t - \delta X_t) (t_1 - t) \ldots 1.$$

Кат би у овој једначини с десне стране све познато било осим t, онда би лева страна исте једначине зависила једино од t_4. Кад би иам на против лева страна ове једначине у свима приликама могла да да неки константан број, онда би ту диференћију като такову могли врло угодно за непроменљиву меру узети.

Узмимимо да је та диференција равна некој конститној количини C, и разгледајмо под којим би условима то могло бити. По тој поставци добили би овакву једначину:

$$Y_t - X_t + (\delta_1 Y_t - \delta X_t) (t_1 - t) = C \ldots . 2$$

Докле год ова једначина завист од $(t_1 - t)$ као произвољно променљиве количине не може она као таква ни постојати. Само у оном случају пак не ће зависити од $t_1 - t$ ако учинимо да су X_t и Y_t тако удешени да је којефицијенат вд $(t_1 - t)$ раван нули. Кад то учинимо добићемо из горње једначине ове две:

$$Y_t - X_t = C \ldots . 3.$$

$$\delta_1 Y_t - \delta X_t = O \ldots . 4.$$

У овим двема једначинама имамо четири нспозната, но ако изберемо два метала, који ће нам диференцијом своје дужине дати у свима приликама константну дужину, то нам је тиме познато и δ и δ_1 па онда имамо још само два непозната члана у овим једначинама, а то су X_t и Y_t, које можемо рачуном одредити, јер имамо два непозната и двс једначине.

На овај начин одређено X_t и Y_t, даће нам диференцијом њихових дужина константну дужину C, која од уплива топлоте не зависи; а тиме једначина 2 задовољена.

Нека је на пр. $C = 1$ метар, онда ћемо последње две једначине имати у овом облику:

$$Y_t - X_t - 1 = O$$
$$\delta_1 \, Y_t - \delta X_t = O$$

Кад из ове две једначине одредимо X_t и Y_t, добићемо у диференцији њихових дужина увек 1 метар, т. ј. оно ће бити 1 метар на температури над и испод t.

Дужина свију мера обично се одређује на температури 0^o, па за то ћемо и ми дужине Y_t и X_t одредити такође на температури 0^o. Кад ово учинимо добићемо ове две једначине:

$$Y_0 - X_0 - 1 = O.$$
$$\delta_1 \, Y_0 - \delta X_0 = O.$$

Код опет ове две једначине по X_0 и Y_0 решимо добићемо следеће:

$$X_0 = \frac{\delta_1}{\delta - \delta_1} \; . \; . \; . \; . \; \alpha.$$

$$Y_0 = \frac{\delta}{\delta - \delta_1} \; . \; . \; . \; . \; \beta.$$

Из овога је тек увиђаван принцип, по коме сам ја моју не промењиву меру построио. YY (Сл. 1.) и $Y'Y'$ (Сл. 2), то је нулна равнина, од које ћемо дужине мерити. Ваља дакле два тела једно на друго тако положити да њихове дужине меримо од исте вертикалне равни, а та означена у Сл. 1 са YY.

Ја сам моју меру тако постројио, да је горње тело бакар, а доње стакло. За тим сам на бакру обележио црту p, која по једначини α одстоји од равнине YY за дужину

X_0; тсто сам тако и на стаклу обетежио црту p_1, која по једначини β одстоји одстоји од равнине YY_0 за дужину Y_0. Одстојање од p до p_1 равно је у овом случају 1 метар. Кад према којефицијенту истезања бакра и стакла решимо једначине α и β, добићемо за X_0 (дужина бакра) и Y_0 (дужина стакла) ове бројеве:

$$X_0 = 1{,}00466756 \text{ метар.}$$
$$Y_0 = 2{,}00466756 \quad ,,$$

Као што видимо из ова два броја, дужине X_0 и Y_0 биће увек $=$ 1 метар, а то је оно непромењиво одстојање од p и p_1 које сам ја на мојој мери за непромењиву јединицу узео.

Кад би на овој мојој мери биле само те две тачке обележене, онда би њоме могли тачно одмерити само дужину једног метра, или би на њој могли контролисати само дужине једног метра. Остале делове метра пак не би могли том справом одмерити за то, што само те две тачке p и p_1 имају релативно непромењиво одстојање, а све остале, и на стаклу, и на бакру, међусобно су променљиве. Но како врло често имамо да меримо тачно и мања одстојања, но што је 1 метар, то сам додао овој мојој справи још два мерила, а то су vp и vp', којима ћемо моћи тачно да меримо и мање делове метра, који су такође од температуре независни. Мерила: vp и vp' могу бити произвољна, само ваља да су обадва једне дужине, и поделићемо их на онолико делова, колики део метра хоћемо да меримо. Хоћемо ли н. пр. 1 милиметар овом справа домеримо, то ћемо ова два мерила у 1000 једнаких делова понелити. Тачке: v, p и p' леже у једном равнокраком триуглу, који има за основицу непромењиво одстојање pp'. Са променом температуре, мењаће се истина и дужина ових мерила (vp и vp'), но за то, што је основица у том равнокраком триуглу непромењлива, то ће и све пруге, што су према овој основици паралелне, остати непромењене; н. пр. пруга tt'; разуме се да то вреди само за одстојања од оних тачака, што леже у правцима vp и vp'. Тако дакле паралелна пруга, која лежи у половини између: vp и vp', биће управо $\frac{1}{2}$ метра, ако лежи на стотом делу тих праваца, биће $\frac{1}{100}$ део метра и т. д. Као што видимо, сви ови делови метра исто тако од топлоте не зависе, као и сам наш нормалан метар pp'. Узмимо да овом мојом мером тачно одредимо дужину од 352 м. м. онда ћемо наћи на правцима: vp и vp' обележене тачке 352, па њихово одстојање, које ће са pp' паралелно ићи, биће управо 352 м. м. и које се од промене температуре неће променути.

Видесмо, да ће се дужина мерила vp и vp' мењати у слѣед промене температуре, па баш с тога је и удешено тако, да се тачка v померати може. Због овога је додата направа MN, њоме је то постигнуто, да се тачка v може кретати нормално, према pp'. Осим овога тачке: p p мењајући свој положај такође од промене температуре, јер ће се одстојање pp' сваком променом температуре на десно, или на лево мицати. Направа MN тако је удешена, да се тачка v може од иста у сваки правац помицати. Из описа знамо како се коцка α β γ δ може лево и десно помицати, с тога се и тачка v може исто онако кретати, као и одстојање pp'. Сад тек можемо увидети улогу федера $\varphi\varphi'$; он чини те се мерила додирују непрестано у тачку v, а тако исто додирују и призме p и p', у тачке x и y. Повишавањем томпературе продужиће се мерила, па ће овај федер потиснути, а исто тако снижавањем температуре скупиће се мерила, но федер ће се за њима опружити и коцку потиснути па ће се мерила опет у тачке v додиривати. Федер се најзад може кретати и по површини $\mu\mu$, јер је он са коцком спојен.

За сад ћу још и то да поменем, да се по овом истом принципу може начинити један клин којим се може непосредно дознати, колико варира дужина базис-апарата, од оне дужине, која му је температури 0_o одређена, и тако се може корекција с места забележити. Исто тако овим клином можемо одредити и одстојање два апарата, кад један над другим леже. Другом приликом саопштићу друштву још један апарат за мерење базиса, који сам по истом овом принципу конструјисао; он је прост, а од температуре не зависи.

ГЛАСНИК

СРПСКОГ УЧЕНОГ ДРУШТВА

КЊИГА XLIV

СА ЈЕДНИМ СНИМКОМ

У БЕОГРАДУ
ШТАМПАНО У ДРЖАВНОЈ ШТАМПАРИЈИ
1877

Шта има у овој књизи и где је што.

СТРАНА

1, Акценти штампаних српско-словенских књига, истраживање Стојана Новаковића 1

2. Нападна тачка и величина центрифугалне силе у кружној површини, од Љубомира Клерића 153

3, Говор Драг. С. Милутиновића при отварању излога снимака српских уметничких старина 169

4, Станак по дубровачкоме законику од 1272 годене, од В. Богишића 197

5, Словено-српска књижница на Св. Гори Атонској, од архим. Леонида 232

6, Библиографија српске и хрватске књижевности за 1875, од Ст. Новаковића 305

7. Радња Српског ученог друштва до 13 Јуна 1876 365

НАПАДНА ТАЧКА

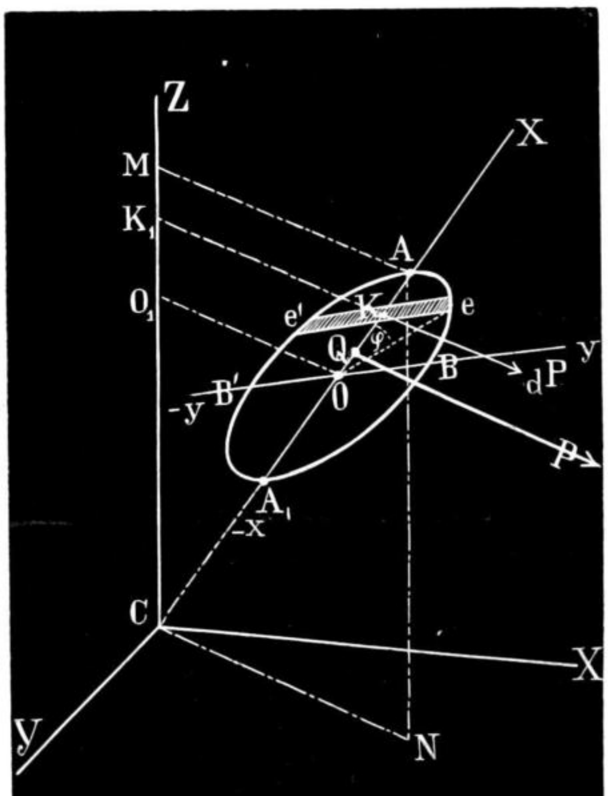
и величина центрифугалне силе у кружној површини, која се под неким углом, а сталном угловном брзином, окреће око вертикалне осе.

I.

У механици Јулија Вајсбаха, а у § 307, изложен је аналитички израз за каординате нападне тачке центрифугалне силе и њене интензивности за купу, која се под извесним углом окреће око неке вертикалне осовине на тај начин, кад купа својим шиљком ту осовину додирује. У истом делу, није изведен начин и пут, којим се до одредбе поменутих величина дошло; а како у истој механици у предидућим параграфима није дато довољног елемента, по ком би читаоц тога дела могао сам до тих резултата доћи, побудило ме је то, да овом приликом изложим овде мој начин прорачунавања речених каордината и интензитета центрифугалне силе, а мислим да ће овај пут прорачунавања, у колико су ми остали путови познати, још и најпростији испасти.

У цељи решења тог задатка, дакле ради одређивања центрифугалне силе и њене нападне тачке за купу, која се под извесним углом њене осовине око вертикалне осе окреће, а теменом њеним исту обртну осу додирује, ваља најпре одредити центрифугалну силу и њену нападну тачку за кружну површину као нормални и елементарни попречан купин пресек, па кад је за таку површину одређено оно што се тражи, као што и сам задатак гласи, онда ће врло лако да буде, те да се резултати отуда и на саму купу примене. У следећем дакле, прелазим на саму ствар.

Ради олакшице тога задатка, ваља учинити извесне претпоставке, а тако исто ради краткоће у рачунању, ваља увести извесне знаке за количине које ће у рачунању фунгирати. Дакле: елементарни купин котур или кружна површина $ABA'B'$ (слика 1) нека је према обртној осовини



Сл. 1.

тако положена, да на њу стављена нормална раван $MANC$, пролази, прво, кроз кружни центар O, друго још кроз вертикалну обртну осу ZC. По овоме је онда и раван $MANC$ вертикална, а угао $ZCA = \alpha$, то је угао под којим је кружна површина према вертикалној или обртној оси ZC нагнута. Даље $AO = BO = OA_1 = B'O = r$, то нека је полупречник круга; одстојање кругововг центра O, од пробојне тачке вертикалне осе ZC, са кружном равни, што бива у тачки C, означимо са l, дакле је ту $OC = l$; најзад положимо још кроз центар O а у равни самог круга ортогоналан каординатан систем xx, yy тако, да је yy хоризонтално по чему онда xx, мора да лежи у пресеку нормалне равни $MANC$ са равном круга, дакле осовина xx пролази онда и кроз пробој C.

Ради изналажаја момента центрифугалне силе у поменутом кругу, узмимо тачку C као фиксну на коју ћемо да моменте сила однесемо, а осим тога разложимо и читаву кружну површину на саме елементарне а хоризонталне пруге ee', оне леже дакле нормално на осовини xx, која их дели на две конгруентне половине. Половина дужине таке пруге нека је $Ke = y$, а њено одстојање од центрума O или осовине yy то је $OK = x$. По томе је дакле површина те елементарне пруге у кружној површини, $= 2ydx$, разумевајући овде под dx висину те пруге. Ако даље означимо са γ густину материјала од чега је кружна површина, онда је те елементарне пруге маса $m = \frac{2\gamma}{g}\, ydx$. За ту елементарну пругу а односно њене центрифугалне силе за осовину ZC важи то, да центрифугална сила у самој тачки тежишта напада, и ако са P означимо центрифугалну силу читаве површине, онда је по мало час реченом:

$$dP = \omega^2 m \overline{KK_1} = \frac{2\omega^2 \gamma.}{g}\, y.\, \overline{KK_1}\, dx \;\ldots\ldots\; 1.)$$

где нам ω означава угловну брзину или брзину окретања у одстојању један од обртне осовине, а $\overline{KK_1}$ то је полупречник обртања или одстојање нападне тачке K од обртне осовине ZC.

Пошто су центрифугалне силе, свију елементарних пруга међу собом паралелне (а овде хоризонталне) онда можемо и озибе тих сила мерити на ма којој линији, са тога можемо узети тачку C за моментну тачку а праву xx или AC за линију момената. Према томе онда је и статичан моменат горње силе dP претстављен овим изразима:

$$\overline{CK} \cdot dP = (OC + OK) \frac{2\gamma}{g} \omega^2 \overline{KK_1} . y . dx$$

$$= \frac{2\gamma\omega^2}{g} y \overline{KK_1} . (l + x) . dx \ldots . 2)$$

Узмимо сада нека је нападна тачка центрифугалне силе P у тачки Q, а озиб те силе за статичан моменат односно обртне тачке C нека $QC = L$, онда ћемо у цељи одредбе нападне тачке Q за силу P, добити овај израз:

$$PL = \frac{2\gamma\omega^2}{g} \int y \, KK_1 \, (l + x) \, dx \ldots . 3)$$

који нам израз десно од знака равности, претставља суму статистичких момената центрифугалних сила свију елементарних пруга што се могу у кружној површини $ABA'B'$ повући. У том изразу дакле, имамо моменат центрифугалне силе, за кружну површину а рачунао на тачку C, потпуно одређен, ваља само још да се одреди алгебарна вредност тог општег интегралног израза, са десне стране знака равности, једначине (3). У цељи тој, да тај интегрални израз лакше решимо, уведимо најпре поларан координатан систем, место ортоганаиног, дакле преставимо кружну периферију у њеној поларној једначини, чега ради узмимо O за пол, а углове меримо од осовине

xx на десно. Кад узмемо да су за тачку e, у периферији круга коардинате x и y, и ако сада за поларан систем, а за исту тачку, означимо промењиви угао $AOe = \varphi$ онда је по томе и:

$$x = r \cos \varphi, \ y = r \sin \varphi \text{ и } dx = ds. \sin \varphi.$$

где нам ds означава елеменат кружнога лука код тачке e. Али како је даље још и $ds = r. d\varphi$, онда је по томе $dx = r \sin \varphi. d\varphi$.

С тим изменама и вредностима добијамо да је:

$$l + x = l + r \cos \varphi \text{ и } KK_1 = (l + x) \sin \alpha = \\ = (l + r \cos \varphi) \sin \alpha.$$

Кад све потребне замене извршимо у изразу под (3), добићемо за моменат центрифугалне силе P овај израз:

$$PL = \frac{2\gamma\omega^2}{g} \int r \sin \varphi \, (l + r \, coc. \varphi)^2 \sin \alpha. \, r \sin. \varphi. \, d\varphi$$

$$= \frac{2\gamma}{g} (r\omega)^2 \sin. \alpha \int \sin^2 \varphi \, (l^2 + r^2 \sin^2 \varphi + 2lr \cos. \varphi) d\varphi$$

или је:

$$PL = \frac{\gamma\omega^2}{g} . \, 2 \, r^2 \sin. \alpha \int (l^2 \sin. \varphi + r^2 \sin^2 \varphi \cos.^2 \varphi + \\ + 2 \, lr \sin^2 \varphi \cos \varphi) \, d\varphi \ldots . (4.$$

Као што се из слике а и саме природе ствари јасно види, интеграл тај ваља нам узети у границама од $o - \pi$; а ради олакшице при интегралењу, боље је да се уведу следеће замене, т. ј. ставимо место:

$$\sin^2 \varphi = \frac{1 - \cos^2 \varphi}{2} ; \ \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi = \tfrac{1}{4} \sin^2 2 \varphi = \\ = \frac{1 - \cos 4 \varphi}{2 \, . \, 4}$$

кад те замене горе извршимо, имаћемо да је:

$$PL = \frac{\gamma\, \omega^2}{g}\, 2\, r^2 sin\, \alpha \int_o^\pi \Bigg[l^2 \left(\frac{1 - cos\, 2\, \varphi}{2}\right) +$$

$$+ r^2 \left(\frac{1 - cos\, 4\, \varphi}{8}\right) + 2\, lr\, sin^2\, \varphi\, cos\, \varphi \Bigg] d\, \varphi \ldots . (5$$

Овај се интегрални израз под (5), сада млого лакше решава, но онај у форми под (4), јер је овде сада:

$$\int \frac{1 - cos\, 2\, \varphi}{2}\, d\varphi = \frac{\varphi}{2} - \frac{sin\, 2\, \varphi}{4}$$

а то узето у границама $o - \pi$ изилази

$$\int_o^\pi \frac{1 - cos^2\, \varphi}{2}. \quad d\varphi = \frac{\pi}{2} \ldots . (\alpha$$

даље је:

$$\int \frac{1 - cos\, 4\, \varphi}{8}. \quad d\varphi = \frac{\varphi}{8} - \frac{sin\, 4\, \varphi}{32},$$

а узето у границама од $o - \pi$, онда је

$$r^2 \int_o^\pi \frac{1 - cos\, 4\, \varphi}{8}. \quad d\varphi = \frac{r^2 \pi}{8} \ldots . (\beta$$

и напослетку још добијамо како је и

$$\int sin^2 \varphi\, cos\, \varphi\, d\varphi = \int sin^2 \varphi\, d\, cos\, \varphi = \tfrac{2}{3}\, sin^3\, \varphi$$

овај општи интеграл узимајући опет у границама од $o - \pi$, добићемо да је:

$$2\, lr \int_o^\pi sin^2\, \varphi\, cos\, \varphi.\, d\varphi = o \ldots . (\gamma$$

По тим вредностима интеграла под α, β и γ изилази нам вредност интеграла:

$$\int_{0}^{\pi}\left[l^2\left(\frac{1-\cos^2\varphi}{2}\right)+r^2\left(\frac{1-\cos 4\varphi}{8}\right)+\right.$$

$$\left.+\,2\,lr\,\sin^2\varphi\cos\varphi\right].\quad d\varphi=\frac{l^2\pi}{2}+\frac{r^2\pi}{8}$$

Дакле апсолутна вредност статистичког момента, центрифугалне силе P, израженог под (5) ова је:

$$PL=\frac{\gamma}{g}\,\omega^2\,2r^2\sin\alpha\left(\frac{l^2\pi}{2}+\frac{r^2\pi}{8}\right)$$

$$=\frac{\gamma}{g}\,l\omega^2\,r^2\,\pi\,\sin\alpha\left(l+\frac{r^2}{4l}\right)\ldots.(6$$

Али како је по познатом меканичком закону о центрифугалној сили, резултирајућа центрифугална сила читаве кружне површине, дакле сила:

$P=\omega^2\times$ масом $\times$ обртним полупречником масине тачке тежишта,

то је онда по томе иста сила:

$$P=\frac{\gamma}{g}\,\omega^2\,r^2\,\pi.\,l\sin\alpha\ldots.(7$$

поделимо сада овом једначином, ону једначину под 6, онда ће резултат те поделе дати:

$$L=\frac{\frac{\gamma}{g}\,\omega^2\,r^2\,\pi l.\,\sin\alpha\left(l+\frac{r^2}{4l}\right)}{\frac{\gamma}{g}\,\omega^2\,r^2\,\pi l\sin\alpha}=l+\frac{r^2}{4l}\ldots.(8$$

У овој једначини имамо дакле линеарну вредност озиба L за центрифугалну силу P, дакле по томе је онда и нападна тачка исте те силе потпуно одређена, а она је у слици обележена са Q и одстоји од тачке C а у правној CX за дужину $CQ = L = l + \frac{r^2}{4l}$.

НАПАДНА ТАЧКА

и величине центрифугалне силе, у купи, која се под извесним нагибом окреће око вертикалне осе, а са теменом у истој оси.

II.

Кад смо тако на тај начин одредили нападну тачку центрифугалне силе за кружну површину[1], а за обртну осу ZC, можемо сада врло лако да пређемо и на саму кружну купу, за коју се има да одреди нападна тачка центрифугалне силе у оном случају, кад је купина оса нагнута према обртној обртној осовини за угао $90^\circ - \alpha$ (сл. 2 на стр. 161) а теменом њеним Z дира обртну осу ZC. Решење тога задатка бива овако.

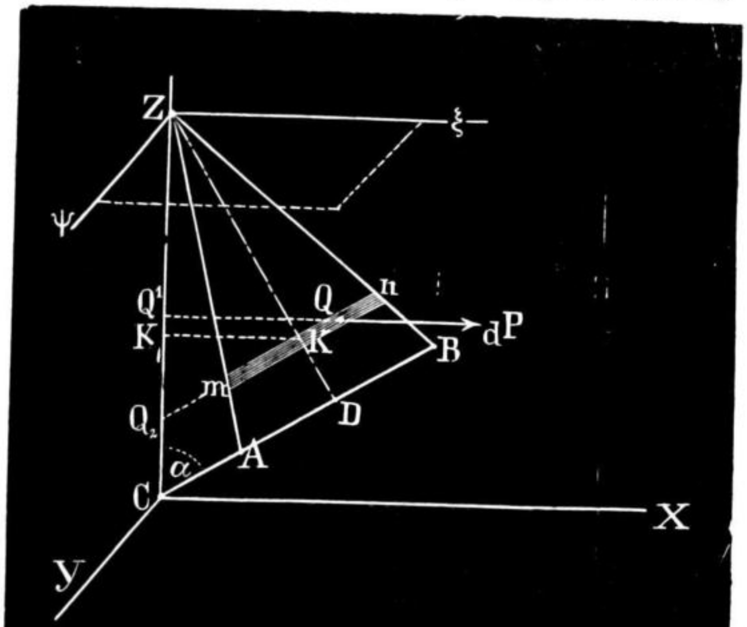
Купину центрифугалну силу за обртну осу ZC, можемо одма врло лако да определимо, јер је по познатом закону о центрифугалној сили, иста сила:

$$P = \omega^2 M (\tfrac{3}{4} h) \cos \alpha = \tfrac{3}{4} \omega^2 \frac{\pi r^2 h^2}{3} \frac{\gamma}{g} \cos \alpha$$

$$= \frac{\gamma \pi \omega^2}{3 g} r^2 h^2 \cos \alpha \ldots . (1$$

[1] По једначини (3) могли смо да одредимо нападну тачку за буди коју другу равну површину, јер смо тамо место x и y имали просто да заменимо вредности које би резултирале из једначине $y = f(x)$, што би одговарала контури те фигуре.

Ту нам је означавало M купину масу, даље h, то је купина висина $\overline{DZ}$, r то је полупречник кружног базиса купиног, а угао α то је угао нагнућа обртне осовине према



Сл. 2.

равни купиног базиса. Статичан моменат те силе P, а према моментаној равни $\xi\,\psi$, која је хоризонтална и која нека пролази кроз тачку Z, изражен је у овом изразу:

Pu = суми момената центрифугалних сила појединих купних котурастих елемената а ово односно на исту раван $\xi\,\psi$.

Овде u означава одстојање или озиб силе P односно равни $\xi\,\psi$.

Дакле ради изналажаја вредности Pu, поделимо читаву купу на елементарне појасеве као што је такав mn, који нека су са основицом купе паралелни. Полупречник тог котура нека је $mk = kn = y$, даље K нека му је центар а и тачка тежишта, а тачка Q то нека је нападна тачка одговарајуће елементарне центрифугалне силе dP. Ставимо даље нека је одстојање тачке K или котураво одстојање од темена Z, дакле $ZK = x$. Најзад ако узмемо још да је ω угловна брзина окретања купе око осе ZC и m маса елементарног котура, онда по оном ставу из механике, који вели да је центрифугална сила неког тела по интензивности онолика, као кад би читава маса у тачки тешишта концентрисана била, морамо узети да је и полупречник обртања $= \overline{KK}_1$ а не $\overline{QQ}^1$, гди у самој ствари иста сила и напада, дакле отуда резултира да је:

$$dP = \omega^2 m\, \overline{KK}_1.$$

Ако у овој фундаменталној једначини ставимо одговарајуће вредности за $m = \frac{\gamma}{g}\, \pi\, y^2.\, dx$ и $\overline{KK}_1 = \varrho = x \cos \alpha$ онда изилази да је даље:

$$dP = \frac{\gamma}{g}\, \pi\, \omega^2\, xy^2 \cos \alpha.\, dx \, .\,.\,.\,. \, (3.$$

У овом случају елементарне компоненте центрифугалне силе дејствују хоризонтално са тога, што је узето да је обртна оса вертикална, па кад узмемо да одстајање тих компонената меримо од хоризонталне равни која кроз Z пролази, дакле кад ставимо да је силе dP озиб $ZQ^1 = z$, то је онда и статичан моменат те силе однесен на раван $\xi\psi$ овај:

$$z.\, dP = \frac{\gamma}{g}\, \pi \omega^2 xy^2\, z \cos \alpha.\, dx.$$

Кад ову једначину доведемо у свезу са оним под (2) онда је врло увиђавно како је и

$$Pu = \frac{\gamma}{g}\, \pi \omega^2 \cos \alpha \int y^2 xz.\, dx \, .\,.\,.\,. \, (4.$$

У овом изразу сада са десне стране под интелралним знаком, ваља да елиминишемо колинине y и z, т. ј. да их заменимо са изразима, у којима ће само x да буде.

Избацивање тих количина постићемо лако, јер означимо полупречник купине основице са r, па је онда:

$$y^2 = \left(\frac{r}{h}\right)^2 . \ x^2 \ldots . (\alpha$$

Даље по тачки I, а једначини (8) добићемо, како је одстојање нападне тачке (Q) центрифугалне силе dP за елементарни котур mn, а рачунато од пробојне тачке Q_2, вертикалне осе ZC, са равном што кроз mn пролази, изражено овом вредности:

$\overline{QQ_2} = \overline{Q_2 K} + \frac{1}{4} \frac{y^2}{Q_2 K}$; но како је $Q_2 K = x \, cotg \, \alpha$, онда је

$$\overline{QQ_2} = x \, cotg \, \alpha + \frac{y^2}{4 \, x \, cotg \, \alpha},$$

ако сад у тој једначини избацимо y, а заменимо са вредности x, онда је:

$$QQ_2 = x \, cotg \, \alpha + \frac{r^2}{4 \, h^2 \, cotg \, \alpha} . \ x \ldots . (\beta,$$

но како је даље још по томе и

$$\overline{ZQ_2} = \frac{x}{sin \, \alpha}; \ Q^1 Q_2 = QQ_2 \, cos \, \alpha =$$

$$= \left(x \, cotg \, \alpha + \frac{r^2}{4 \, h^2 \, cotg \, \alpha} \, x\right) cos \, \alpha$$

што је онда по томе најзад и озиб центрифугалне силе dP, мерено од равни $\xi\psi$ претстављен овом једначином:

$$ZQ^1 = z = Q_2 Z - Q^1 Q_2 \text{ то је:}$$

$$z = \frac{x}{\sin\alpha} - \left(x \cot g\,\alpha + \frac{r^2}{4h^2 \cot g\,\alpha} x\right) \cos\alpha \ldots . (\gamma$$

На тај начин имамо за вредности y и z изражене као функције од x, и кад извршимо нужне замене за y и z у изразу под (4), добијамо ову једначину:

$$P.u = \frac{\gamma}{g} \pi\omega^2 \int \left(\frac{r}{h}\right)^2 x^2\, x \cos\alpha \left[\frac{x}{\sin\alpha} - \left(x \cot g\,\alpha + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{4} \frac{r^2 x}{h^2 \cot g\,\alpha}\right) \cos^2\alpha \right] dx = \frac{\gamma}{g} \omega^2 \left(\frac{r}{h}\right)^2 \times$$

$$\int \left[x^4 \cot g\,\alpha - \left(x^4 \cot g\,\alpha + \frac{1}{4} \frac{r^2 x^4}{h^2 \cot g\,\alpha}\right) \cos^2\alpha \right] dx.$$

Пошто сада тај интегрални израз прорачунамо и узмемо га у границама од o до h, добијамо да је такав опредељени интеграл изражен овом једначином:

$$Pu = \frac{\gamma}{g} \pi\omega^2 \left(\frac{r}{h}\right)^2 \left[\frac{1}{5} h^5 \cot g\,\alpha - \frac{1}{5} h^5 \cot g\,\alpha \cos^2\alpha - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{5.4} \left(\frac{r}{h}\right)^2 \frac{h^5}{\cot g\,\alpha} \cos^2\alpha \right]$$

одкуда после довољног свођења добијамо да је вредност статистичког момента

$$Pu = \frac{1}{5} \pi\omega^2 \left(\frac{r}{h}\right)^2 h^5 \sin\alpha \cos\alpha \left[1 - \frac{1}{4}\left(\frac{r}{h}\right)^2\right] \frac{\gamma}{g} \ldots . (5$$

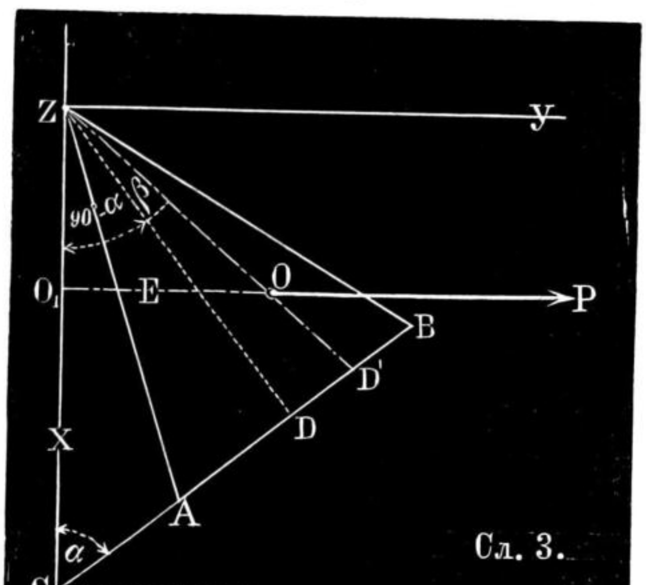
Ради одређивања вредности за озиб u,ваља нам сада просто поделити ту последњу једначину са овом

$$P = \frac{\omega^2 \pi h^2 r^2}{4},$$

и кад то учинимо имаћемо да је:

$$u = \tfrac{4}{5} h \sin \alpha \left[1 - \tfrac{1}{4}\left(\frac{r}{h}\right)^2\right], \ldots . (6$$

Овом једначином дознајемо како је резултанта центрифугалне силе P удаљена од хоризонталне равни $\xi \psi$ за вредност $u = ZO_1$ (сл. 3). Вредности том дакле, још незнамо и саму нападну тачку те силе P, са тога нам ваља за нападну тачку O силе P, да одредимо још једну каординату, па ћемо онда тиме одредити и место те тачке O.



Сл. 3.

У овом случају, сматрајући задатак за сасвим општи требало би управо да имамо за тачку O која је у простору, њене три координате, али пошто већ у напред знамо, да ће она лежати у вертикалној равни која пролази кроз обртну осовину ZC и кроз купину централну линију, то је с тога довољно да одредимо у правцу силе P, колико њена нападна тачка O од осовине ZX одстоји. Дакле овде имамо још да тражимо вредност за $O_1O = v = y$, ако узмемо за координатне осовине ZY и ZX које ће лежати у већ поменутој вертикалној, а за купу симетричној равни YZX.

Вредност за $v = y$ можемо врло лако да одредимо, јер поред оног што је мало час горе за тачку O речено, знамо још и то, да тачка ова мора лежати у пресеку праве $D'Z$, са правцем силе P, ако под правом $D'Z$, будемо разумевали геометријско место, нападних тачака центрифугалне силе, купиних елементарник плоча mn (сл. 2). Ваља нам дакле знати једначину праве $D'Z$, па ћемо онда знати и v.

Једначину те праве моћићемо врло лако изнаћи, јер тога ради ваља да у једначини (β) (тачке II) ставимо место x вредност h, па ћемо имати да је:

$$DD' = \frac{1}{4}\,\frac{r^2}{h\ cotg\ \alpha}$$

тим је дакле одређена нападна тачка елементарне плочице, која би се са базисом купе подударила. Ако сада тачку D' саставимо са купним теменом Z, добићемо ону праву $D'Z$, која ће нам оличити геометријско место нападних тачака елементарних а нормалних купних плоча. Узмимо даље, нека права та заклапа са купином осовином DZ, угао $DZD' = \beta$, онда ће бити:

$$tang\ \beta = \frac{1}{4}\,\frac{r^2}{h^2 cotg\ \alpha}$$

По свему овом, једначина праве $D'Z$, оличена је у овој једначини:

$$y = tg\,[(90 - \alpha) + \beta]\,x \ldots . \text{ I.}$$

даље једначина праве O_1E дата је овим изразом

$$x = \tfrac{4}{5}\, h \sin \alpha \left[1 - \tfrac{1}{4}\left(\frac{r}{h}\right)^2\right] \ldots . \text{II.}$$

По познатом тригонометријском изразу

$$tg\,(\alpha + \beta) = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha . tg\,\beta}\text{, добијамо да је}$$

$$tg\,[(90 - \alpha) + \beta] = cotg\,\alpha\, \frac{1 + \tfrac{1}{4}\left(\frac{r}{h}\right)^2 tg^2\,\alpha}{1 - \tfrac{1}{4}\left(\frac{r}{h}\right)^2},$$

те тако по томе, једначина под I, добија овај сведен изглед:

$$y = cotg\,\alpha\, \frac{1 + \tfrac{1}{4}\left(\frac{r}{h}\right)^2 tg^2\,\alpha}{1 - \tfrac{1}{4}\left(\frac{r}{h}\right)^2}\, x \ldots . \text{III.}$$

Ако сада најзад, ради изналажаја пресека праве O_1E са правом ZD', вежемо једначине II и III међу собом на познати начин, дакле ако по томе ради одредбе тачке O, избацимо из тих једначина количину x, добићемо оно што тражимо, т. ј. отуда ће резултирати како је:

$$\overline{OO_1} = y = v = \tfrac{4}{5}\, h \cos \alpha \left[1 + \tfrac{1}{4}\left(\frac{r\, cotg\,\alpha}{h}\right)^2\right] \ldots . (7).$$

Дакле каординатама u, v, нападна је тачка центрифугалне силе P потпуно одређена, чиме је овај задатак и решен. Саме вредности тих коардината што су једначинама (6) и (7) изражене, то су оне, што су у механици Вајсбаховој само написате а нису изведене. Овом сам приликом речени резултат потпуно оправдао.

Да се овака одредба дејства центрифугалне силе за буди какву површину употребити даје, то је врло јасно, јер у општем изразу под (3) тачке I, ваља да место $y = f(x)$ ставимо вредност функције, која ће нам контуру површине фиксирати. Напоследку мислим, да је овакав пут одређивања нападне тачке центрифугалне силе за буди какву површину, кад се иста око неке осовине окреће, може бити најпростији а и најувиђавнији, а тако исто само је извођење сасвим независно од **Даламбертовог принципа**, који би нас још на млого сложеније рачунање навео.

28 Фебруара 1876
у Београду.

Љуб. Клерић
ПРОФЕСОР МЕХАНИКЕ НА ВЕЛ. ШКОЛИ.

ГЛАСНИК

СРПСКОГ УЧЕНОГ ДРУШТВА

КЊИГА XLV

СА ЈЕДНОМ КАРТОМ И ГЕОМЕТРИЈСКИМ ТАБЛИЦАМА.

У БЕОГРАДУ
ШТАМПАНО У ДРЖАВНОЈ ШТАМПАРИЈИ
1877

ШТА ИМА У ОВОЈ КЊИЗИ И ГДЕ ЈЕ ШТО.

СТРАНА

1, Археологијско-географијска истраживања, од Драгашевића 1

2, Божидара Вуковића зборници за путнике, издања позната и непозната, библиографијски извештај Стојана Новаковића 129

3, Анализа терме бање слатинске од С. М. Лозанића.... 168

4, Нитро-деривати сложених ура, од С. Лозанића...... 170

5, Примена графодинамике на геометрију, од Љ. Клерића 174

6, Историја као наука, од Мих. Вујића.............. 201

7, Живот Срба сељака, III, Игре, од М. Ђ. Милићевића 293

8, Хронограф, цароставник, тројадик, родослов, од Стојана Новаковића 333

9, Радња и стање Српског Ученог Друштва........... 344

ПРИМЕНА ГРАФОДИНАМИКЕ НА ГЕОМЕТРИЈУ.

Како се може без помоћи круга одредити: тангента, полупречник и средиште кривине, за тачке коничких влакови.

I. У цељи одређивања тангенте, полупречника и средишта кривине за произвољну тачку (коничких влакова), ја ћу се послужити фороНомијским правилима, којима се до млогих геометријских истина на простији начин долази, но чисто геометријским путем. Шта више, форономијска посматрања, одкривају нам још и сасвим нове геометријске истине као што ћемо ово код Параболе видити. Ова метода, построја тангенте за тачке коничких влакова, биће сасвим различита од тако зване Робервалове методе. Међутим, ја ћу се и том методом, али у нешто модификованом, послужити мимогред, код полагања тангената на елипсине и хиперболине тачке. Исто тако и доказ за построј полупречника и средишта кривине, свешћу на простији метод, но што су досад познати, а притом показати зависност полупречника и средишта кривине за елипсине и хиперболине тачке, од њихових спрегнутих пречника. И, односно метода доказивања ово ће бити оно, што ћу овде као нешто ново да саопштим. Форономијски принципи, служиће ми само за доказ онога, што се хоће да одреди, при чему ће играти највећу улогу „Хамилтонов Ходограф“: а осим тога још и криве пруге брзина v_x и v_y и то као функције y и x, ако са v_x и v_y означимо компонирајуће брзине покретне тачке а у правцу X и Y осовине ортогананог координатног система, дакле x и y то ће бити координате те тачке. Ми ћемо дакле криве пруге, тих компонирајућих брзина, разумевати увек у овом облику дате:

$$v_x = \psi(y) \text{ и } v_y = \varphi(x)$$

напротив пак, ходограф је дат у облику

$$v_y = F(v_x).$$

Ове три криве пруге, као што се зна, стоје у тесној свези са самом трајекторијом, јер средством истих, можемо свакада и геометријску природу трајекторије израчунати, или ако су речене три криве већ нацртане, можемо онда путем построја, тачку по тачку трајекторије постројавати. Исто тако, кад је позната брзина тачке, која је ходограф описала, онда ћемо моћи одредити путању и брзину покретне тачке, чијем кретању, дати хидограф одговара. Најзад ако је дато $y=f(x)$, $v_y = \psi(x)$ и $v_y = F(v_x)$, дакле: трајекторија, једна од брзних криви и ходограф, онда смо у стању да произвољној тачки (x, y) трајекторије, одредимо њену апсолутну брзину. и то: по правцу, величини и смислу. У тој цељи ваља само за тачку x, y постројити одговарајућу тачку v_y, x, у брзној кривој; па онда кад ту тачку пројицирамо на ходограф, а у правцу X осовине, а после ту пројекцију спојимо са центром или полом ходографа, онда ће нам одстојање те тачке, а од центра ходографа, дати просто величину, правац и смисао апсолутне брзине у тачки x, y. Овој брзини, добивеној у ходографу, тангента на трајекторијиној тачки x, y иде паралелно.

То је дакле одма један метод, којим можемо да одредимо тангенту на произвољну трајекторијину тачку, а у оном случају, кад су осим трајекторије, познати још: ходограф и једна од брзних кривих пруга, дакле или $v_y = \psi(x)$ или $v_x = \varphi(y)$.

II. У следећем показаћу, да кад је трајекторија коничан влак, онда се ходограф и брзне криве, своде на познате, а врло карактеристичке криве пруге.

У тој цељи, одредимо и испитајмо све односе кретања, за следећи општи случај елептичког кретања:

Дате су једначине трајекторије у овом меканичком или динамичком облику:

$$x = a \sin \varkappa t \ldots (1 \ ,$$

и

$$y = b \cos \varkappa t. \ldots (2 \ ,$$

где су x и y опште координате покретне тачке, а за време t, ту је дакле t првобитно променљива количина, даље a и b то су сталне линеарне количине, док напротив $\varkappa$, преставља нам апсолутан број, већи или мањи од један. Ваља да се одреди сада геометријска природа трајекторије, што ћемо врло лако добити, ако из датих једначина елиминишемо време t. Ово ћемо постићи опет најпростије тако, ако из тих једначина одредимо $\sin \varkappa t$ и $\cos \varkappa t$ па онда сваку од тих нових једначина квадрирамо и саберемо. За резултат тог пословања добићемо ову једначину:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ \ldots . (3 \ ,$$

То је дакле једначина, која нам преставља трајекторију у њеном геометријском облику, што није ништа друго, као што видимо, но елипса, које су главне полу-осе: a и b. Тим смо сада дознали и значење количина a и b.

Сад долази по реду да изнађемо ходограф овога проблема, а овај ћемо знати, тек пошто будемо дознали за трајекторијину тачку x, y, компонирајуће брзине у правцу X и $У$ осовине, које ћемо означити са v_x и v_y; док напротив, исте тачке резултирајућа или тангенцијална брзина нека је v. Компонирајуће брзине v_x и v_y, то су као што знамо, први изводи даних једначина $x = f_1(t)$ и $y = f_2(t)$ а по t, дакле је:

$$\frac{dx}{dt} = v_x = a\varkappa \cos \varkappa t \quad . \ . \ . \ . \ (4 \ ,$$

и

$$\frac{dy}{dt} = v_y = b\varkappa \ sin \ \varkappa t \quad . \ . \ . \ . \ (5$$

У слици 1, таблица I. нацртана је трајекторија BAB′A′, а по једначинама *1* и *2*, тачка је почела своје кретање од места B, за које је $y = b$. За ту је тачку дакле $\varkappa t = o$, а исто је тако ту и $v_x = a\varkappa$, а $v_y = o$; за тачку A било би $\varkappa t = \frac{\pi}{2}$, а за ту је вредност:

$$v_x = o, \ v_y = -\varkappa b \ ,$$

и т. д. нашли би одговарајуће брзине у тачкама B_1 и A_1; најзад за $\varkappa t = 2\pi$, долази покретна тачка опет у своје почетно место B, а ово бива после времена $t = \frac{2\pi}{\varkappa}$. Отуда дознајемо већ, да је то кретање по елиптичној трајекторији перијодично. Ми смо дакле добили вредности за v_x и v_y, и то изражене као функције времена, па сада можемо прећи на одређивање геометријске природе ходографа. Ваља нам дакле наћи једначину облика $v_y = F(v_x)$, а ову ћемо добити, ако из једначина (4) и (5) одредимо $sin \ \varkappa t$ и $cos \ \varkappa t$, па онда те две једначине квадрирамо и саберемо. Пошто то извршимо, добићемо за резултат те операције ово:

$$\left(\frac{v_x}{\varkappa a}\right)^2 + \left(\frac{v_y}{\varkappa b}\right)^2 = 1 \quad . \ . \ . \ . \ (6 \ ,$$

где су нам v_x и v_y променљиве или опште координате траженог ходографа. Дакле једначина (6) представља нам геометријску природу ходографа, а за опште координате v_x и v_y. Као што видимо, та нам једначина преставља опет елипсу, са тога је и ходограф елипса, чије су полуосовине у правцу X и $У$, количине $\varkappa a$ и $\varkappa b$. Узмимо нека је $\varkappa = \frac{1}{2}$, онда нам у слици 1, преставља елипса $bab'a'$, ходограф; у свом правом положају; јер трајекторијиној тачки B одговара у ходографу зрак $\overline{cb}$, који је раван брзини тачке B; брзина тачке A, одговара у ходографу зраку ca и т. д.

Кад би још знали некој трајекторијиној тачки m, наћи одговарајући зрак cn у ходографу; или тачки m одговарајућу тачку n, ми би онда могли врло просто, постројити и тангенту на саму тачку m. У тој цељи, имали би онда кроз m да повучемо праву, која би ишла са $\overline{cn}$ паралелно, па би иста додиривала трајекторију у тој тачки m. Но ово ћемо моћи да одредимо, ако само конструјишемо још једну, ма коју од брзних криви пруга. Ми ћемо у следећем одредити обадве, а употребићемо само н. пр. криву $v_y = \psi(x)$.

Везујући сада једначине (2) и (4) и то елиминишући отуда време t, добићемо за резултат:

$$\frac{v_x}{y} = \frac{a\varkappa}{b} \quad \text{или}$$

$$v_x = \frac{a\varkappa}{b} \cdot y \; . \; . \; . \; . \; (7$$

а то је једначина праве, која пролази кроз почетну тачку координата, дакле кроз c и која је према $У$ осовини нагнута под углом, кога је тригонометријска тантента $= \frac{a\varkappa}{b}$. Дакле једначина $v_x = \varphi(y)$ преставља нам праву пругу и као што видимо, брзине v_x сразмерне су ординати одговарајуће тачке; дакле је у B максимум, а у A минимум, који је, $=o$. Нађена права $v_x = \varphi(y)$ та је у слици 1 преставлЪена правом $\alpha' c \alpha$. Другу брзну криву, добићемо, кад вежемо једначине (1) и (5) и то елиминишући време t. Резултат тога везивања, даће нам тражени однос:

$$\frac{v_y}{x} = -\frac{b\varkappa}{a} \text{ или}$$

$$v_y = -\frac{b\varkappa}{a} x \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (8$$

Ово је једначина праве пруге, која пролази кроз почетну тачку координата, а нагнута је према X осовини под углом, кога је тригонометријска тангента $= -\frac{b\varkappa}{a}$. Дакле је и брзна крива $v_y = \varphi(x)$ права пруга која је у слици преставлЪена пругом $\overline{\beta c \beta'}$, и ми ћемо у даљем пословању, оперисати са том правом $\overline{\beta c \beta'}$. Овде је дакле за тачку m, које је $x = \overline{c\mu}$, одговарајуће $v_y = \overline{\mu \nu}$, које по смислу дејствује у правцу одречнога y; на против за исту тачку, а за $y = \overline{cp}$, ту је одговерајуће $v_x = \overline{po}$, које дејствује у правцу позитивне X осовине. Како се одређује за трајекторијине тачке одговарајуће v_x и v_y то се јасно види из слике.

Даље је врло лако увидети, како смо у стању из тих брзних правих и из трајекторује, рачуном а и путем цртања, да одредимо свакој тачки m, одговарајућу тачку n у ходографу; па тако исто и саму резултирајућу брзину $v = \overline{cn}$ моћи ћемо изнаћи, и то по правцу, величини и смислу. Ми смо дакле у стању средством речених трију линија, или рачуном, или цртањем одредити тачку по тачку ходографа, дакле и сам ходограф. Ово последње могли би само онда употребити, кад би нам једначина $v_y = F(v_x)$ изишла компликована, или кад би то била крива пруга, коју би било заметно нацртати. Међу тим у овом проблему, овде, немамо нужде да се ни једним ни другим послужимо, него ћемо употребити већ познати ходограф $bab'a'$, даље брзну пругу β с β' и саму трајекторију BAB_1A_1.

Сваки је радијус вектор у ходографу резултанта из брзина v_x и v_y, и као така одговара само извесној тачки трајекторије. Дакле, кад је ходограф дат, па ако хоћемо да одредимо извесној трајекторијиној тачки m резултирајућу брзину, ваља да нам је позната само једна од њених компонената, н. пр. v_y; јер кад ту компоненту уметемо у ходограф као ординату ходографа, онда ћемо, спајањем те ординатине крајње тачке са c, добити: правац, величину и смисао резултирајуће брзине, а за ону тачку трајекторије, за коју је v_y једна од компонирајућих брзина. Но за произвољну тачку (m) трајекторије, добија се н. пр. компонента v_y, ако кроз исту тачку повучемо праву $m\nu$ паралелно са Y осовином (или нормално на X осовини) па у пресеку те праве са брзном правом $v_y = \psi(x)$ (а то је ту $\beta c \beta'$) добићемо извесну тачку ν, чије је одстојање од X осовине равно брзини v_y, дакле је $\overline{\mu\nu} = v_y$. Даље ради изналажаја тачки m одговарајуће тачке n у ходографу, ваља повући кроз ν паралелну са X осовином, па где та пресече ходограф, а то је у слици тачка n, онда ће она одговарити тачки m; права cn, то је сада резултирајућа брзина тачке m а у исто доба паралелна тангенти исте тачке m. Као што видимо, ово нам даје начин, да и без помоћи круга одредимо тангенту за тачку m; јер је тангента на тачки m; права (tt') која иде паралелно са ходографовим зраком cn, ваља дакле да кроз m повучемо праву (tt') са $\overline{cn}$ паралну, па је она онда ту и дирка. Паралела νn, сече ходограф обично у двема тачкама, па како се зна, који квадрант ходографа, одговара ком квадранту трајекторије, то нећемо имати двојакога смисла односно бирања зрака као што је

$\overline{cn}$; истина и онај други зрак $\overline{cn'}$ има смисла исто онаког, као што истоме x одговарају у трајекторији две тачке m и m', које једна испод друге стоје нормално на X осовини, дакле зраку $\overline{cn^1}$ паралелна на тачки m' повучена, биће тангента трајекторије, а у тачки m'. По овоме су и брзине тачака m и m_1, по јачини једне и исте, сам што су правци различити.

Из слике се види, како резултирајуће брзине, покретне тачке m. расте исто онако, као одговарајући радијуси вектори ходографа. Напротив брзина ходографа тачке n, та је као што знамо убрзање одговарајућој тачки m, а правац убрзања тмчке m биће паралелан са тангентом на тачки n. Дакле ради одређивања убрзања за тачку m, ваља нам наћи брзину одговарајуће тачке у ходографу. Брзина тачака n на ходографу, налази се просто из једначина (4) и (5), јер се истима карактерише динамичка природа ходографа. Први деривати једначина (4) и (5), а по t узети, даће нам компонирајуће брзине у правцу X и $У$ осовине а за тачку н. пр. n на ходографу. Дакле кад је дат ходограф у облику једначина (4) и (5), онда се врло лако налази све, што би том ходографу одговарајуће кретење карактерисало; а једино геометријска природа ходографа, неби нам била довољна, да дознамо закон кретања тачке m а и њену путању. Пре но што би прешли на специјалне случаје овога проблема, који ће управо да буду тек практично применљиви, да одредимо још првом ходографу његов ходограф, или што исто значи, да нађемо закон, по ком ћемо моћи да одредимо убрзање за неку трајекторијину тачку. Пошто још и то будемо одредили, онда ћемо тек прећи к одређивању тангенте, полупречника и средишта кривине и за трајекторијину тачку m.

У цељи одређивања ходографа другог реда, означимо са p_x и p_y компонирајућа убрзања тачке m, (x, y) а у правцу X и $У$ осовине, а то ће бити у исто доба и компонирајуће брзине истога правца за одговарајућу тачку n ходографа. Назначена компонирајућа убрзања, јесу први деривати једначина (4) и (5) по t, дакле је:

$$p_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} = - a\varkappa^2 \sin \varkappa t \; . \; . \; (9$$

и

$$p_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv_y}{dt} = - b\varkappa^2 \cos \varkappa t \; . \; . \; . \; (10$$

ходографу $bab'a'$ слика 2 табл. I. одговарајући ходограф а у геометријском облику, наћи ћемо, кад једначине (9) и (10) вежемо и из њих елиминишемо време t. Резултат тог елеменисања биће:

$$\frac{p_x^{\;2}}{(a\varkappa^2)^2} + \frac{p_y^{\;2}}{(b\varkappa^2)^2} = 1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (11$$

Као што видимо и ходограф ходографа, или ходограф другога реда, то је опет елипса $\mathfrak{b}\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_1$, чије су осовине $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$ и $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, и то је: $\overline{\mathfrak{c}\mathfrak{b}} = b\varkappa^2$ и $\overline{\mathfrak{c}\mathfrak{a}} = a\varkappa^2$, у слици је цртан ходограф другога реда за $\varkappa = {}^1\!/_2$, као што је тај број узет и за Хамилтонов ходограф.

Ради лакшег одређивања онога што даље долази, ваљало би још да знамо правац резултирајућег убрзања $p = \sqrt{p_x^{\;2} + p_y^{\;2}}$. а то ћемо добити, ако p_y поделимо са p_x, и ако угао што p са X осовином заклапа означимо са α, онда је:

$$tang\, \alpha = \frac{p_y}{p_x} = \frac{a}{b}\; tang\; \varkappa t\,,$$

ово важи наравно за тачку m чије су координате x и y; но ако још поделимо x са y, онда ћемо добити тригонометријску тангенту правца радија вектора тачке m, а према X осовини. дакле ако са β означимо угао што тај вектор са X осовином заклапа, онда је и:

$$tang\,\beta = \frac{y}{x} = \frac{a}{b}\ tang\,\varkappa t\ .$$

отуда сада сљедује, да је $\angle\,\alpha = \angle\,\beta$. Но како зрак ходографа другог реда, или што исто значи p, пролази кроз исту тачку c као и радијус вектор тачке m, то значи онда, да убрзање p тачке m пада са њеним радијусом вектерем у једно. Овде имамо дакле посла са централним кретањем. Смисао пак убрзања p или силе за јединицу масе, покретне тачке m, добићемо из смисла кретања ходографске тачке n. Па како се n и m као две одговарајуће тачке крећу у истом смислу, то је по томе лако увидети, да је јединици масе одговарајућа сила покретне тачке m привлачна.

Из свега овога следује сада ово врло важно: Ако је n тачка првог ходографа, а тачка m њој одговарајућа једновремена на трајекторији, онда ће тангента тачке n ићи паралелно са mc, јер ће сада тачки n одговарати у ходографу другог реда тачка $\mathfrak{n}$, која се добија у пресеку радија вектора тачке m са ходографом $\mathfrak{b}\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_1$. Слика 2. таб. I. И овде неможе бити двојака смисла о тачки $\mathfrak{n}$ кад знамо да тачки b ходографа првог реда, одговара тачка $\mathfrak{b}$ у ходографу другог реда; даље тачки a одговара тачка $\mathfrak{a}$ и т. д., дакле зна се већ по природи кретања тачака m и n који квадрант ком квадранту тих ходографа одговара.

Осим тога није тешко још и то врло важно увидити, како у зрацима cn и $c\mathfrak{n}$ леже спрегнути пречници трајекторијине тачке m. Ми ћемо од овога чинити даље важну употребу и отуда извести код параболе нове геометријске законе, па ћемо видети како су код елипсе и хиперболе брзина v и убрзање p за тачку m, сразмерни просто спрегнутим полупречницима исте тачке. И овде код овог проблема постоји исто то, само што су v и p овде сразмерни деловима спрегнутих пречника тачке m.

III. Ми смо дакле досадањим посматрањима датог нам кретања, дознали брзину тачке n или што исто значи, убрзање тачке m. У слици 2. таб. I преставља нам $\overline{cn}$ величину, правац и смисао убрзања p за тачку m; даље знамо исто тако и брзину v за исту тачку m, а та је радијус вектор одговарајуће тачке n, дакле је $\overline{cn} = v$, па можемо сада прећи на одређивање полупречника и средишта кривине за тачку m. Ово ћемо постићи путем построја, овако:

Из динамике, или наизад и из форономије, познато је, да је нормално убрзање p_n, неке трајекторијине тачке (m) дато у овој једначини:

$$p_n = \frac{v^2}{\varrho}$$

гди је ϱ полупречник кривине трајекторије а на том месту. Отуда добијамо да је:

$$v^2 = p_n . \varrho ,$$

дакле је v средња геометријска сразмера између нормалног убрзања p_n и полупречника кривине ϱ. Нама је познато p_n (јер је познато p и нормала на тачки m) и v, па ћемо лако наћи још непознато ϱ, а ово опет овако:

Ваља на тачку m пренети паралелно ходографа зрак или полупречник $\overline{cn}$ дакле начинити $\overline{mn_1} = \overline{cn}$, затим, повући на тачку m нормалу mN, даље пренети на исту тачку резултирајуће убрзање p и ту начинити $p = \overline{mn'} = \overline{cn}$, ово убрзање треба пројицирати на нормалу mN, па је онда та пројекција $mn'' = p_n$: дакле имамо и p_n. Сада нам ваља пренети p_n у истој нормали тачке m али на противну страну и начинити $mn''' = p_n$, затим треба саставити n''' са n_1, па онда на тој правој $n'''n_1$ а у тачки n_1 треба повући опет једну нормалу n_1N_1, гди се сада нормала ова, са оном нормалом тачке m пресекла буде, у тој је тачки и центар кривине места m, а то је у слици тачка o. Одстојање тачке m од тачке o, дакле $\overline{mo}$ то је равно траженом полупречнику ϱ. Ово пак сљедује просто отуда, што је:

$$\overline{mn_1}^2 = \overline{mn'''} . \overline{mo}, \text{ дакле је}$$

$$\overline{mo} = \varrho = \frac{v^2}{p_n} .$$

Као што се види, овде је стало за тим, да осим нормале mN, добијемо још једну пругу nN_1. а ову ћемо moћи још и овако добити. На тангенту тачке m треба пренети паралелно самом себи пречник $\overline{ncn'}$ и то тако да тачка c падне на тачку m, дакле дуж полупречника cm, на тај начин добићемо на реченој тангенти две тачке n_1 и n_2 за које је $mn_1 = mn_2 = v$. Саставимо сада тачку n_2 са n'', па ћемо имати праву $n_2 N_2 \,||\, n_1 n'''$. Дакле место што смо повлачили нормалу на $n_1 n'''$, добићемо истоветну нормалу, ако таку повучемо на праву $n_2 N_2$, дакле је ту $n_1 N_1 \perp n_2 N_2$, где се сада нормала $n_1 N_1$ сече са нормалом mN, а то је у o, то ће бити центар кривине, места m. Ми ћемо се у даљим примерима служити овом последњом методом, јер нам она даје решење непосредно.

Из овога другог построја добијамо још једно правило за построј полупречника и средишта кривине, за трајекторијину тачку m:

Ваља на тачку m пренети паралелно а дуж пречника исте тачке, одговарајући пречник $(\overline{n\,n'})$ ходографа (тај ће пасти онда као што знамо у тангенту тачке m). Тиме се на тангенти тачке m добијају две тачке n_1 и n_2; затим треба пренети од тачке m а у њеном пречнику одговарајући полупречник $\overline{cn}$ (а то је комад $\overline{mn'}$) који је првом по правцу спрегнут. Даље ваља повући на тачку

m нормалу mN и на исту пројицирати нормално тачку n' чиме се добија у нармали друга тачка n''. Ову тачку треба сада спојити или са тачком n_2 или са n_1, па онда треба или из тачке n_1 или из тачке n_2 поставити нормалу на ту спојну пругу н. пр. на $n_2 N_2$ из тачке n_1. Гди се та нормала — (дакле $n_1 N_1$) буде пресекла са пармалом mN тачке m, у тој ће тачки лежати центар кривине за тачку m, а полупречник кривине, раван је одстојању те централне тачке од m.

Ово су дакле односи, који постоје између одговарајући зракова, једнога и другог ходографа, а за тачку m и полупречника кривине те тачке.

Ово што је досада развијено, а односно тангената и полупречника кривине, изгледало би као непрактично за конструјисање, али опет зато долазе таки случаји у графодинамици, зато ово опште посматрање има свога потпуног значаја, и тек ће нам оно моћи да објасни ово што сљедује, а као много простије.

IV. Мени је овде главни задатак бијо, да одредим геометријским путем тангенту и полупречник кривине, за неку тачку коничких влакова и да том приликом покажем просту конструкцију тих количина, која ће у колико је мени ова ствар, о полагању тангената и изналажају кривних полупречника позната, бити за параболу сасвим нова у геометрији. У сљедећем упознаћемо се са односем, који постоји између спрегнутих полупречника неке елиптичке тачке и полупречника кривине елипсе на том месту. Ми ћемо сада у следећем, а опет елиптичком кретању тачке m, добити за одредбу полупреника кривине те тачке, врло просте односе, чим само досадање елиптичко кретање у нешто модификујемо. Простота досадање проблема а и овога што сљедује, зависиће од избора броја $\varkappa$. Узмимо дакле, па у досадањем елиптичком кретању ставимо нека је $\varkappa = 1$; за тај случај онда имаћемо да је меканичка природа трајекторије ова:

$$x = a \sin t$$

и

$$y = b \cos t$$

Трајекторија у овом случају биће она иста елипса, коју смо добили у једначини (3) тачке I. јер она, као што смо тамо видели, независи од броја $\varkappa$. Напротив, једначине (4) и (5) прелазе у ове:

$$v_x = a \cos t \quad \ldots\ldots \quad (4'$$

и

$$v_y = b \sin t \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5'.$$

Што се тиче ходографа овога проблема, тај је по једначини (6) овога геометријског облика:

$$\frac{{v_x}^2}{a^2} + \frac{{v_y}^2}{b^2} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6'$$

дакле опет елипса, и то је ова сада конгрујентна са самом трајекткријом. Овде смо дакле већ добили за ходограф и трајекторију не различите, но на против истоветне криве пруге, дакле много простије но у пређашњем општем проблему.

Даље, исто тако и криве пруге брзина, т. ј. $v_x = \varphi(y)$ и $v_y = \psi(x)$, оне су сада по једначинама (7) и (8) дате у овим изразима:

$$\frac{v_x}{y} = \frac{a}{b} \quad \ldots\ldots \quad (7'$$

$$\frac{v_y}{x} = -\frac{b}{a} \quad \ldots\ldots \quad (8'$$

а то су једначине дијагонала $\alpha\alpha'$ и $\beta\beta'$ око трајекторије $BAB'A'$ слика 3 таб. II описаног четвороугољка $\alpha\beta\alpha'\beta'$, кога стране иду паралелно са главним осовинама те елипсе. Овде смо дакле докучили одма ево то, каку улогу играју речене дијагонале у форономији, а ми ћемо им у даљим посматрањима дати просто геометријски значај и необзирући се на њихову форономијску природу или њихов фирономијски значај.

Осим овога је даље p_x и p_y по једначинама (9) и (10) а за овај проблем, дато у овим једначинама:

$$p_x = - a \sin t \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (9'$$

и

$$p_y = - b \cos t \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (10'$$

По овоме дакле компонирајућа убрзања расте исто онако као и координате тачке m. Већ само због овога односа, мора да резултирајуће убрзање тачке m $\left(p = \sqrt{p_x^{\,2} + p_y^{\,2}}\right)$, пролази свакада кроз елипсин центар c, или што исто значи. p дејствује у радијусу вектору тачке m, а управљено је к центру c, гди је и пол тога вектора.

Најзад што се тиче геометријске природе ходографа другог реда, тај је по једначини (11) дат у изразу:

$$\frac{p_x^{\,2}}{a^2} + \frac{p_y^{\,2}}{b^2} = 1 \;.\;.\;.\;.\; (11'$$

дакле то је опет елипса и то конгрујетна са трајекторијом; а по ономе што смо мало час рекли о резултирајућем убрзању, резултирајуће убрзање p тачке m, биће сада у овом проблему по правцу, месту, величини а тако исто и смислу, равно оном зраку у трајекторији, који тачку m са средиштем c састравља.

Ми смо дакле добили трајекторију, ходограф првога и другога реда све у једној и истој кривој прузи —

елипси — а брзне праве, оне су дијагонале четвороугољка који темена елипсе додирује, па је сада врло природно, како ће и одређивање тангената и полупречника кривине за неку елипсину тачку m, испасти млого простије но у прећашњем општем проблему. У следећем прећи ћемо дакле на построј дирке и полупречника кривине за елипсину тачку m, а све ћемо ово чинити опет по оним општим принципима општег проблема.

У слици 3. таб. II. $BAB'A'$ је елиптичка трајекторија, дијагонала $\beta\beta'$ то је брзна права $v_\nu = \psi(x)$, Хамилтонов је ходограф иста елипса, само што је тачки B одговарајућа тачка у ходографу тачка A или тачки B трајекторије одговарајући је зрак у ходографу $\overline{cA}$, дакле ако m почиње своје кретање у B, онда ходографска тачка n почиње њено кретање у A. Напротив тачка $\mathfrak{n}$ ходографа другог реда — што је опет иста елипса — почиње своје кретање од тачке B', а у опште речено, зраци тачака n и $\mathfrak{n}$ то су увек спрегнути пречници одговарајуће трајекторијине тачке m, пошто тачка m са $\mathfrak{n}$ лежи увек у истој правој, која и кроз центар c пролази. Кад знамо и то, онда ћемо прећи прво к построју тангенте за неку трајекторијину тачку m. Ово се постизава по овом правилу, а са поставком, да се користимо дијагоналом $\beta\beta'$.

Треба пројицирати тачку m на дијагоналу $\beta\beta'$ и то паралелно са једном од главних осовина, н. пр. са BB', ту пројекцију ν, ваља поново пројицирати на елипсу, а паралелно са другом главном осовином — овде је та пројекција тачка n — кад саставимо центар елипсе са том последњом пројекцијом, онда је тај зрак спрегнути полупречник тачке m. Дирка на тачки m то је $\overline{tt'} \parallel \overline{nn'}$. Овим смо путем нашли за тачку m спрегнуте пречнике $\overline{mm'}$ и $\overline{nn'}$.

Пошто смо одредили правило за полагање тангенте на елипсу, прећи ћемо сада на одређивања средишта и полупречника кривине за елипсину тачку m. Ми знамо да је графодинамички значај зрака $\overline{cn}=v$, даље је $mc=p$, зато ћемо за построј средишта и полупречника кривине тачке m, поставити ово правило:

Пошто су нађени за тачку m спрегнути пречници, $\overline{mm'}$ и $\overline{nn'}$, ваља на тангенту тачке m пројицирати крајње тачке n и n' спрегнутог пречника (nn') и то паралелно првом пречнику (mm'), тим се добијају на тангенти две тачке n_1 и n_2. Затим ваља на тачку m постројити пормалу mN, ова ће нормала сећи пречник паралелан са тангентом у тачки m_1; ту тачку треба спојити са једном од пројекција n_2 или n_1, (овде н. пр. са n_2) и повући праву $n_2m_1N_2$, затим ваља из оне друге пројекције n_1 постројити нормалу n_1N_1 на правој n_2N_2, па где се прва и последња нормала секу — дакле mN и n_1N_1 — а то је овде у тачки o, ту је центар кривине елипсе на месту m; а одстајање те тачке од тачке m $(\overline{om})$ јесте полупречник кривние.

Видимо дакле да је построј полупречника и средишта кривине, чисто геометријске природе, једино је доказ томе изведен динамичким путем. Дакле ту смо имали прилике да видимо какву важну улогу играју спрегнути пречници елипсе, као и то, да је, како полагање тангенте на тачку m, тако исто и построј полупречника кривине те тачке, извршено све без помоћи круга.

Центар кривине тачке B', лежи у пресеку осовине BB' са нормалом на дијагонали $\beta\beta'$, а то је у тачки q_1, и т. д. лако је наћи центар кривине и за остале карактеристичне тачке елипсе, тако је p_1 центар кривине за тачку A'.

Гдигод је дакле могуће постројити за неку трајекторију: ма коју од брзних криви пруга, ходограф првога и другог реда, моћићемо постројити врло лако дирку и полупречник кривине за произвољну тачку трајекторије.

О построју тангенте на елипсину тачку m може се још једна метода извести, и то помоћу обеју брзних пруга $v_x = \varphi(y)$ и $v_y = \psi(x)$, дакле сретством главних дијагонала $\beta\beta^1$ и $\alpha\alpha^1$ слика 4, таб. II које нам престављају те брзне праве. У тој цељиваља да нађемо компонирајуће брзине тачке m; а ове ћемо наћи овако: ваља повући кроз дату тачку m једну паралелну са главном осовином BB^1 или са Y осовином (сл. 4) и другу паралелну са AA^1 или X осовином. Прва паралела одређује $v_y = \mu\nu$, а то је одсечак на истој измеђ осовине X и дијагонале $\beta\beta^1$; друга паралела осређује $v_x = w v$, а то је одсечак на истој измеђ осовине Y и дијагонале $\alpha\alpha^1$. Ове нађене одсечке ваља пренети, њима самима паралелно на тачку m и из њих постројити правоугољак $m\omega'\tau\nu'$. Дијагонала тог правоугољка, и то она која кроз m пролази то је у исто доба и дирка на тачки m. Ово је истина подобна, но опет зато различна метода полагања тангенте на елипсу, од познате Робервалове методе; јер овде имамо управо геометријски став, пошто смо употребили одсечке, а необзирући се на њихово фороиомијско значење.

Отуда добијамо за построј тангенте на елипсу ово геометријско правило:

Треба кроз дату елипсину тачку m повући нормале на њене главне осе, па одсечке што добијамо у тим нормалама, а лежеће између главних оса и одговарајућих главних дијагонала, — а то је $\mu\nu$ и ωv — ваља пренети паралелно на тачку m, из тих комада ваља постројити правоугољак, кога су исти комади стране.

дијагонала тог правоугоњка, а из тачке m излазећа, то је дирка на датој тачки m.

Најзад из фороцомијског гледишта, а на познато елиптичко кретање, добијамо још један метод за построј спрегнутог пречника тачке m; а то је овај: повуцимо кроз дату тачку m нормалу на главну осу н. пр. на AA' (слика 3) и нађимо њој симетричку тачку ω а према истој оси, даље повуцимо сада кроз ту тачку ω параделе према обема осама и продужимо их до пресека њиховог са дијагоналом $\beta\beta^1$ слика 3, тим се добијају у тој дијагонали две тачке ν и ν' или комади $\omega\nu$ и $\omega\nu'$; постројмо најзад из тих комада правоугоњак $\omega\nu n\nu^1$, онда је истога правоугоњка тачки ω противположени ћошак n, конјунгирата тачка тачки m; дакле је cn спрегнути полупречник тачке m, коме је дирка у m паралелна. Другу конјунгирату тачку n', добили би да смо тачки m тражили симетричку тачку према BB^1 осовини. Да се праве $n\nu^1$ и $\omega\nu^1$ доиста секу у дијагонали $\beta\beta$, доказује се фороносмиски тиме, што ω и m имају истоветне брзине.

V. Како се свакад из елипсине једначине даје извести једначина хиперболе, и то на тај начин, кад у централној једначини елипсе, квадрат једне од оса узмемо негативно, која ће нам бити онда имажинерна оса хиперболе, то ће се онда и сви други построји, који важе за елипсу, моћи са неким малим изменама пренети на хиперболу.

Тако асимптоте хиперболе, биће нам брзне праве, дакле оно ће исто да значе, што и главне дијагонале код елипсе. Но што се тиче ходографа првога реда, тај је код хиперболе њена конјунгирата хипербола, док напротив ходограф другога реда, тај пада уједно са оргиналом или датом хиперболом. Кад то знамо, онда је лако да постројимо тангенту, полупречник и центар кривине за неку хиперболину тачку. Који буде дубље у ову читаву ствар загледао, моћиће видети да се код хинерболе обе брзне праве, могу преставити само јасном макијом од осимптота н. пр. са CM (слика 5, табл. III) дакле се у истој поклапају обе те праве. Али опет је зато овде за исту праву:

$$v_x = \frac{a}{b}\, y \quad \text{и} \quad v_y = \frac{a}{b}\, x$$

где се сачиниоцима $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{a}$ осређује нагиб тих двеју а у једно склопљених прави CM према Y и X осовини.

Једначина дате хиперколе нека је:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

дакле ту је AA^1 стварна, а BB^1 имажинерна оса.

Ми ћемо сада моћи наћи и једначину ходрографа првога реда, ако једначине за брзне праве, прво квадрирамо, дакле биће:

$$v_x^{\,2} = a^2.\ \frac{y^2}{b^2}$$

и

$$v_y^{\,2} = b^2.\ \frac{x^2}{a^2}$$

друго, поделимо сада прву једначину са a^2 и другу са b^2 и одузмимо горњу од доње, па ћемо добити:

$$\frac{v_y^{\,2}}{b^2} - \frac{v_x^{\,2}}{a^2} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b} = 1$$

дакле је је једначина ходографа:

$$\frac{v_y^{\,2}}{b^2} - \frac{v_x^{\,2}}{a^2} = 1,$$

а то је првој хиперболи конјунгирата хипербола, за коју је AA^1 имажинерна а BB^1 стварна оса. Ми ћемо спрегнути пречник тачке m (слика 5) одредити по принципу четвороугољка $m\nu'n\nu'$, где је тачка n тачки m конјунгирата, дакле cn спрегнути полупречник тачке m; тачка је n у исто доба и тачка конјунгирате хиперболе. Тангента на тачки m паралелна је правој cn.

Дакле, принцип спрегнутих пречника а у цељи одређивања полупречника и центра кривине, моћи ћнмо употребити и код хиперболе, али само са том јединим разликом, што ћемо у построју, полупречник хиперболине тачке или њен вектор од тачке c рачунајући пренети на исту тачку у истој правој а у противном смислу, па да добијемо центар кривине на његовом правом месту.

Дакле построј центра и полупречника кривине, за хиперболину тачку m бива овако:

Кроз m повућемо паралеле са AA^1 и BB^1, које ће сећи асинптату CM у тачкама ν и ν', из комада $m\nu$ и $m\nu'$ узимајући их за стране четвороугољка; ваља постројити чотвороугољак $m\nu n\nu'$, тачки m противположени ћошак n, то је конјунгирата тачка тачки m, дакле је cn спрегнути полупречник, или nn^1 спрегнути пречник исте тачке, кад начинимо да је $cn^1 = cn$, том пречнику повучена паралела кроз тачку m биће дирка те тачке, а одсеци дирке што леже измеђ двеју асимптота то је у исто доба и равно спрегнутом пречнику или је $mn_1 \# cn$ и $mn_2 \# cn^1$. Овде код хиперболе имамо дакле на тачку m пренешени спрегнути пречник тачке m. Даље ваља на тачку m повући нормалу mN, затим треба у правој cm пренети одстајање cm или полупречник тачке m на противну страну од исте, чим се добија нова тачка m^1 за коју је $mm^1 = cm$. Даље ваља полупречник mm^1 или тачку m^1 пројицирати нормално на нормалу mN, чиме се добија тачка m_1 (дакле је mm_1 пројекција полупречника mm'), сада имамо све што је нужно за построј центра и полупречника кривине за тачку m. Најзад треба једну од тачака n_1 или n_2, н. пр. тачку n_1 спојити са тачком m_1, дакле ћемо добити праву n_1N_1, на ову праву ваља повући иза оне друге тачке n_2 нормалу n_2N_1; па, гди се ова нормала пресече са нормалом дате тачке m, а то је овде у тачки O, та је тачка центар кривине, а om то је полупречник кривине дате тачке m.

Овде смо сада и то видели, да нам за построј спрегнутог пречника тачке m, није била нужна и она друга грана хиперболина а још мање употреба круга, но смо просто оперисали са самом тачком m и њој најближе лежећом осимптотом.

Најзад вредно је и овде напоменути, да се тангента на тачку m даје постројити још и сретством правоугољка, кога су стране а у тачки m под правим углом стичуће се v_x и v_y. Из таких страна постојени правоугољак, даће нам у својој дијагонали која кроз тачку m пролази у исто доба и дирку на тој тачки, а величина те дијагонале равна је спрегнутом полупречнику исте тачке. Стране те $v_x = \mu^1\nu^1$ и $v_y = \mu\nu$, равне су одсечцима кроз тачку m повучених паралела према AA^1 и BB^1 осовини а који леже између тих осовина и асимптоте cM.

Дакле ово је онако исто као и код елипсе. Осим тога дознали смо у исто доба још и интересантан однос ћошкова m и ν, познатог нам четвороугољка $m\nu n\nu'$, па је по томе н. пр. тачки r конјунгирата тачке s, дакле дирка на тачку r ишла би паралелно зраку cs, што би био наравно и спрегнути полупречник те тачке r. Најзад овде добијамо тиме једну методу, по којој ћемо моћи постројити, некој хиперболи њену конјунгирату, пошто знамо да су B, n и s тачке таке хиперболе.

VI. Још нам остаје сада да постројимо без употребе круга: дирку, центар и полупречник кривине за неку параболину тачку.

Узмимо дакле да имамо већ нацртану параболу $M_1\,cM$ сл. 6, табл. III па да за њену будикоју тачку m постројимо дирку, центар и полупречник кривине. Ове параболе нека је главна оса cX, а на темену c дирка cY. Парабола је као што знамо трајекторија које је једначина:

$$y = ct \text{ и } x = p\,\frac{t^2}{2},$$

где је p неко непромењиво убрзање, а које дејствује у правцу cX осовине, даље је ту c стална брзине што дејствује на покретну тачку m у прапцу cY осовине; најзад x и y то су тачке m опште каординате а t то је време и прапромењива количина. Ту је дакле $v_x = pt$ а $v_y = c = const.$ Ако ми сада означимо произвољну дужину $cB = c$, онда је Хамилтонов хидограф ове трајектарије, кроз B повучена права, а паралелна са cX осовином, а то је у слици cH. Ваља нам још да одредимо брзну криву н. пр. $v_x = \varphi(y)$, а то бива овако. За $t = 1''$ одговарајуће је $y = c = cB$ и $x = \frac{p}{2}$ дакле је убрзање $p = 2x = 2\,\overline{Bm_1} = \overline{Bb}$; али како је $v_x = pt$, то је за $t = 1''$ и $v_x = p$, што значи да је тачка b тачка, која припада брзној прузи $v_x = \varphi(y)$, а пошто је још по једначинама $v_x = pt$ и $y = ct$ једначина $v_x = \varphi(y)$ овога вида: $v_x = \frac{p}{c}\,y$, то је и брзна пруга прво права, која кроз c прелази а друго и кроз тачку b дакле је та права у слици означена са cbz. Ми смо овде узели тачку B сасвим произвољно, и према тој тачки или према $cB = c$ добили смо и одговарајуће $Bb = cb^1 = p$, а то значи, кад би на тачку c дејствовала стална брзина

$c = cB$ у правцу Y осовине, а у исто доба још у правцу X осовине и стално убрзање $p = cb'$, онда би се тачка c кретала по већ нацртаној или прописаној параболи. Отуд је сада врло увиђавно и то, да је cz само за таке односе c и p брзна права, као и BH одговарајући ходограф, а напротив, чим би B узели на другом месту, а опет у Y осовини, ми би онда наравно добили одма и друго p, дакле другу брзну праву а и други ходограф, ми можемо B бирати како нам је најугодније, према чему ће се cz и BH мењати.

Да смо узели н. пр. за тачку m' која је тачки m а преми Y осовини симетрички положена, да ходограф кроз њу пролази, дакле да је μ' вертикално над m' оно исто, што и B над m_1, онда би ходограф био $\mu'z'$ а брзна права би пролазила кроз тачку n' за коју је $\mu'\nu' = 2\mu'm'$, а ова би била cz'. Даље тачки m' одговарајућа брзина била би cn', па са тога би и тангента на m' ишла паралелно самој брзној правој cz'. У оваком би случају на тачку c, морале да дејствују у исто доба: у правцу $-cY$ осовине брзина $c\mu' = c'$ и стално убрзане $p_1 = \overline{\mu'n'}$ у правцу cX осовине, па да опише параболу $cm'M_1$; најзад за тачку m' било би $v_x = \overline{\mu'\nu'}$.

Међутим за даље построје биће уопште млого практичније, да за cB узмемо неку средњу или омању вредност, дакле и ходограф да је ближи к cX оси, како би за конструјисање добили мање операцијоне линије; дакле бирање правих cz и BH оставља се конструктеру на вољу.

Ми ћемо сада за одређивање правила, по коме ћемо на параболину тачку m постројити тангенту, центар и полупречник кривине, узети да је у овом проблему BH ходограф а cz одговарајућа брзна права. Кад повучемо кроз дату тачку m паралелну са параболином главном осом cX, онда је одсечак на тој паралели а између осовине cY и праве cz, као што знамо, тачки m одговарајуће v_x, дакле је ту одсецак $\mu\nu = v_x$. На тај начин добили смо у правој cz тачку ν.

Кад ту тачку прајицирамо на ходограф паралелно према cY, добићемо као пројекцију те тачке, на ходографу тачку n, а ова тачка одговара једновременој тачки m на трајекторији. Дакле кад саставимо тачку n са c, онда је комад cn, апсолутна брзина (v) тачке m на трајекторији, и кроз m повучена права а паралелна са cn, биће тангента на параболиној тачки m, што је на слици 6 таб. III. престављено са tt. Центар и полупречник кривине за параболину тачку одређује се овако:

Пренесимо на тачку m, а у тангенти tt^1 одстојање $cn = v$ са једне и друге стране од исте тачке, дакле начинимо $mn_1 = mn_2 = cn = v$, даље преместимо на исту параболину тачку комад $Bb = p$ паралелно и у смислу главне осе cX, одкуда добијамо на тачки m комад $mp = Bb$ и пројицирајмо сада исти комад mp нормално на нормалу mN те тачке m, онда ће пројекција тачке p у тој нормали пасти у P, па са тога је $mP = p_n$, нормално убрзање исте тачке m. Најзад саставимо тачку P, са једном од тачака n_1 или n_2, н. пр. са n_2, дакле повуцимо праву n_2PN_2, затим повуцимо из оне друге тачке n_1 на правој n_2PN_2 нормалу n_1N_1, где се сада иста нормала n_1N_1 пресекла буде са нормалом тачке m, дакле са mN што бива у тачки o, та је тачка сада центар кривине тачке m, а одстојање mo равно је полупречнику кривине исте тачке m.

Сматрана ова конструкција са географијске стране, видимо да при построју дирке, центра и полупречника кривине параболине тачке m, играју главну улогу две особене праве пруге BH и cz, а ово добијамо геометријски овако. У теменој тангенти параболе ваља узети произвољно неку тачку B и кроз исту повући, са параболином осом паралелу BH, па је иста једна од правих, која ће нам служити за малочасречене построје. Даље тој добивеној паралели (BH), ваља пренети од тачке B а у смислу параболине осовине, комад Bm^1 лежећи између темене тангенте и палаболе на противну страну параболине тачке m^1, дакле начинити $Bm^1 = m^1b$; та добивена тачка b спојена са параболиним теменом c, даће нам другу помоћну праву cbz и сада се помоћу тих правих одређује: тангента центар и полупречник кривине, за произвољну параболину тачку m овако:

1) Ваља кроз дату тачку m повући паралелу са главном осовином, која ће сећи праву cz у тачки ν, ту тачку треба пројицирати нормално према главној оси, на паралелу BH, па се добија у истој тачка n (као пројекција тачке ν). Ова тачка са параболиним теменом c састављена, даје праву cn, која са тантептом тачке m иде паралелно. Дакле кроз тачку m повучена права $tt' \parallel cn$ биће тангента параболе на тој тачки.

2) Комад cn треба пренети на тангенту тачке m, са обе стране од m; тиме се на тангенти добијају две тачке n_1 и n_2 (гди је $mn_1 = mn_2 = cn$). Затим треба пренети сталну катету Bb на исту тачку m и начинити $mp \# Bb$. Даље, ваља повући на m њену нормалу (mN), па на исту нормално пројицирати тачку p, чија је пројекција на реченој нормали тачка P. Ову пројекцију P, ваља саставити или са тачком n_2 или са n_1, па онда из оне друге тачке, — дакле или из n_1 или у другол случају из n_2 — треба повући на ту последњу праву нову нормалу. Најзад, гди се буде та последња нормала пресекла са прâвом нормалом тачке m, у тој ће тачки онда лежати центар кривине тачке m; а одстојање те пресечне тачке од m, то ће бити полупречник кривине за параболу, а у месту m.

Центар и полупречник кривине за тачку m^1, који са m има исту абсцису, повучена је помоћна паралела кроз саму ту тачку, а cz' то је друга помоћна. У слици се види како је нађен центар o' и полупречник кривине ($o'm'$). Исто је тако са помоћним правима BH и cz, постројен центар и полупречник кривине за параболино теме c, што се из слике јасно види.

Код овог је проблема брзна крива $v_y = \psi(x)$, склопила се са ходографом у једно, а пошто је cz друга така и то $v_x = \varphi(y)$, то можемо постројити тангенту на тачку m подобно као оно код елипсе, сретством дијагонале правоуголька, кога су стране $\mu\nu$ и cB. Дакле кад пренесемо на тачку m паралелно одстојање $\mu\nu$ и cB, рачунећи иста по смислу од μ па на ν, и од c па на B, па онда кад постројимо из њих правоугољак (по принципу паралелограма брзина), онда ће дијагонала тог правоугољка која кроз m пролази, бити дирка на тој тачки m.

Држим да сам темат, о полагању тангената и построј центра и полупречника кривине, за тачке коничних влакова са кинематичке стране, довољно исцрпијо. Другом ћу приликом продужити форономијска испитивања других криви пруга, а у цељи одређивања неких њихових геометријских односа, а на првом ће месту доћи, графијско решавање једначина: $tang\,\alpha = 2\alpha$ и $tang\,\varphi = \varphi$, које једначине долазе код извесног рода принуђеног кретања, или кретања по прописаној путањи.

20 Јануара 1877 год.
у Београду.

Љуб. Клерић
ПРОФЕСОР МЕКАНИКЕ НА ВЕЛ. ШКОЛИ

ГЛАСНИК

СРПСКОГ УЧЕНОГ ДРУШТВА

КЊИГА XLVIII

СА ШЕСТ ЦРТЕЖА ТОПОГРАФСКИХ И ЧЕТИРИ ЛИСТА ЦРТЕЖА ГЕОМЕТРИЈСКИХ

У БЕОГРАДУ

ШТАМПАНО У ДРЖАВНОЈ ШТАМПАРИЈИ

1880

Шта има у овој књизи

и где је што

СТРАНА

1, Српске области X и XII века, од Стојана Новаковића . . . 1
2, Грађа за новију историју Србије, од Јована Мишковића . . 152
3, Неколико хронолошких питања из српске историје, од Ивана Павловића 221
4, Соко-Бања, први метеорит у Србији, од дра Ј. Панчића . . 241
5, Анализе минералних вода у Србији, од С. М. Лозанића . . 273
6, Како дејствује калијум хидрат на тетранитро-дифенил-карбамид, од С. М. Лозанића 290
7, Дејство азотне киселине на дихлор. дифенил-гуанидин и сулфоуре, од С. М. Лозанића 296
8, Примена кинетике на геометрију, од Љубомира Клерића . . 299
9, Како се графичким путем одређује услов равнотеже између сила молекиларних и динамичких, од Љ. Клерића 332
10, Како се геометријски постројава »Ламезанова површина«, од Љ. Клерића 352
11, О православним српским старим и новим црквама у скадарском округу, од И. Јастребова 358
12, Јепископија зетска, од И. Јастребова 390
13, Садржај фермана католичком свештенству према митрополиту херцеговачком и босанском, од И. Јстребова 405
14, О имену Црне Горе, од И. Јастребова 419
15, Реферат арх. Н. Дучића 427
16, Извештај друштвених изасланика за снимање живописних и архитектонских старина српских 449

КИНЕТИЧКИ ПРОБЛЕМИ

ПРИМЕНА КИНЕТИКЕ НА ГЕОМЕТРИЈУ

ОД

ЉУБОМИРА КЛЕРИЋА.

I.

Ја сам у Гласнику XLV. 1877. год. показао, каку примену има Хамилтонов ходораф, на коничне влаке и како се простим доказима и то једино речма исказује закон, по ком се може повући тангента на тачку коничког влака а у исто доба како се постројава полупречник кривине за таку тачку. У овој расправи проширићу овај проблем и даље, па ћу извести правила како се одређује ходограф за кретања, која су дата у меканичком облику но у полним координатама. У колико ми је литература о ходографу позната, нисам још нашао да се икоји занимао тиме, да одређује ходограф кретања а и брзне влаке за кретања, кад су иста дата у полним координатама, које су преставлене као функција времена, а ово узето као произвољно променљива количина. Зато сматрам овај темат као нов метод посматрања кретања уопште; а овако посматрање може да нам у извесним приликама открије и неке нове влаке а тако исто и нове особине познатих влакова, о чему ћемо се на свом месту уверити.

Пре но што ћу прећи на главни темат, ја ћу овде да изведем укратко оне једначине које ће нам у нашој студији требати.

У извесним приликама може наступити случај, да нам је једначина кретања, а у меканичком облику, дата сретством полних координата, н. пр. може да је дато:

$$r = f(t) \text{ и } \varphi = f_1(t) \ldots . (I$$

где је r потег покретне тачке, а φ угао који потег са неком сталном правом (полном осом) заклапа. Кад би из тих двеју једначина избацили време t, које је произвољно променљива количина, добили би оваку једначину:

$$r = F(\varphi) \ldots . (II$$

која нам представља геометријску природу трајекторије а у полним координатама.

Испитајмо сада односе кретања кад је дато:

$$r = f(t) \text{ и } \varphi = f_1(t).$$

У тој цељи узимамо да су н. пр. у покретној тачки M трајекторије AMN слика A види таб. познате компонирајуће брзине:

$$v_x = \frac{dx}{dt} \text{ и } v_y = \frac{dy}{dt},$$

и то за правоугаони координатан систем ког је почетак у тачки C, дакле v_x паралелно је CX оси, а v_y паралелно CY оси; осим овога нека су за тачку M а за поменуте осе CX и CY ове координате:

$$x = r \cos. \varphi \text{ и } y = r \sin. \varphi$$

Пошто сада у овим изразима место r и φ ставимо равне вредности из једначине $(I$, добићемо x и y као функције времена, дакле ће на тај начин и трајекторија бити позната њеним ортогоналним координатама а опет у меканичком облику, што нам је нужно како би могли до наше цељи доћи, а то до једначина, којима се најугодније испитују сва тако звана централна кретања.

Даље разложимо сада v_x и v_y свако за се у две друге компоненте, од којих једне нека буду у самом потегу, а друге у нормали на исти а у тачки M. У таком случају, као што је то из слике A увиђавно, добијамо

$$v_r = v_x \; cos.\, \varphi + v_y \; sin.\, \varphi \; .\;.\;.\;. \; (\alpha$$

и

$$v_\nu = - \, v_x \, sin.\, \varphi + v_y \, cos.\, \varphi \; .\;.\;. \; (\beta$$

ту су нам v_r и v_ν резултирајуће брзине тачке M у правцу потега исте и у нормали на потегу а кроз тачку M. Замењујући сада у овим последњим двема једначинама место v_x и v_y вредности изражене полним координатама, добићемо v_r и v_ν као функције таквих координата, а ово нам је због тога нужно, јер је кретање дато таким координатама.Ваља дакле да се довијемо како ћемо v_x и v_y изразити као функције полних координата. Ово пак постићемо на овај начин.

Ми знамо како је $v_x = \dfrac{dx}{dt}$ и $v_y = \dfrac{dy}{dt}$, али како је $x = r \, cos.\, \varphi$ и $y = r \, sin.\, \varphi$, а по једначини *(I)* знамо још и то да су r и φ функције времена t као произвољно промењливе количине, то су r и φ зависно промењливе количине и ми можемо по томе писати да је:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = - \, r \, sin.\, \varphi \, \frac{d\varphi}{dt} + cos.\, \varphi \, \frac{dr}{dt} \; .\;.\;.\;. \; (\gamma$$

и

$$v_y = \frac{dy}{dt} = r \, cos.\, \varphi \, \frac{d\varphi}{dt} + sin.\, \varphi \, \frac{dr}{dt} \; .\;.\;.\;. \; (\delta.$$

Заменом ових вредности у изразима (α) и (β) добиһемо ово што иде, а то је прво:

$$v_r = -r\,sin.\,\varphi\,cos.\,\varphi\,\frac{d\varphi}{dt} + cos.^2\,\varphi\,\frac{dr}{dt}$$

$$+ r\,sin.\,\varphi\,cos.\,\varphi\,\frac{d\varphi}{dt} + sin.^2\varphi\,\frac{dr}{dt}$$

$$= sin.^2\,\varphi\,\frac{dr}{dt} + cos.^2\varphi\,\frac{dr}{dt}$$

одкуда је најзад

$$v_r = \frac{dr}{dt}\;\ldots\ldots(\varepsilon$$

исто је тако и друго:

$$v_\nu = -\left(-r\,sin.\,\varphi\,\frac{d\varphi}{dt} + cos.\,\varphi\,\frac{dr}{dt}\right) sin.\,\varphi$$

$$+ \left(r\,cos.\,\varphi\,\frac{d\varphi}{dt} + sin.\,\varphi\,\frac{dr}{dt}\right) cos.\,\varphi$$

$$= r\,sin.^2\,\varphi\,\frac{d\varphi}{dt} + r\,cos.^2\,\varphi\,\frac{d\varphi}{dt}$$

$$= r\,\frac{d\varphi}{dt}\left(sin.^2\,\varphi + cos.^2\,\varphi\right)$$

одкуд је најзад

$$v_\nu = r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)\ldots\ldots(\xi.$$

Израз $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)$ има још и особени значај и име, а то је угловна брзина, или лучна брзина у одстојању = јединица од тачке

C. Дакле је по томе нормална брзина на потег а у тачки M, равна угловној брзини помноженој са потегом тачке M.

На исти начин моћићемо одредити још и убрзања p_x и p_y од којих је прво паралелно CX оси, а друго паралелно CY оси, а да су преставлћена као функције полних координата покретне тачке M. У тој цељи ваља да се користимо једначинама:

$$p_x = \frac{dv_x}{dt} \text{ и } p_y = \frac{dv_y}{dt}$$

Ми сада немамо ништа друго да вршимо, по просто да једначине (γ) и (δ) диференцијалимо по времену t, јер су оне већ функције полних координата, па кад то учинимо добићемо прво:

$$\frac{dv_x}{dt} = -r \sin.\varphi\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right) - \sin.\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)\left(\frac{dr}{dt}\right)$$
$$- r\cos.\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$
$$- \sin.\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)\left(\frac{dr}{dt}\right) + \cos.\varphi\left(\frac{d^2 r}{dt^2}\right)$$

одкуда је по довољном свођењу:

$$\frac{dv_x}{dt} = p_x = \left\{ -r\sin.\varphi\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right) - r\cos.\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \right.$$
$$\left. - 2\sin.\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)\left(\frac{dr}{dt}\right) + \cos.\varphi\left(\frac{d^2 r}{dt^2}\right) \right\} \ldots\ldots (\eta$$

исто је тако и друго:

$$\frac{dv_y}{dt} = r\cos.\varphi\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right) - r\sin.\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$
$$+ \cos.\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)\left(\frac{dr}{dt}\right) + \cos.\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)\left(\frac{dr}{dt}\right) + \sin.\varphi\left(\frac{d^2 r}{dt^2}\right)$$

$$= r \cos.\varphi \left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right) - \sin.\varphi \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + 2 \cos.\varphi \left(\frac{d\varphi}{dt}\right) \frac{dr}{dt}$$

$$+ \sin.\varphi \left(\frac{d^2 r}{dt^2}\right)$$

дакле је:

$$\frac{dv_y}{dt} = p_y = \left\{ r \cos.\varphi \left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right) - r \sin.\varphi \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \right.$$

$$\left. + 2 \cos.\varphi \left(\frac{d\varphi}{dt}\right) \left(\frac{dr}{dt}\right) + \sin.\varphi \left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right) \right\} \ldots . (\vartheta$$

Најзад консеквентно брзинама, ваља да одредимо још и убрзања покретне тачке M и то у правцу потега и нормално на исти. У тој цељи разложимо p_x и p_y свако за се у такве компоненте које ће у реченим правцима лежати, и ако сада још резултирајуће убрзање у реченим правцима означимо редом са p_r и p_ν, ми ћемо добити како је:

$$p_r = p_x \cos.\varphi + p_y \sin.\varphi$$

и

$$p_\nu = p_x \cos.\varphi - p_y \sin.\varphi$$

што се врло просто оправдава сликом B. види таб. Замењујући у тим двема поменутим једначинама место p_x и p_y њихове равне вредности из једначина (η) и (ϑ), и кад то довољно сведемо, добићемо да је:

$$p_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \ldots . (\varkappa$$

и

$$p_\nu = r \frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right) \left(\frac{dr}{dt}\right) \ldots . (\lambda.$$

Ми смо дакле овим посматрањем кретања добили ове четири важне једначине:

$$v_r = \left(\frac{dr}{dt}\right) \dots . I$$

$$v_\nu = r \left(\frac{d\varphi}{dt}\right) \dots . II$$

$$p_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \dots . III$$

и

$$p_\nu = r \left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right) + 2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right) \left(\frac{dr}{dt}\right) \dots . IV$$

којима ћемо кадри бити да проучимо све што би се однело на кретање тачке по трајекторији које би динамичка природа била дата у полним координатама. Ми ћемо се користити у даљем само једначинама *I* и *II* и то у следећој цељи:

Кад је дата једначина трајекторије у динамичком — кинетичком — облику а у полним координатама, и онда може бити говора о ходографу кретања, који ће се у томе разликовати од ходографа ортогоналног система, што ће се његов зрак, који одговара тачки у трајекторији, морати окренути за онај угао φ, под којим је потег тачке трајекторије према полној осовини нагнут, те да добијемо зрак ходографа у његовом правом положају, ком је зраку паралелна тангента оне тачке у трајекторији, којој онај зрак одговара. Тешко је наћи овде ходограф у његовом правом положају код сваког кретања, али и ово је могуће као што ћемо то доцније да видимо.

Дате су једначине трајекторије у овом облику:

$$r = f(t) \text{ и } \varphi = f_1(t) \dots . (1$$

где је r потег тачке која се креће, а φ је полни угао или угао потега са полном осом, најзад t је време као произвољно промењлива количина.

Из ових једначина избацујући време t, наћи ћемо једначину, која нам исказује геометријску природу трајекторије, а ова је једначина:

$$r = f(\varphi) \ldots . (2$$

У цељи испитивања трајекторије са њене кинетичке стране, ваља да знамо брзину и убрзање, којим се тачка по њеној путањи (2 креће, а то се постизава одредбом компонената брзине и убрзања и то у правцу потега и нормално на исти. Ми ћемо у следећем само компоненте брзина да израчунавамо, пошто ћемо помоћу истих моћи дирке на тачку трајекторије повлачити.

Кад су нам дате једначине под (1 моћићемо врло лако да одредимо брзину покретне тачке и то прво њену компоненту, нормалну на потег, јер је ова;

$$v_\nu = r \left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = \psi(t) \ldots . (3$$

и друго, исто тако је друга кампонента у правцу потега ова:

$$v_r = \left(\frac{dr}{dt}\right) = \varphi(t) \ldots . (4$$

па је сада апсолутна брзина покретне тачке:

$$v = \sqrt{v_\nu^2 + v_r^2} = \sqrt{[\psi(t)]^2 + [\varphi(t)]^2}$$

Ми смо називали код ортогоналног координатног система, оне линије којих су промењливе координате x, v_y и y, v_x брзним влацима, јер се помоћу истих за дато x и y

даје одредити брзина v_x и v_y; исто ћемо тако и овде да назовемо влаке, који су дати у облику једначина:

$$[r, v_\nu] = O \quad и \quad [\varphi, v_r] = O$$

брзним влацима, пошто се и овима може за дато r и φ одредити компоненте v_ν и v_r.

Оваки влаци преставлљени су у слици 1. види таб. заједно са трајекторијом. Даље влак, који је дат у ортогоналном координатном систему, преставлљен једначином:

$$[v_x, v_y] = O$$

тди су v_x и v_y промењљиве координате истог влака, звали смо Хамилтонов ходограф; исто ћемо тако и у полном координатном систему звати ону линију ходографом, које је једначина дата у облику

$$[v_r, v_\nu] = O$$

тди су v_r и v_ν ортогоналне координате исте линије. Овом се једначином, као што је то врло увиђавно, не преставља ходограф у свом правом положају, но су му зраци увек за угао φ испод правог положаја, дакле по овоме може се одма и прави положај наћи, т. ј. онај положај зрака, коме ће тангента тачке у трајекторији ићи паралелно.

Кад је осим брзних влакова дата још и трајекторија онда се може наћи и за угао φ окренути ходограф; његов зрак $\overline{Am}$ (сл. 1), који одговара тачки M трајекторије, морамо за одговарајући угао φ око тачке A окренути, па да тај зрак дође у свој прави положај, коме је положају тангента повучена кроз тачку M паралелна; зрак $\overline{Am}$ раван је брзини тачке M на истоме месту. Што се тиче једначина: $[r, v_\nu] = O$ и $[\varphi, v_r] = O$ можемо их наћи кадгод је дата трајекторија једначинама облика *(1;* јер отуда добијамо рачуном једначине *(3* и *(4*.

Из једначине прве под *(1* и једнечуне *(4* избацујући време *(t)*, добијамо једначину:

$$[r,\ v_\nu] = O \ldots . (5$$

а из друге једначине под *(1* а и оне под *(3* избацујући време, добијамо једначину:

$$[\varphi,\ v_r] = O \ldots . (6$$

Од ових двеју последњих једначини, прва даје брзни влак у ортогоналним координатама, за координате r и v_ν узимајући полну осу за r осу, а почетак у A; кроз A пролази друга оса нормална на првој и у којој се мери v_ν. Други од поменутих брзних влакова дат је једначином *(6* у полним каординатима, узимајући и овде за полну осу ону исту, која је и код трајекторије узета.

По овоме сада ако хоћемо да нађемо тачку m ходографа, која има да одгрвара тачки M трајекторије, ваља овако радити. Брзина $v_r = \overline{Am'}$ пренаша се на полну осу, те се добија тачка n, и тада је $\overline{An}$ опсциса ходографа, кроз ову тачку n повлачи се нормала на An, па онда за дато $AM = r$ налази се брзина v_ν (што је ордината влака $[v_\nu, r] = O)$; тиме се добија тачка m_2 на влаку $[v_\nu,\ r] = O$; наизад прајицира се тачка m_2 на речену нормалу а паралелно полној оси, и тако се добија на нормали тачка m; та тачка даје тачки M одговарајућу тачку ходографа, који је за угао φ окренут. Најзад ваља нам зрак $\overline{Am}$ окренути за за угао φ који угао одговара потегу AM у истом смислу у ком се патег кретао. Дакле кад на тај начин тачка m дође на своје право место N, онда је зрак $\overline{AN}$ у ходографу на свом правом месту, коме је положају тангента повучена кроз тачку M паралелна.

Из пређашњег конструктивног разматрања изилази ово: кад су дати влаци, $[r,\ \varphi] = O$, $[v_r,\ \varphi] = O$ и $[r,$

$v_\nu] = O$ моћиćемо наћи и сам ходограф, који је за промењиви угао φ окранут. Да су горње три једначине довољне за изналажај или построј ходографа, види се јасно и из самих тих једначина, јер из првих двеју можемо избацити количину φ и наћи једначину $(r, v_r) = O$, а из ове и из последње од поменутих једначина, кад избацимо r, наћићемо једначину овог облика:

$$[v_r, v_\nu] = O \; . \; . \; . \; . (7$$

која нам преставља ходофраф ортогоналним каординатама v_r и v_ν. Ту исту једначину можемо добити и из једначина (3 и (4 кад из истих избацимо време t.

Но ако је један од брзних влакова тежак за построј а онај други брзни влак лакши, а тако исто ако је лако постројити и ходоораф, онда су довољно за одредбу тачке m и ове једначине:

$$[r, \varphi] = O, \; [v_\nu, r] = O \text{ и } [v_r, v_\nu] = O \; . \; . \; . \; . (\alpha$$

или

$$[r, \varphi] = O, \; [\varphi, v_\nu] = O \text{ и } [v_r \; v_\nu] = O \; . \; . \; . \; . (\beta$$

Да су један или други скуп једначина под $(\alpha$ и $(\beta$ довољни, те да се тачки M нађе одговарајућа тачка m у ходографу, можемо увидити из овога: нека су н. пр. дате једначине под $(\alpha$ и нека су истима одређени влаци постројени, онда ћемо радити овако. За дату тачку M наћићемо тачку m_2, а кад ову пројицирамо паралелно полној оси на ходограф, добићемо тачку m у истом ходографу; онда је зрак $\overline{Am}$ = брзнии тачке M, а кад исти зрак за угао φ окренемо а у истом смислу у ком се и потег тачке M кретао, добићемо зрак $\overline{AN}$, који одговара зраку ходографа на његовом правом месту; дакле је $\overline{AN}$ паралелно тангенти тачке M и ми ову последњу можемо повући. На подобан начин налазили би тачки M одговерајућу тачку m (или N) кад би нам била нацртана три влака, дата једначинама под (β.

II.

Ми смо у прошлој тачки разматрали брзне влаке $[v_r, \varphi] = O$ и $[r, v_\nu] = O$, од којих први је престављен у полним координатама а други у ортогоналним; али ће за извесна геометријска разматрања геометријске природе трајекторије, а тако исто и ходографа бити од велике користи, да построимо оба брзна влака полним каординатама, те тако да их учинимо зависним од једне и исте промењиве количине φ, као и саму трајекторију. Оваке брзне влаке престави-ћемо једначинама облика:

$$[v_r, \varphi] = O \text{ и } [v_\nu\ \varphi] = O \ .\ .\ .\ .\ (8,$$

а ове две једначине добићемо из једначине друге под (1 и из једначина (4 и (3 избацивањем времена t. Ови су влаци (8 нацртани у сл. 2. види таб., где је $\overline{A\nu} = v_\nu$, $\overline{Ar} = v_r$.

Пошто смо нацртали брзне влаке, који су дати у једначинама под (8, врло је лако повући и дирку на тачку M трајекторије. У тој цељи ваља на тачку r што лежи у истом потегу у ком и M, повући на потег нормалу и на истој одсећи кодамад $\overline{rN} = \overline{A\nu} = v_\nu$, на је онда хипотенуза $\overline{AN}$ правоуглог триугла ArN, величина брзине тачке M, осим тога правац хипотенузе AN исти је који и правац дирке на тачки M; дакле кроз M повучена права паралелна правој $\overline{AN}$ даће нам дирку исте тачке. Осим тога још је овде и то увиђавно, кака је тачка N у исто доба и тачка ходографа у правом положају, одкуд се даје и ходограф постојити. Но овде ваља знати још и ово: што се тиче смисла у ком имамо пренети комад $\overline{rN}$, о томе постоји ово правило: брзина v_ν, пренаша се увек на ону страну, на којој страни лежи средиште кривине за тачку M, које изилази из кинетичке природе трајекторије

III.

Најзад важно је да се посматра брзни влак $[r, v_\nu] = O$ — дат ортогоналним координатама — још на тај начин, кад узмемо да му је опсциспа осовина у којој се r — ови мере, у исто доба и потег тачке M, дакле кад се апецисна оса заједно са потегом у исто доба окреће и у исти пада, онда ћемо за брзни влак имати неки особени влак који је у слици 3. престављен.

Исто тако узмимо у обзир још и влак $[v_r, \varphi] = O$, који нам даје брзину v_r у правом положају исто онако, као и влак $[r, v_\nu] = O$; што нам даје брзину v_ν у таком положају. Сад ће нам лако бити да нађемо и тачки M одговарајућу тачку N у ходографу и то на правом месту. Тачка N налази се овако: ваља наћи за тачку M одговарајуће v и v_r, што се добија помоћу влакова $[v_r, \varphi] = O$ и $[r, v_\nu] = O$, па онда ваља у тачки r. слика 3. влака $[v_r, \varphi] = O$ постројити управну а на правој Ar и на истој управној одсећи комад $\overline{rN} = v_\nu = \overline{M\nu}$; или што исто значи, ваља тачку ν пројицирати паралелно потегу AM на нормалу rN, те се и тиме добија тачка N, која је на правом месту хамилтоновог ходографа и сада је $\overline{AN} =$ брзини тачке M, а AN је паралелно тангенти тачке M.

На подобан начин добија се право место ходографа и по једначини $[v_r, v_\nu] = O$ — која окренутом ходографу одговара — ако само узмемо да се његова v_ν осовина (која је X осовина) исто тако окреће као и потег тачке M.

Са овом тачком *III.* стоји у тесној свези следећа, у којој ћемо одредити ходограф и брзни влак $[r, v_\nu] = O$ сматран за покретни координатан систем и престављен у ортогоналним координатама, узев тачку A за почетак а полну осу за обсцисну (X) осу.

IV.

Означимо координате тачке N што у Хамилтоновом ходографу на правом месту одговара тачки M трајекоторије слика 3, са x и y, а угао, који потег тачке M са X осом заклапа са φ онда је из речене слике јасно како је:

$$\left.\begin{aligned} x &= v_r \cos.\varphi - v_\nu \sin.\varphi \\ y &= v_r \sin.\varphi + v_\nu \cos.\varphi \end{aligned}\right\} \dots (9$$

и

гди је $v_r = \overline{Ar}$ и $v_\nu = \overline{rN} = \overline{M\nu}$. Али ми можемо да одредимо $v_r = f(\varphi)$ и $v_\nu = f_1(\varphi)$ зато је сада:

$$\left.\begin{aligned} x &= f(\varphi)\cos.\varphi - f_1(\varphi)\sin.\varphi \\ y &= f(\varphi)\sin.\varphi + f_1(\varphi)\cos.\varphi \end{aligned}\right\} \dots (10.$$

То су дакле једначине које укупно узете, престављају геометријску природу ходографа на свом правом месту; и ако смо у стању да отуда избацимо промењљиву количину φ, добићемо за ходограф ову једначину:

$$y = f(x) \dots (11$$

и то у ортогоналним координатама. Будемо ли још у стању да ходограф *(11* постројимо, моћићемо онда у свези са влаком $[v_r\ \varphi] = O$, врло лако будикојој тачки M наћи одговарајућу тачку N у ходографу дакле моћићемо кроз M повући и дирку. У овој цељи имамо у тачки r повући на зрак Ar нормалу, па она тачка у којој иста нормала пресеца ходограф $y = f(x)$ биће тражена тачка N, која ће тачки M одговарати, од којих последња лежи у зраку Ar.

Ми можемо најзад наћи тачку N која тачки M одговара и помоћу влака $[r,\ v_\nu] = O$ слика 3. кад би само у стању били да исти нацртамо. У тој цели одредимо и њену геометриску природу за непокретан координатан систем и то за онај исти који припада нађеном ходографу. Дакле означимо координате тачке ν са η и ξ па је онда:

$$\left.\begin{aligned} \eta &= v_\nu\, cos.\, \varphi + r\, sin.\, \varphi \\ \text{и}\qquad & \\ \xi &= r\, cos.\, \varphi - v_\nu\, sin.\, \varphi \end{aligned}\right\} \ldots . (12$$

али ми можемо изразити r и v_ν као функције лука φ, зато ћемо моћи једначине *(12* и овако преставити:

$$\eta = \psi(\varphi) \text{ и } \xi = \psi_1(\varphi) \ldots . (13;$$

оне нам прстављају брзни влак $[r,\ v_\nu] = O$, зависан од количина η, ξ и φ; и ако смо у стању из *(13* избацити φ, добићемо речени влак преставлљен овом једначином:

$$\eta = f(\xi)$$

којом је исти дат у ортогоналним координатама η и ξ.

Дакле кад је осом трајекторије дато још $y = f(x)$ и $\eta = f(\xi)$, моћићемо свакој тачки M наћи одговарајућу тачку N, а на начин који се из слике 3. јасно види.

Досад смо теоријски разматрали одређивање брзних влакова и ходографа за кретања, која су дата у полним координатама, а у следећем прећи ћу на поједине примере, у којима ћемо видети важан а и занимљив значај наших општих студија овог проблема.

ПРИМЕРИ.

1.) Дате су једначине трајекоторије у механичком облику и то у полним координатама, а ове нека су:

$$\left.\begin{aligned} r &= a \sin. t \\ \varphi &= b \cos. t \end{aligned}\right\} \ldots . (\alpha$$

где је φ полни угао а r је потег неке тачке као и t што је време. Одовуд, добијамо да је трајекоторије ово једначина:

$$\frac{r^2}{a^2} + \frac{\varphi^2}{b^2} = 1 \ldots . (\beta.$$

Као кто видимо, ова је једначина сасвим подобног облика са једначином елипсе, само је у том разлика, што код једначине $(\beta$ место координата x, y долазе полне координате r и φ, а сам влак коије је једрачином $(\beta$ преставлен зове се елипсина спирала.

Сад ћемо добити из једначина под $(\alpha$:

$$1) \ldots . v_\nu = r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = - ab \sin.^2 t$$

и

$$2) \ldots . v_r = \left(\frac{dr}{dt}\right) = a \cos. t;$$

из ових последњих једначина имамо:

$$- \frac{v_\nu}{ab} = sin.^2 t$$

и

$$\frac{v_г^{\,2}}{a^2} = cos.^2 t$$

сабирањем ових последњих једначина избацујемо време t и добијамо:

$$\frac{v_г^{\,2}}{a^2} - \frac{v_\nu}{ab} = 1$$

одакле је:

$$v_г^{\,2} = \frac{a}{b}\, v_\nu + a^2 \ldots . (\gamma.$$

Ова једначина преставља ходограф у облику који излази из једначине под *(7* тачке *I.* и то за ортогоналне координате $v_г$ и v_ν; $v_г$ мери се у X — осовини а v_ν у одреченој Y — осовини и то наравно са тога што је у једначини *(1.* v_ν одречено.

Врло је лако увидити да добивени ходограф коме је *(γ)* једначина, није ништа друго но проста анолонијева парабала, којој теме лажи у тачки A.; ова лежи испод почетка A слика 4. у одреченој Y осовини далеко за $\overline{AA_1} = ab$, а сече X — осовину у одстојањима $\pm a$.

Дакле да би могли постројити тангенту на тачки M трајекторије слика *4.* ваља нам наћи још и један брзни влак н. пр. влак $[r, v_\nu] = O$. Овај влак добијамо из прве једначине под *(α)* и из једначине *(1)*, а ове су:

$$r = a\, sin.\, t \text{ и } v_\nu = - ab\, sin.^2\, t.$$

или

$$\frac{r^2}{a^2} = sin.^2\, t \text{ и } - \frac{v_\nu}{ab} = sin.^2\, t,$$

одовуд заменом избацићемо време t, па је сада:

$$\frac{r^2}{a^2} = -\frac{v_\nu}{ba}$$

или

$$r^2 = -\frac{a}{b} v_\nu \dots . (\delta.$$

Овај је влак опет аналонијева парабала са теменвм у A; и она као што видимо вреди само за негативно v_ν, то значи да се она пружа испод абсцисне осовине а главпа јој је оса — Y. оса. И ова је парабала нацртана у слици 4., и има исти параметар као и ходограф.

Сад имамо све што је нужно за одредбу: прво брзине v тачке M, а друго за построј дирке на истој тачки M трајекторије. За тачку M трајекоторије чије је потег $\overline{AM} = r$ слика 4. налазе се компонирајуће брзине v_ν и v_r овако:

Ваља луком пренети $AM = r$ на X. осу и начинити $AM = \overline{AM^1}$, из M^1 ваља повући са Y осовином паралелу до влака. $[r, v_\nu] = O$, па се онда добија на истом тачка m_2 и сад је $\overline{M'm_2} = v_\nu$; даље у цељи изналожаја v_r, ваља нам пројицирати тачку m_2 на ходограф паралелно X. осовини, те ћемо за њену пројекцију у том влаку добити тачку m, и сада је m тачка ходографског зрака, који је за φ стенеии окренут. Но кад из m повучемо паралелу са Y. осовином, до пресека са X. осом, онда се добија тачка m_1, одакле изилази да је $\overline{Am_1} = v_r$, дакле је $\overline{Am} = v$.

Најзад окренимо зрак Am ходографа за угао φ у истом смислу у ком се и потер од полне осе AX окренуо, и то преносећи луком а полупречником $\overline{Am}$ тачку m у тачку N, услед чега је $\angle\, mAN = \varphi$ и $\overline{Am} = \overline{AN}$; тако ћемо добити да је тачка N, тачка ходографа за дато кретање и то на свом правом месту. Даклд је зрак AN паралелан танегенти тачке M. Зато је најзад права MT, која је повучена паралелено зраку AN, дирка за тачку M.

Даље из саме слике излази да ћамо, кад тачку m_1 пренесемо кружним луком на потег тачке M, добити тачку r, која припада влаку $[v_r, \varphi] = O$. Полна једначина истог влака ова је:

$$v_r = \frac{a}{b} \varphi \ldots . (\varepsilon;$$

она се добија из друге под (α) и једначине (2) и то избацивањем времена t. Ова једначина преставља архиледову спиралу у полним координатама, гди је v_r потег а φ полни угао и то исти који одговара и потеру тачке M у трајекторији. Тачка r је још и пројекција тачке N нормално на потег AM.

Важно је исто тако, да се одреди и једначина брзног влака $[v_\nu, \varphi] = O$. Ову једначину добићемо из друге једначине под (α) и једначине под (2) избацујући време t, па је:

$$\varphi^2 = \frac{b}{a} v_\nu + b^2 \ldots . (\xi.$$

Ова једначина даје нам такозвану параболну спиралу у полним координатама. Дакле помоћу архимедове спирале и параболне спирале, можемо наћи, као што нам је то из теорије познато, тачку N на ходографу и то на правом месту. Али како смо у стању помоћу елипсине спирале и двеју парабола наћи тачку N ходографа, то је такође врло лако наћи и тачку параболне спирале, треба само на потегу AM одсећи од A к M комад $\overline{A\nu} = \overline{mm_1} = \overline{Nr_1}$, па је тачка ν тачка параболне спирале (ξ). Ово није извршено на слици зато, да неби испала сувише замршена.

Најзад није тешко извести и ове једначине:

$$x = \frac{a}{b}\,\varphi\,cos.\varphi - \left(\frac{a}{b}\,\varphi^2 - ab\right) sin.\,\varphi$$

и

$$y = \frac{a}{b}\,\varphi\;sin.\,\varphi + \left(\frac{a}{b}\,\varphi^2 - ab\right) cos.\,\varphi$$

Ове једначине преставључу абсцисе и ординате тачка ходографа у правом положају, ове тачке одговарају тачкама M, којима знамо угао φ, под којима су потези истих тачака нагнути преам полној оси. Као што видимо ту нам није могуће φ избацити па да добијемо $y = f(x)$. Али опет зато ми смо у стању познатим нам путем, просто путем постројa, наћи тачки N одговарајуће x и y, пошто ми исту тачку можемо лако наћи; дакле ми можемо последње две једначине и постројити, чијих построј био би иначе врло заплетен, кад неби знали у ком односу стоји тачка N, према тачкама M, m_2 и m.

На крају свега што смо у овом примеру дознали, треба целу ствар још и са философске стране разматрати, како би на тај начин увидили чудновату везу, која постоји између двеју парабала $[r, v_\nu] = O$ и $[v_r, v_\nu] = O$, елипсине спирале $[r, \varphi] = O$ и архимедове спирале; а тако исто и њене дирке, као и обратно што се помоћу двеју парабала и елипсине спирале може постројити архимедова спирала. Комбинисањем геметријских задатака на начин, као што је у овом примеру а по преставњеној општој теорији изведено, можемо наићи на млоге важне а још непознате особине неких влакова, шта више можемо још и млоге друге влаке пронаћи и њих сретством познатих влакова постројити, дакле довести координате неког влака у зависност од координата других влакова.

2.) Полне координате покретне тачке трајекторије дате су у овим једначинама:

$$\left.\begin{aligned} r &= ct \\ \text{и} \qquad & \\ \varphi &= \frac{pt^2}{2} \end{aligned}\right\} \ldots . (\alpha,$$

где је r потег покретне тачке, φ полни угао а t време; сад ваља наћи једначину трајекторије у геометриском облику. Ову ћемо добити кад из (α) избацимо време; последак тог избацивања биће тражена једначина:

$$r^2 = \frac{2c^2}{p}\, \varphi \ldots . (\beta.$$

Ова једначина преставља параболину спиралу $ABCDE$, $A^1B^1C^1D^1E^1$ која је у слици 5 нацртана. Пуно извучени влак вреди за положно r, тачкасто извучени за одречно r.

Из једначине (α) добијамо брзине:

$$\beta) \ldots . v_\nu = \frac{p}{c}\, r^2 \text{ или } r^2 = \frac{c}{p}\, v_\nu$$

$$\gamma) \ldots . v_\nu = 2\, c\, \varphi \text{ и}$$

$$\delta) \ldots . v_r = c = const.$$

Одовуд добијамо брзне влаке по именце ове:

1) брзни влак $[r, v_\nu] = O$ у ортогоналним координатама v_ν и r, која преставља просту параболу APP_1,[1] теме јој је у A а главна оса је позитивна Y — оса, даље

[1] Код Архимедове спирале јесте влак $[r, v_\nu] = O$ права, која пролази кроз тачку A.

2) брзни влак $[v_\nu, \varphi] = O$ преставља просту архимедову спиралу у полним координатама са почетком у A а полном осом AX и најзад

3) брзни влак, даје круг којег је полупречник $= c$ а сердиште у A.

Сад није тешко погодити да је за φ степени окренути ходограф ништа друго но права hh_1, која је паралелна са Y. осовином а удаљена је од исте за $Am_1 = v_r = c$ (овакав је ходограф и код архимедове спирале узета као трајекторија).

Пошто имамо трајекторију, један од брзних влакова (β) и осим тога за φ окренути ходограф, то ћемо моћи лако повући и дирку на будикојој тачки M параболине спирале. При пострoју дирке на тачки M слика 5. ради се овако:

Ваља нам пренети луком тачку M у M_1 на осу X; даље треба исту M_1 пројицирати паралелно Y — осовини на параболу, тако ћемо добити тачку m_2, која у брзном влаку (β) одговауа тачки M, затим ћемо проицирати тачкуm_2 на ходограф и добићемо тачку m, која у ходографу одговара тачки M; пак ћемо наћи да је $\overline{Am}$ зрак ходографа који за φ степени окренут. Најзад ваља нам зрак Am за угао $mAN = MAX = \varphi$ окренути у истом смислу у ком се потег тачке M према полној оси окренуо, па ће онда тачка m доћи на место N и то ће бити тачка ходографа на правом месту, која тачки M одговара. Дакле кроз M повучена права $MT \parallel AN$ биће дирка тачке M.

Из природе задатка, а исто тако и из саме слике, види се врло чудновата особина нормала, које се могу повлачити из тачке N на одговарајући потег трајекторије, све овакe нормале као што су Nr, N^1r^1; . . . секу потег тачака $M, M^1, \ldots$ у тачкама $r, r^1, \ldots$ којих је геометриско значење круг полупречника $= c$. Исто тако и комади $\overline{Nr}$, $N^1r^1 \ldots (= v_\nu)$ пренешени од A к одговарајућим тачкама

$M, M' \ldots$ а у смислу од A к реченим тачкама, добићемо тачке архимедове спирале. Дакле и само помоћу круга и архимедове спирале, можемо наћи тачке N па по томе онда и дирке на тачкама M параболине спирале повлачити.

Кад би показаним путем тачкама M нашли одговарајуће тачке N, дакле построили ходограф на свом правом месту, лако би нам било наћи и онакве тачке M на параболиној спирали којих би тачака дирке ишле паралелно некој датој правој. Ходограф на правом месту дат је овим једначинама:

$$x = c\ (cos.\ \varphi\ -\ 2\ \varphi\ sin.\ \varphi)$$

и

$$y = c\ (sin.\ \varphi\ +\ 2\ \varphi\ cos.\ \varphi)$$

које су једначине у главноме подобне једначинама кружне еволвенте, и налазе своју примерно код построја центрифугалних шмркова, и вентилатора.

V.

Ми смо се у пређашњим тачкама занимали тиме, да одредимо ходограф и брзне влаке кад је дата трајекторија у дипаличком облику, па кад смо нашли ходограф и један од брзних влакова, онда смо били у стању да повучемо дирке кроз тачке трајекторије. Али врло је важан а и занимљив још и такав систем задатака, кад је дата трајекторија и ходограф на правом месту у њиховом геометријском облику и осим тога кад је још и геометријски построј дирке на трајекторији познат, а у исто доба и лак; па да онда обратно одредимо тачку по тачку брзним влацима или да им нађемо једначину за правоугаоне координате. Кад повучемо дирку кроз неку тачку M трајекторије, моћићемо увек наћи одговарајућу тачку N у ходографу, јер кроз пол ходографа повучена права паралелно реченој дирки сећи ће ходограф у тачки N, која тачки M одговара. По овоме онда кад имамо тачку N, моћићемо наћи v_x и v_y пошто су ове количине координате исте тачке (v_x мери се у X осовини а v_y у Y-ској осовини). Исто тако моћићемо наћи лако и тачку m која одговара брзном влаку $[x, v_y] = O$ као и тачку μ која одговара $[y, v_x] = O$; јер кад пројектујемо тачку N на ординату и опецису тачке M и то нормално на исте, добићемо у истим пројекцијамо тачке m и μ, чијих тачака су ординате и абсцисе v_y и x; v_x и y, од којих x, и y јесу координате тачке M.

Ми можемо дакле путем цртања одредити тачку по тачку н. пр. влака $[x, v_y] = O$, кад су ходограф и трајекторија нацртани, али исто тако можемо наћи и рачуном саму једначину истог влака, (која ће бити облика $[x. v_y] = O$) кад су нам дате једначине $[x, y] = O$ и $[v_x, v_y] = O$; од којих предпоследна одговара трајекторији а последња ходографу, а све три заједно преставлене су ортогоналним координатама: $x, v_y; x, y$ и v_x, v_y, а у смислу који нам је познат. Оваком студијом моћи ћемо пронаћи нове влаке, а тако исто и познате влаке моћи ћемо помоћу друга два влака постројити.

У цељи решавања оваких задатака, нека је дата једначина трајекторије:

$$y = f(x) \;.\;.\;.\;. (1$$

гди су x и y њене ортогоналне кординате, а исто тако нека је дат и ходограф једначином:

$$\eta = f(\xi) \;.\;.\;.\;. (2$$

гди су η и ξ ортогоналне координате у правцу Y. и X. осовине, дакле η и ξ прстављa сад v_y и v_x. Из ових двеју једначина ваља нам наћи једначину:

$$\eta = \varphi(x) \;.\;.\;.\;. (3$$

која ће одговарати брзном влаку, јер је ту $\eta = v_y$ и а x је абсциса тачке M, којој ће да одговара тачки m у влаку *(3)*.

Познато нам је: да је по кинетичкој природи ходографа

$$\eta = \xi\left(\frac{dy}{dx}\right) \dots . (4$$

па како се из једначине *(1)* може наћи $\frac{dy}{dx} = \psi(x)$, а тако исто можемо и једначину *(2)* да решимо по ξ и наћи $\xi = \Theta(\eta)$, то онда кад заменимо у *(4)* количине ξ и $\frac{dy}{dx}$ са малочас нађеном вредностима, добићемо:

$$\eta = \Theta(\eta) . \psi(x) \dots . (5$$

Ова једначина, која има само η и x као промењљиве количине, кад се реши по η, добићемо једначину:

$$\eta = \varphi\ (x) \dots . (6$$

која нам даје влак који тражимо. На подобан начин нашли би влак $[\xi, y] = O$. Ово опште решење нашег проглема, видићемо најбоље на следећом примеру.

Примери. Нека је влак *(1)* парабола слика 6, (види таб.) а влак *(2)* круг, са средиштем у почетку A координата, дакле једначине тих влакова ово су:

$$y^2 = p\, x \dots . (1$$

$$\eta^2 + \xi^2 = r^2 \dots . (2.$$

Из прве једначине добијамо:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2\sqrt{px}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{x}} = \psi(x) \dots . (3$$

из друге је:

$$\xi = \sqrt{r^2 - \eta^2} = \Theta(\eta) \ldots . (4$$

зато је тачке:

$$\eta = \Theta(\eta).\psi(x) = \frac{p}{2\sqrt{px}} \sqrt{r^2 - \eta^2} \ldots . (5$$

Пошто решимо ову последњу једначину по η, па онда довољно приредимо, добићемо:

$$\eta = \pm \frac{r\sqrt{p}}{\sqrt{p + 4x}} \ldots . (6$$

која нам даје тражени влак $\eta = \varphi(x)$.

Овај влак има две асимтоте и то: једна је асимтота X осовина, а друга је права $Y^1\overline{Y^1}$, која је Y-ској осовини паралелна и удаљена је од исте за $A\overline{A}_1 = - \frac{1}{4} p$, дакле је иста и вођица параболе, види слику 6.; осим тога је $X\overline{X}$ осовина у исто доба и осовина симетрије, дакле влак *(6)* има две симетричке гране као што се на слици види, што нам и једначина *(6)* казује.

Кад померимо почетак A координата у тачку A_1 дуж X осовине за $AA_1 = - \frac{1}{4} p$, онда је за тај почетак једначина влака *(6)* дата у овом промењеном облику:

$$\eta^2 = \frac{r^2 p}{4x} \ldots . (7$$

дакле то је једначина брзног влака однесена на њено две асимтоте као координатне осе, од којих је једна $Y^1\overline{Y^1}$ управница параболе и тим је једначина познатог брзног влака постала млого простија.

Тачка m овог влака за дату параболину абсцису $\overline{AB} = x$, која ће бити абсциса и тачке m, добија се овако: За дато $\overline{AB} = x$ ваља на познати начин наћи параболину ординату $\overline{BM} = y$ или тачку M, затим ваља познатим путем постројити дирку на тачки M, па онда кроз A повући праву AN паралелно са дирком тачке M и продужити је до пресека са датим кругом, па ћемо у том пресеку добити тачку N; најзад кад ову тачку пројицирамо паралелно X оси на ординату $\overline{BM}$, добићемо у истој тачку m која одговара влаку, ког је једначина дата у *(6)*. Овај влак *(6)* сече ординатну осу $\overline{YY}$ у тачкама O и O_1 за које су тачке $\eta = \pm r$ дакле у истим тачкама у којима и круг речену осу сече. Истина има и других начина по којима се могу тачке m постројавати, али је и овај наш прост линеалан, занимљив а у исто доба и нов, а показује нам чудновату везу, која постоји између параболе, круга и влака *(6)*.

Даље влак *(6)* има још и важну особину у хидраулици, осим тога исти стоји у тесној свези са такозваном Њутеновом катарактом, јер се ова последња помоћу влака *(6)* даје врло лако постројити, као што ћемо из следећег видити.

Кад се пусти да водени млаз кроз округао отвор суда скаче вертикално у висину, онда се пресек таког малаза а на местима над отвором у неком односу увеличава или млаз дебља, и то тако да је уздужан вертикалан просек овавог млаза такозвана Њутенова катаракта.

Узмимо нека је брзина којом вода из отвора излази c, а полупречник истог отвора нека је r, онда је једначина профила млаза, што знамо из хидраулике, ово:

$$\eta_1 = \frac{r}{\sqrt[4]{1 + \left(\frac{2g}{c^2}\right) x}} \quad \ldots . (8,$$

где је η_1 полупречик пресека на разним висинама над отвором и под њим, а x је одстојање пресека од отвора рачунато над и испод отвора. Што се тиче смисла како се x мери, овде је узето да се позативни x — ови мере испод отвора а негативни над отвором у вертикали, почетак координата је средиште отвора. Ставимо нека је $\frac{c^2}{2g} = h$, које h преставља нам брзину висину, онда је:

$$\eta_1 = \frac{r}{\sqrt[4]{1 + \frac{x}{h}}} \quad . \; . \; . \; . \; (9.$$

Кад сравнимо сада ову једначину са једначином *(6)* која је:

$$\eta = \frac{r\sqrt{p}}{\sqrt{p + 4x}} = \frac{r}{\sqrt{1 + \frac{4}{p}x}} \quad . \; . \; . \; . \; (10$$

видимо међу њима велику подобност; а то у томе што је код *(9)* h одстојање асимтоте Њутенове каракте од отвора мерено на на више, дакле у одреченом смислу X осовине, а исто је тако и $\frac{p}{4}$ раздаљина асимптоте влака *(10)* од тачке A мерено у одреченом смислу X осовине. Дакле кад је још $\frac{4}{p} = \frac{1}{h}$ или $h = \frac{p}{4}$, онда ова два влака *(9)* и *(10)* имају исте праве за асимтоте, и осим тога, кад је још и полупречник круга *(2)* раван полупречнику отвора кроз који вода скаче, онда постоји између ордината речених влакова а за једнаке апсцисе овај однос:

$$\eta_1^2 = r . \eta \quad . \; . \; . \; . \; (11.$$

Дакле ордината Њутенове катаракте, средња је геометријска сразмерна између сталне количине r и ординате η влака *(10)*, који се добија помоћу параболе, које је параметар $p = 4\,h$ и кругаког је полупречник раван полупречнику отвора кроз који вода у висину скаче или наниже истиче.

Овим смо дознали везу која постоји између влака *(10)* и Њутенове катаракте, а осим тога како се Њутенова катаракта постројава помоћу влака *(10)* видићемо сада.

Њутенова катаракта постројава се овако: Ваља повући н. пр. кроз тачку O_1 слика 6. паралелу O_1P са X осовином, па онда ако хоћемо за дато $AB = x$ да нађемо тачку m и њој одговарајућу тачку n у Њутеновој катаракти, имамо повући кроз m праву Bm и продужити је до пресека B_1 са правом O_1P, па онда описати над $\overline{mB_1}$ круг; гди исти круг сече абсцисну осу, а то бива у тачки ν; то је онда $\overline{B\nu} = \eta_1$, јер је $\overline{B\nu}^2 = \overline{BB_1} \cdot \overline{Bm} = r.\ \eta$, дакле је доиста $\overline{B\nu} = \eta_1$. По томе дакле, кад на продужену ординату тачке m оцечемо комад $\overline{Bn} = \overline{B\nu}$, онда је тачка n, тачка Ноутенове катаракте. Овако поступајући редом даље, наћи ћемо онолико тачака Њутенове катаракте колико нам је нужно. Без сумње јасно је, да ће тачки n одговарати испод ње друга њена симетричка тачка према X осовину, као што такова одговара и тачки m. Из овог построја излази и ово: Њутенова катаракта и влак *(10)* секу ординату осу $Y\overline{Y}$ у истим тачкама O и O_1 а то су тачке које леже у нериферији отвора, кроз који вода или навише скаче или наниже истиче. Гране Њутенове катаракте у положном смислу X осовине, одговарају профилу млаза који би из округлог отвора наниже истицао; а онај други део гране у одреченом смислу X осовине одговара профилу млаза који би из отвора вертикално навише скакао.

Овај је построј за практичку или експерименталну хидраулику врло важан, јер кад постројимо положан одељак катаракте, моћи ћемо израдити и сисак истог профила, кроз који кад вода истиче ма у ком правцу, даје најмање одпора трења, које се може у хидроулици доказати тиме, што је на боку сиска овако профила, хидраулички притисак раван нули а млаз воде кристално прозрачан, као оно кад истиче из отвора ком су ивице одма у почетку оштре (Dünne Wand). Најзад дата парабола је у исто доба и она парабола којом би ишао водени молекил, под хидраостатичким притиском $= h$ хоризонтално избачен.

Вредно је да дознамо једначину и оног другог брзног влака, а тај је $[v_x, y] = O$ или ако овде заменимо v_x са ξ онда нам ваља наћи једначину $\xi = f(y)$; ова се налази на подобан начин као што смо нашли и једначину $\eta = \varphi(x)$. Овде је:

$$\xi = \frac{\eta}{\left(\frac{dy}{dx}\right)} \quad \ldots . (12$$

али пошто се може одредити $\eta = \chi(\xi)$ и $\frac{dy}{dx} = \psi(y)$ то је онда и $\xi = \frac{\chi(\xi)}{\psi(y)}$, која једначина кад се реши по ξ добићемо једначину коју тражимо:

$$\xi = f(y) \quad \ldots . 12$$

Примењено ово на наш пример добићемо:

$$\xi = \frac{2r.\ y}{\sqrt{p^2 + 4\,y^2}} \quad \ldots . (13$$

Овај влак нацртан је у слици (6) и то његова половина на страни позитивне Y осовине. Тачке μ овога влака које одговарају тачкама M параболе, јесу нормалне пројекције тачака N на правој која иде кроз M а паралелно X осовини, дакле оне су одређене одговарајућим координатама ξ и y. Влак овај има две асимтоте a и a_1, које су дирке на кругу а иду паралелно Y-ској осовини, дакле су исте удаљене од A за $= \pm r$. Осим овога лако је одредити и дирке на тачки A за исти влак, у овој тачки се гране влака укрштају и ту имамо две дирке за које постоји овај однос:

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{p}{2r} \ldots . (14$$

јер је уопште:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2} \left\{ \frac{r^2 - x^2 - 2x}{(r^2 - x^2) \sqrt{r^2 - x^2}} \right\},$$

у овој кад метемо $x = o$ што одговара тачки A, добићемо једначину *(14)*. Оваkове две дирке нацртане су у слици (6) а угао tAt_1 онај је, пад којим се гране влака *(13)* секу. Даље кад је дат нагиб дирке тачке A према X оси и осим тога координате н. пр. тачке μ, дакле ξ и y, лако је рачуном наћи p и r, па онда и влак *(13)* нацртати који има да пролази крол дату тачку μ; а овај построј извршићемо помоћу круга ком смо израчунали полупречник r и помоћу параболе којој смо израчунали параметар p.

Најзад нећу да пропуштам прилику, а да не искажем о влаку $\xi = f(y)$ ово мишљење. Поменути влак, који је држим нов, не само што је занимљив због начина на који исти постоје, а и због тога што се даје врло тачно да построји, но исти може да буде још и од врло велке користи за сполну балистичку. Ја мислим, кад би се пројектилу дао предњи облик, дакле облик шиљку у виду ротацијоне површине која постоји обртањем влака $\xi = f(y)$ и то њеног дела $\widehat{A\mu}$ око Y-ске осе, онда би овакав облик предњег дела пројектила давао најмање одпора на путањи свог лета кроз ваздух. Ово држим да ће бити тако са тога, што се исти влак одма од шиљка A почев набрзо исправља дакле све већу оштрину према правцу одпора добија и до извесне граничне дужине у правцу Y — осовине, прилагоћава се цилиндарској површини, дакле се са истом може и заменути. Дакле овај је влак таке природе да по њему постројен предњи део пројектиле, понајпре би се, од свију других познатих влакова за ову цељ, приљубио уз цилиндарску површину задњег дела пројектила, док други влаци као што је н. пр. Ламезонов (види: Archiv für die officiere der königl. preussischen Artillerie — Jngenieur — corps, 48. свеска, страна 149, Берлин 1860 год), који даје релативно још најмање отпора, има ту ману што исти на делу где се спаја са цилиндарском површином, сече њену страну под великим углом, док напротв овај наш влак сече такову страну цилиндра готово под углом нула, дакле страна пројектила задањег дела може се узети да готово тангира наш влак у тачки μ.

Дакле сблик профила предњег дела пројектила требао би да буде влак $\widehat{\mu A \mu_1}$, који се даје тачно и лако постројити кад је дата висина $\overline{DA}$ предњег дела, кад је дат пречник $\overline{\mu\mu_1}$ цилиндарског стражњег дела и осим тога кад је познат или дат угао tAt^1 под којим ваља да је пројектил на шиљку A заоштрен. Ово моје тврђење нисам у стању засада да докажем ајеродинамичким законима, но молим господу артиљеристе официре, којима је ова ствар са болистичког гледишта специјалније позната, да не жале труда, но да испитају влак $\xi = f(y)$ са његове болистичке стране а ово односно одпора ваздуха на ротациону површину којој је профилречени влак. Исто би тако било од користи, кад би се неколико н. пр. 24 ℔ граната озадњих топова израдило по облику који ја предлажем, па би практика без сумње дала њен оцечан суд о користи или не користи реченог влака, што би се врло тачно дознало сравнивањем досадање даљине домета са даљином домета коју би дала пројектила новог облика

Београд 27. јуна 1878 год.

ЉУБОМИР КЛЕРИЋ

ПРОФЕСОР МЕКАНИКЕ НА ВЕЛ. ШКОЛИ.

КАКО СЕ ГРАФИЧКИМ ПУТЕМ ОДРЕЂУЈЕ УСЛОВ РАВНОТЕЖЕ ИЗМЕЂУ СИЛА МОЛЕКИЛАРНИХ ИЛИ ПОНТЕНЦИЈАЛНИХ, И СПОЉНИХ ИЛИ ДИНАМИЧКИХ

I.

Савијање тела.

Кад један крај макаког призматичког тела хоризонтално узидамо, а на други његов слободан крај пустимо да сила P вертикално наниже дејствује и то у равни у којој лежи и тешка раван узиданог тела, онда ће сила P савити тело, те ће неутрална линија у телу (а то је она у којој леже тежишта њених пресека) заузети одређену кривину, које геометриску природу можемо изнаћи помоћу ове диференцијалне јеначине:

$$JE.\ \frac{d^2y}{dx^2} = \mathfrak{M}$$

а то је диференцијална једначина еластичке линије. У истој је једначини Y оса вертикална, X оса хоризонтална, даље J је моменат лењивости пресека и то за неутралну осовину (који је код призматичког тела сталан број), писме E је модул еластицитета материје тела, а $\mathfrak{M}$ је статичан момент силе P за тачку еластичке линије која је удаљена за x од нападне тачке силе P, узев у истој тачки почетну тачку координата.

У теорији о еластицитету физичких тела, која су упливом спољних сила просто савијена, познато нам је да молекиле пресека, који је нормалан на еластичној линији, дели неутрална осовина на две групе, од којих једна група молекила са једне стране неутралне осовине кад се одмиче од својих суседних молекила суседног пресека, друга група молекила са друге стране неутралне осовине примиче се молекилима суседног пресека, који појав производи савијајуће дејство спољних сила на том пресеку. По томе онда у једној групи молекила пробуђене су истежуће или вукуће потенцијалне силе, а другој групи молекила напротив комримујуће или гњечеће потенцијалне силе. Даље о реченим молекиларним силама или напрезањима молекила знамо још и то, да дјевствују нормално на пресеку који посматрамо, осим тога иста су напрзања над неутралном осовином противног смисла напрезањима молекика испод неутралне осовине. Ми имамо дакле у маком пресеку тела неки систем паралелних сила са једне и друге стране неутралне осовине.

Узмимо сада па посматрајмо будикоји пресек тела, који је за ξ удаљен од нападане тачке силе P или од слободног краја греде, то онда знамо да динамичка сила P дејствује на пресек са одговарајућим спрегом $(P, -P)$ кога је моменат $P\xi$. Но пошто се спрег даје умирити само опет са спрегом, то и систем паралелних молекиларних сила, које су упливом диналичког спрега и изазвате или пробуђене, даје нам тако исто резултирајући потенцијалан спрег, који доиста постоји, кад тело на себи носи или потире диналичку силу P. Даље по свему горњем што смо рекли о смислу молекиларних сила, а у свези са овим последњим, знамо да је резултанта молекиларних сила са једне стране неутралне осовине равна и пртивно положена резултанти молекиларних сила са друге стране неутралне осовине. Означимо н. пр. резултирајућу молекиларну силу молекила над неутралном осовином са

$+ R$, онда је резултирајуће молекиларно напрезање молекила испод неутралнае осовине $- R$, од којих свака за се имају различите нападне тачке p и q. По овоме је дакле потенцијални спрег $(R, - R)$.

За равнотежу између диналичких и потенцијалних сила, мора да је моменат диналичког спрега раван моменту потенцијалног спрега. Узмимо сада да знамо нападне тачке p и q силе $+ R$ и $- R$, онда нам ова једначина:

$$P\xi = R. \overline{pq}$$

преставла услов равнотеже између диналичке и потенцијалне силе, исто тако ако са $\mathfrak{M}$ означимо резултирајући диналички моменат односно будиког пресека у телу, мора да је опет за равнотежу диналичких и потенцијалних сила на том пресеку:

$$\mathfrak{M} = R. \overline{pq}.$$

Кад динамичке силе дејствују на неко тело савијајући, наћи ћемо у телу увек неко место за које је диналички моменат максимум, које се место зове пресек прелома, јер ће се на том месту молекили највише напрегнути, дакле за равнотежу пресека на том месту мора да је:

$$\mathfrak{M}_{mx} = R. \overline{pq}.$$

То значи: резултирајуће молекиларне силе $+ R, - R$ на том месту мора да имају такав интензитет, како ће са њиховим моментом $R. \overline{pq}$ одржати равнотежу максималном динамичком моменту $\mathfrak{M}_{mx}$.

Разуме се, да у свима конструкцијама инжињерске грађевине дајемо телу на месту гди је динамички моменат максимум, толико материјалног пресека, како молекили, који су у том пресеку највише напрегнути неби њиховим напрезањем прешли преко границе еластицитета. Овај захтев даће нам прилике те ћемо моћи израчунати како R тако исто и $\overline{pq}$, па ћемо том приликом видети да је потенцијалан моменат: фенукција физичке особине тала и димензија пресека, те ће мо тако имати начина да познатом $\mathfrak{M}_{mx}$ одредимо одгорарајуће димензије пресека, на коме ће потенцијални моменат одржати равнотежу максималном диналичком моменту, а да се најјаче напрегрути молекили не напрегну преко границе еластицитета.

У тој цељи узмимо нека је на оном месту где је диналички моменат максилисум одговарајући пресек облика $abcd$ као што слика 1. табл. C показује. Означимо са κ максимално специфичко напрезање молекила (а то је напрезање на једначину пресека) у границама еластицитета, а ово дејствује у региану молекила који су најудаљенији од неутралне осовине: специфичка напрезања молекила ближе неутралне осовине променљива су, па неузимајући у рачун смичуће силе, она су сразмерна одстојањима молекила од неутралне осовине. Нека је одстојање најудаљенијих молекила $= e$ то је онда специфичко напрезање молекила који су за x удаљени од неутралне осовине $= S_x$, које је сразмерно одстојању x, дакле је:

$$S = \frac{\kappa}{e} x \ldots . (2.$$

Дакле на елементарну пругу mn, која је дугачка y а широка dx, одговарајуће је резултирајуће напрезање = специфичком напрезању тог региана помножено са одговарајућом површином; и ако исто резултирајуће елементарно напрезање означимо са $P_x = dR$ гди је R резултирајуће напрезање читаве површине abc, онда је:

$$P_x = dR = S_x . y . dx = \frac{\kappa}{e} x . y . dx \ldots . (3$$

сад је моменат напрезања dR односно неутралне осовине ово:

$$(dR)\ x = \frac{\kappa}{e}\ x^2.\ y.\ dx.$$

Пошто ову последњу диференцијалну јеначину интегралима и то десну страну у грницама $+ e$ и $- e_1$, (гди су нам e и e_1 одстојења најудаљенијих молекила испод и над неутралном осовином) то ће интеграл леве стране добити вредност $R.\ \overline{pq}$ па је зато:

$$R.\ \overline{pq} = \frac{\kappa}{e} \int_{x=-e_1}^{x=e} x^2.\ y.\ dx \ldots . (4,$$

и кад ову једначину сравнимо са оном то *(1)* биће:

$$\mathfrak{M}_{mx} = \frac{\kappa}{e} \int_{x=-e_1}^{x=e} x^2.\ y.\ dx.$$

Ставимо $\int_{x=-e_1}^{x=e} x^2.\ y.\ dx = J$, количина J као што знамо преставља моменат лењивости целог пресека *abcd*, а за неутралну осовину истога, дакле је:

$$\mathfrak{M}_{mx} = \kappa.\ \frac{J}{e} \ldots . 5$$

израз по ком смо у стању да одредимо димензије пресека кад је дато $\mathfrak{M}_{mx}$ и физичка природа материје дакле κ. Количину $\frac{J}{e}$ зваћемо одпорним моментом и означаваћемо је са писменом O.

Познато је сваком инжињеру са каквом је тешкоћом скопчано одређивање количине J, а то у оном случају, кад је пресек тела заплетена геометриска слика или кад је обим пресека склопљен из правих и кривих линаја. У таким случајима нисмо кадри наћи израз J аналитичким путем а тако исто ни лако па ма и на приближан начин, те смо онда принуђени да количину J одредимо графичким путем, који нас још најпоузданије к цељи води. Најтеже је одредити J у таким случају, кад је познат само подобан пресек правог пресека, који имамо тек да израчунамо, као што су то и најобичнији случајеви. У обичним случајима, кад су пресеци правилни, служимо се непосредно једначином *(5)* јер у таким случајима знамо да израчунамо количину J као фунцију димензија пресека.

II.

Моменат лењивости.

Сад ћу да покажем особени графички метод, којим ћемо бити у стању да одредимо моменат лењивости *(J)* пресека макаких облика, и као што ћемо дидити, метод је веома прост а у толико исто употребљив и користан.

По једначини *(3)* добијамо да је резултурајућа потенцијална сила на једној страни од неутралне осовине ова:

$$R = \frac{\kappa}{e} \int_{0}^{e} xy.\, dx$$

где нам је као што је лако увидети $\int_{0}^{e} xy.\, dx$ статичан моменат пресека *abc* испод неутралне осовине а односно саме неутралне осовине; исти је моменат по теорији о тежишту, раван површини $abc = f$ помноженој са одстојањем њеног тежишта s од неутралне осовине и ако исто одстојање означимо просто са s онда је:

$$\int_0^e xy.\,dx = f.\,s,$$

дакле је и:

$$R = \frac{\kappa}{e}\,f.\,s \;\ldots\ldots (6.$$

Статички моменат $f.\,s$ можемо графичким путем одредити, а тако исто и путем покушаја или опита. Путем покушаја ради се овако:

Ваља изрезати површину abc из круте хартије (картан) или макаке танке металне плоче, па онда треба метути исту изрезану слику на оштрину ножа а паралелно линији ac (неутралној осовини) док се не нађе положај у ком ће слика на оштрици боласирати, одстојање ивице ножа од праве ac, јесте равно количини s, даље имамо још да одредимо планиметром квадратну садржину површине $abc = f$, па онда имамо све што нам је потребно.

Ради одредбе статичког момента потенцијалнога спрега $(R, - R)$, ваља да знамо још и $\overline{pq}$, а то је одстојање нападних тачака сила R и $- R$, а ово ћемо постићи на овај начин.

Ми би могли разложити површину abc у елементарне пруге као што је такова н. пр. mn, па онда сваку пругу помножити са одговарајрћим специфичким напрезањем S_x, те би на тај начин добили силе P_x које одговарају резултирајућим напрезањима у таким пругама, даље построили би из сила P_x полигон сила и одговарајућим веритни полигон, те би тако одредили место резултирајућој сили $- R$, исти посао могли би извршивати и за површину acd и нашли би место силе $+ R$, њихово одстојање било би $= \overline{pq}$. Због промењљивости сила S_x, видимо одма на први поглед да би то био врло заметан посао, и сада ћемо прећи на други лакши метод.

Ми би могли тачке p и q могло брже и простије одредити, кад би само специфичка напрезања свију молекила у пресеку била иствветна и равна κ, дакле оно исто као и најудаљенијег молекила, те би онда напрезања P_x била просто сразмерна дужинама пруга као што је н. пр. дужина nm. Но сталност специфичког напрезања разних молекила у пресеку, зависи просто од геометриског облика самих пресека; али ми можемо себи такав пресек да замислимо који би имао ту важну особину да су му специфичка напрезања у маком мелекилу стална, те би онда тежиште таког пресека над и испод неутралне осввине било у исто доба и нападна тачка сила $+ R$ и $- R$. Пресек овакве особиее, моћићемо на лак начин путем построја добити. Тако посматрајмо на пр. елементарну пругу mn и ми можемо сада исту пругу а односно резултирајућег дејства молекиларних сила у истој прузи заменити са другом пругом $\mu\nu$ на истом месту, но које је специфичко напрезање $= \kappa$ а апсолутно или њено резултирајуће напрезање кад је $= P_x$, оно исто које доиста и дејствије на пресеку mn. Нека је душина замењујуће пругә $\mu\nu$ новога пресека $= \eta$, онда је у истој елементарној прузи резултирајуће напрезање $= \eta . \kappa . dx$, но како по постављеном услову мора да је исто напрезање равно P_x то је сада:

$$P_x = \kappa . \eta . dx$$

но исто је тако и у прузи mn одговарајуће напрезање:

$$P_x = \frac{\kappa}{e} xy . dx,$$

те сада због једнакости тих напрезања у прузи *mn* и $\mu\nu$ мора да је:

$$\kappa\eta . dx = \frac{\kappa}{e} x . y\, dx$$

откуда побијамо за дужину пруге $\mu\nu$ ову важну условну једначину:

$$\eta = \frac{x . y}{e} \ldots . (7$$

као што видимо имамо начина да макоју пругу *mn* дужине y а у остојању x од неутралне осовине, заменимо другом пругом $\mu\nu$ дужине η а у истом одстојању, а да у дејству према неутралној осовини ништа не променемо, јер ће оваква замењујућа елементарна пруга имати оно исто резултирајуће елементарно напрезање, као што има у самој ствари пруга *mn*. Дужина η замењујуће пруге, јесте четврта сразмерна између, x y и e, дакле ми можемо дужину η путем построја потпуно одредити. По свему овоме видимо, да свакој тачки *m* и *n* у доистом пресеку одговара друга μ и ν, те на тај начин добијамо сљед тачака као што су μ и ν, дакле и неку криву линију која нам ограничава обимску контуру идеалног пресека $S\,\mu\,b\,\nu\,S$, који има ту особину, да су му сви молекили са једним и истим специфичким напрезањем (κ) напрегнути и осим тога резултирајућа елементарна напрезања у елементарним пругама истог пресека сразмерна су просто одговарајућим дужинама η исте пруге, дакле и нападара тачака q силе — R лежа ће у тежишту идеалног пресека $S\,\mu\,b\,\nu\,S$, које можемо одредити или помоћу вешања или помоћу ивице нижа кад из хартије исечену слику $S\,\mu\,b\,\nu\,S$ метемо да на ножу балансира. Идеалну површину $S\,\mu\,b\,\nu\,S$, можемо звати **површина** или **пресек једнаког напрезања**, а овако из горњих разлога.

Тачкама *m* и *n*, које за исто x одстоје од неутралне осовине, добићемо одговарајуће тачке μ и ν овако: на основу једначине *(7)*ваља у остојању e од неутралне осовине повући праву MN, паралелно неутралној осовини, затим на исту пројектовати тачке m и n па ћемо добити у пројекцијама тачке m_1 и n_1, даље треба треба спојити m_1 и n_1 са тежиштем S датог пресека, па у пресеку правих m_1S и n_1S са правом nm добићето тачке μ и ν. Кад урадимо то исто и са свим осталим тачкама обима датог пресека, које су за исто x удаљене од неутралне осовине, добићемо след тачака као што су μ и ν, које спојене ограничиће нам контуру површне једнаког напрезања.

Ову исту констркцију имамо да довршимо још и за тачке обима горње површине acd, но да неби била слика замршена линијама, ваља и над неутралном осовином повући M_1N_1 паралелно са истом а у отстојању e од исте, ова права M_1N_1 замењује нам њену одговарајућу MN. Овим путем долазимо и до површине $d\alpha_1 S\gamma_1 d$, која нам представља површину једнаког напрезања а која одговара горњој површини acd. Тежиште p површине $d\alpha_1 S\gamma_1 d$, у исто је доба и нападана тачака силе $+ R$. Пошто конструишемо површине $S \mu b \nu S$ и $S\alpha_1 d\gamma_1 S$, ваља их и на крутој хартији нацртати па их у истој изрезати и путем опита одредити им тежишта q и p, кад знамо иста онда је:

$$\overline{qg} = \overline{Sp} + \overline{Sq}.$$

За равнотежу између диналичких и потенцијалних сила, нашли смо ову условну једначину:

$$\mathfrak{M}_{mx} = R\,\overline{pg}$$

па кад сад у истој једначини метемо место R вредност из једначине *(6)* добићемо да је:

$$\mathfrak{M}_{mx} = \frac{\kappa}{e} f. s.\ \overline{pq} \ldots . (8.$$

Али како нам за исти услов равнотеже одговара и једначина *(5)*, то кад једначину *(8)* са оном пад *(5)* сравнимо, наћићемо да је моменат лењивости:

$$J = f.\,s.\,\overline{pq} \;\ldots\ldots (9$$

који смо у стаљу да просто путем конструкције дакле графички одредимо.

Ми знамо како је неутрална осовина датог пресека у исто доба и тешка линија, дакле њоме је пресек *dabcd* подељен у така два дела, који према неутралној осовини имају исти статичан моменат, дакле ако површину пресека горњег дела над неутралном осовином означимо са f_1, а одстојање тежишта му од исте осовине рачунато са s_1 онда је $fs = f_1\,s_1$ дакле је и моменат лењивости целога пресека а за неутралну осовину, дат још и у овој једначини:

$$J = f_1\,s_1\,\overline{pq} \;\ldots\ldots (10.$$

Помоћу тих двеју последних једначина, у стању смо путем опита или построја, одредити моменат лењивости свакој могућој површини као пресеку тела, и то односно неутралне осовине пресека. Ово одређивање бива овако:

Ваља у датом нацртаном пресеку повући неутралну осовину, затим постројити површину једнаког напрезања, па онда ваља нам одредити тежишта делова датог пресека над и испод неутралне осовине, а исто тако ваља да одредимо тежишта деловима површине једнаког напрезања опет над и испод неутралне осовине и најзад ваљ да одредимо површине датог пресека а делова над и испод неутралне осовине; па кад смо све то нашли, онда је моменат лењивости дате поршине или пресека, а за неутралну осовину раван производу: из површине једног ма ког дела датог пресека, истом делу одговарајућег остојања тежишта му од неутралне осовине и из узајмног остојања тежишта делова површине једнаког напрезања.

Једначина линије, која нам ограничава обим површине једнаког напрезања ова је:

$$\eta = y \frac{x}{e}$$

и кад год је дато $y = f(x)$ наћићемо да је и:

$$\eta = \frac{1}{e} f(x)\, x = \frac{1}{e} \varphi(x).$$

Даље кад је паралелопипедна греда хоризонтално узидана а на њеном слободном крају дејствује изолована сила P, онда је максимални моменат на самом узиданом месту, и ако са l означимо дужину греде онда је $\mathfrak{M}_{mx} = Pl$, зато је за овај случај:

$$Pl = \frac{\kappa}{e} f. s. \overline{pq}.$$

Десну страну ове једначине можемо графички одредити, дакле по томе одредили смо и услов равнотеже између динамичке и потенцијалне силе графичким путем.

Врло је лако увидети да при одређивању момента лењивости неког пресека, највећа тешкоћа лежи у томе што имамо да одредимо квадратну садржину површине f, и кад неби имали при руци неки добар планиметар, могли би наћи садржину површине f тек само приближно, изузимајући такав случај ако се површина f даје разложити у правоугонике и троугле. Кад f не тачно одредимо, не тачно ћемо наћи ни вредност J (јер се s и $\overline{pq}$ даје путем опита врло тачно одредити).

У следећем показаћу још један метод, којим се може J одредити а да површину f и не меримо. Тај метод састоји се у овом:

Ми смо нашли да је неког пресека:

$$J = f. s. \overline{pq},$$

сад помножимо и поделимо десну страну једначине са производом $\gamma\chi$, у ком је производу γ дато у килограмима а χ у милиметрима у оној истој јединици у којој су $\overline{pq}$, s и f дати, па ћемо онда имати да је:

$$J = \frac{\gamma\chi . f. s}{\gamma . \chi} \overline{pq},$$

даље узимамо да имамо на расположењу неку материју кога је један кубни милиметар тежак γ килограма и начинимо од исте материје плочу која је дебела или висока χ милиметара, а њена горња и доља паралелна површина да има облик подударан облику површине f, то нам онда израз $\gamma\chi f$ преставља просто апсолутну тежину таке плоче, коју тежину ако са G означимо добићемо да је:

$$J = \frac{G. s. \overline{pq}}{\gamma\chi}.$$

Али ми можемо ради простијег рачунања узети да је χ равно јединици дужина, овде н. пр. равно једном милиметру, па је онда моменат лењивости:

$$J = \frac{1}{\gamma} G. s. \overline{pq} \; .\,.\,.\,. (11.$$

По овој последњој једначини у стању смо да одредимо количину J за ма каки пресек са највећом тачношћу, јер се добрим теразијама даје G тачно одредити, исто тако опитом налазимо s и $\overline{pq}$ тачно[1].

Пословање око изналажаја колчичине J ово је:

Ваља начинити материјалну плочу која је дебела н. пр. 1^{mm} ако нам је јединица дужина један милиметар, па онда изрежимо од те плоче цео профили ком имамо да одредимо количину J, затим пресећемо исту плочу по њеној неутралној осовини, и измерити на теразијама један или други део; даље тежину једног или другог дела поделићемо са тежином кубне јединице материјала од кога је плоча начинена (овде би била тежина материјала од једног кубног милиметра), па ћемо сада један или други количник помножити са отстојањем тежишта од неутралне осовине а оног дела плоче ког количник тежине будемо у рачу узели. Најзад овај производ (а оба производа даће нам истоветан број) помножићемо са количином $\overline{pq}$, (те зато морамо да имамо још и површину једнаког напрезања) те ћемо имати моменат лењивости датог пресека а за неутралну осовину. У слици 2 таблица D престављен је пресек шине система Хилф-а, а шрафирата површина у том пресеку јесте површина једнаког напрезања тог система. У слици 3 таблица D престављен је пресек шине система Хохенедер-а а у истој површини шрафирата слика представља нам површину једнаког напрезања истог система.

Примера ради применимо образац *(10)* за правоугољак кога висина нека је h а ширина b слика 4 таб. C. Неутрална осовина дели висину h у два равна дела и паралелна је ширини b (у оном случају кад је раван силе P нормална на ширини b). Површину једнаког напрезања састављају два три-

---

[1] Лако је увидети да је Gs статичан моменат материјалне плоче а за неутралну осовину пресека, који моменат можемо одредити нарочитим теразијама, мећући оцечену ивицу плоче над обртном осовином теразија.

угла SCD и SAB, даље овде је $ECDf = f = f_1 = \frac{bh}{2}$, тежиште површине $EFDC$ удаљено је од неутралне осовине за $\frac{h}{4}$, дакле је $s = \frac{h}{4}$, а тежиште p и q удаљена су од исте осовине за $\frac{2}{3}\,\frac{h}{2} = \frac{h}{3}$, зато је: $\overline{pq} = \frac{2}{3}\,h$, дакле је датог четвороугољка моменат лењивости:

$$J = \frac{bh}{2}\,\frac{h}{4}\,\frac{2}{3}\,h = \frac{bh^3}{12}$$

до ког резултата долазимо и познатим рачунским путем.

III.

Моменат лењивости подобних пресека.

Кад одговарајуће димензије два пресека имају сталан однос, онда ћемо такe пресеке звати подобнима; а у следећем показаћу како се може моменат лењивости подобних пресека одредити једним образцем у ком ће само једна димензија бити непозната. Најчешћи случајеви у инжињерској грађевини ти су, гди су дате динамичке силе по правцу месту и интезитету које на неко тело савијајући га дејствују, па кад је још дата и физичка природа тела, онда се тражи пресек истог тела који ће одржати на себи дејство максималног момента савијања а да се молекили пресека не напрегну преко границе еластицита. У овaком случају усвоиће инжињер неки облик пресека и знати само однос између разних димензија истога, а њихову величину имао би тек рачуном да одреди, који је код компликованих пресека врло заплетен, а ми ћемо ово рачунање и у овом случају избећи, користећи образце *10* или *11*.

Пошто смо се решили да нам конструкција у пресеку добије неки облик, ми ћемо онда пресек таког облика нацртати и то ма у којој размери а који ће бити траженом пресеку подобан. Оваком нацртаном профилу сматрајући га у његовој правој величини одредићемо моменат лењивости за неутралну осовину и то или по образцу *10* или по *11*. Даље ми можемо све димензије нацртаног профила одредити као функција или сразмерни део једне ма које димензије н. пр. профила сл. 3 од његове ширине d вертикалног ребра, дакле остале димензије да буду пропорционални део димензије d. Али како је моменат лењивости број из четири димензија, то је онда и моменат лењивости пресека у след горње поставке, раван неком сачиниоцу φ помноженом са d^4, дакле је:

$$J = \varphi\, d^4.$$

Ми имамо у цртежу таку димензију d од које хоћемо да све остале пропорцијонално зависе, а тако исто можемо наћи и бројну вредност количине J за пресек који смо нацртали, те тако смо у стању да израчунамо сачиниоца φ, јер је исти:

$$\varphi = \frac{J}{d^4}.$$

Кад смо нашли на тај начин бројну вредност сачиниоца φ, онда нам је врло лако наћи и моменат лењивости маком другом пресеку који ће бити нацртаном подобан а кога је још непозната она независна димензија d_1, јер је исти моменат:

$$J_1 = \varphi\, d_1^4 \;.\;.\;.\;.\; (12$$

или је:

$$J_1 = \left(\frac{J}{d^4}\right) d_1^4 \;.\;.\;.\;.\; (13.$$

Међутим при одређивању димензија пресека нуждан нам је отпорни моменат:

$$O = \frac{J}{e}$$

где нам e значи отстојање најудаљенијег моликила од неутралне осовине. Ми можемо у нацртаном профилу одредити и e и тако добити вредност:

$$O = \frac{J}{e}$$

у бројевима изражену. Но како је отпорни моменат израз од три димензије, а све димензије пресека узимамо за пропорционални део димензије d, то је отпорни моменат раван неком сачиниоцу ψ помноженом са d^3, дакле је:

$$O = \psi d^3$$

те је отуда:

$$\psi = \frac{O}{d^3}.$$

За подобан пресек, ком је независна домензија d_1 исто је тако отпорни моменат:

$$O_1 = \psi d_1^3 \ldots . (14$$

или је:

$$O_1 = \left(\frac{O}{d^3}\right) d_1^3 \ldots . (15.$$

Кад смо на тај начин израчунали сачиниоца ψ одпорног момента, моћићемо лако одредити и непознату димензију d_1 пресека који тражимо, јер је по теорији релативног еластицитета:

$$\mathfrak{M}_{\mathrm{mx}} = \kappa\, O_1 = \kappa\, \psi\, d_1^3$$

одкуда је:

$$d_1 = \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{M}_{mx}}{\kappa.\psi}} \quad \ldots . (16$$

у којој нам једначини значи κ дозвољено специфичко напрезање материјала у границама еластицитета, а то је молекиларно напрезање најудаљенијег слоја од неутралне осовине пресека, што долази на јединицу пресеки на том месту.

За греду која је у једном крају хоризонтално узидана а на другом слободном крају дејствује вертикално наниже сила P у отстојању l од узиданога пресека, имамо да је у том пресеку:

$$d_1 = \sqrt[3]{\frac{Pl}{\psi\kappa}}.$$

Ми смо дакле у стању да показаним путем одредимо димензију d_1, за конструкцију која има напрезањем њених молекила да одржава равнотежу динамичким силама, и сад ћемо моћи нацртати и прави профил у својој величини или одредити и његове остале димензије, које су пропорционални део димензије d_1; или ми можемо по већ нацртаном профилу и прави профил нацртати, кад нацртаног профила димензије у оној размери изменимо или прецртамо у којој размери стоје димензије d и d_1. Ово прецртавање најбоље се врши пропорционалним шестарем.

У колико се мој метод одређивања момента лењивости разликује од познатог подобног метода увидиће сваки стручњак, зато држим за излишно да ту разлику овде изнесем. Исто ће тако стручњаци увидити и то, да је показани метод тачнији и практичнији од познатог подобног метода.

Најзад биће интересантно да изложим укратко још један оргиналан и врло практичан метод одређивања момента лењивости, које одређивање постизава се просто једино помоћу теразија, и не тражећи површину једнаког напрезања. Овај је метод измислио Е. Брауер асистент на академији индустрија у Берлину, а саопштио је у листу: Verhandlungen des Vereines zur Berförderung des Gerwerbefleisses 1877 год. VIII Heft. Исти тај метод знао сам и ја још 1876 године и 1877 предавео моим ученицима на великој школи, но пошто је г. Брауер свој метод мене пре публикова то њему и приоритет припада. Основа исте методе у главноме је изречена већ у Вајсбаховој механици § 227 страни 443.

Метод Брауеров ово је: Узмимо н. пр. да одредимо моменан лењивости за пресек шине система Холфа слика 2, то ћемо по Брауеру радити овако: Ваља начинити тело датог пресека, па онда треба исто тело пресећи једном равни која пролази кроз дољњу ивицу тела дакле кроз MN а која је према пресеку нагнута под углом α. На тај начин добијамо неки особени клин кога је оштрица MN а ког је основа равна самом датом пресеку, затим ваља тај особени клин метути на теразије тако, да ивица MN дође управо над обртном осовином теразија, па кад на други крај теразија метемо тегова толико, док се теразије не доведу у равнотежу, онда је моменат лењивости датог пресека раван просто производу из тегова и отстојања тачке вешања тегова од обртне осовине, подељено још са специфичким теретом материјала и тангентом угла α, дакле ако дужину крака теразија о ком виси терет P означимо са l а специфични терет материјала од кога имамо клин са γ онда је:

$$J_м = \frac{Pl}{\gamma.\, tang.\, \alpha}$$

који моменат лењивости јесте за осовину MN, а за неутралну је осовину моменат лењивости пресека ово:

$$J = J_м - F.e^2 = \frac{l}{\gamma.\, tang.\, \alpha} .\ P - F.e^2$$

гди нам F значи садржну површине целог пресека, а e то је отстојање осовине MN од неутралне осовине пресека. Што се тиче γ то је дато у килограмима кад је P у килограмима а односи се на ону јединицу запремине коју јединицу узимамо за димензије пресека. Теразије Брауераве овако су конструисане: један крак истих теразија и то онај гди се меће клин, начињен је из пошироке плоче, које горња раван лежи у висини обртне осовине теразија а други је крак, гди је обешен тас просто дугачко призматичко тело, а испод обртне осовине има вертикалну казаљку, која ће показати равнотежу између клина и тегова у оном случају, кад је статичан моменат клина раван статичком моменту тегова а односно обртне осовине теразија. Кад је угао $\alpha = 45^0$ онда је просто:

$$J_м = \frac{Pl}{\gamma}$$

Оваке теразије уведене су већ по многим немачким фабрикама па се помоћу истих одређује сваком профилу шина и одговарајући моменат лењивости а и отпорни моменат за неутралну осовину, те тако има прилике да сваки, који купује таку шину или неки конструкциони део, зна му одма његову моћ ношења, чиме показује фабрика доброту њене конструкције. Браурове теразије дају се употребити исто тако и за подобне пресеке, за које важи оно што је пре овога а подобним пресецима речено.

У Београду $^{20}/_{XII}$ 1878 год.

Љубомир Клерић

ПРОФЕСОР МЕХАНИКЕ НА ВЕЛ. ШКОЛИ.

БАЛИСТИЧКИ ПРОБЛЕМ

КАКО СЕ ГЕОМЕТРИЈСКИ ПОСТРОЈАВА

„Ламезанова површина“.

Позната је ствар у спољној балистици, да ће барутни гас пројектилу из олучног топа — под иначе једнаким околностима — у толико даље бацити, у колико буде имала површина шиљка мањег отпора у ваздуху, као и то како је отпор ваздуха зависан од самог геометријског облика предњег дела пројектала и осим тога да има површина, које дају у лету кроз ваздух најмањи отпор. Између таких је на првом месту она површина коју су пронашли: пуковник Леополд Хафман 1861 г. и саксански генеларлајтнант W. H. v. Rouvroy (види: Artillerie Lehre... Andreas Rutsky... у 1871 год.): на другом месту долази површина барона Ламезана (баварски мајор артиљерије) о чему је написао расправу у: Archiv für diu officiere der konigl. preussischen Artillerie und Jngerieur Cors, 48. Band Seite 149. Berlin 1860 год. Прве, а и друге површине, није позната линеална геометријска конструкција, но их постројавају помоћу израчуњених координата. Мени је цељ у овој расправи да покажем мој метод, којим постројавам уздужан пресек Ламезанове површине (Неилове параболе) и то тачку по тачку а ово само помоћу линеала.

У цељи построја Ламезанове линије, посматрајмо аполонијеву параболу SDN слика 1 таблица A које теме нека је у S, њена главна осовина нека је AX, коју узимамо за X осовину, а SY на првој нормална нека је Y осовина, једначина исте параболе нека је:

$$y^2 = px \ldots . (1.$$

Даље узмимо њену макоју тачку н. пр. D и повуцимо кроз исту паралелну PP према осовини $\overline{XX}$, а у отстојању $\overline{ED} = d$; затим узмимо на истој параболи неку другу тачку m и пројицирајмо је паралелно SY оси на непомичну праву PP, па ћемо добити на истој нову тачку m^1 и најзад саставимо тачку m^1 са теменом S и кроз m повуцимо паралелну mn према SX осовини па нађимо пресечену тачку μ правих Sm^1 и mn. На овај начин радећи са свима осталим тачкама на параболи добићемо неки сљед тачака μ, дакле неку особену криву линију. Да одредимо геометријско значење оваке криве линије. Координате тачке m јесу x и y а тачке μ као што видимо јесу y, ξ. Из подобности троуглова $S\mu O$ и Sm^1p имамо ово:

$$\xi \; y = x \; d$$

те је:

$$\xi = \frac{x.y}{d} \ldots . (2$$

нама ваља наћи $y = f(\xi)$; дакле заменимо из $(1$ вредност за x у једрачини $(2$ па кад то учинимо биће:

$$y^3 = (pd) \; \xi \ldots . (3.$$

Ова једначина преставља нам кубну параболу, а и то је важно, јер иста линија налази њену примену у машинској грађевини. Даље испитајмо значење таких тачака λ

које апсциса нека је ξ а ордината x, а то значи тражимо криву линију чије је једначина:

$$x = \varphi(\xi).$$

Овакву једначину наћићемо кад у једначини (2 место y заменимо вредност из једначине (1, кад ово извршимо онда ћемо после довољног свођења добити оно што тражимо а то је:

$$x^3 = \frac{d^2}{p} \xi^2.$$

У слици нам је $\overline{o\lambda} = x$, па ако исту ординату заменимо са писменом η добићемо да је:

$$\eta^3 = \frac{d^2}{p} \xi^2 \ldots . (4$$

Крива линије тачка λ а преставлена једначином (4 преставља нам као што видимо просто Ламезанову линију или Неилову параболу са теменом у S, а кад се она окреће око X осовине, описаће Ламезанову обртну површину, која се употребљава за предњи део шиљатих пројектила.

Из начина како смо добили тачку λ а и једначину (4 видимо да Ламезанова линија постаје из аполонијеве и кубне параболе и то на овај начин: ваља обе параболе постројити за тим одредити тачке m и μ које имају исту ординату, па онда је опсциса тачке λ она иста која и тачке μ; а и тачке λ ордината, равна је апсциси тачке m; дакле построј је врло лак, и као што видимо линеалан.

Међутим важно ће бити то, да нађемо начина како ћемо постројити Ламезанову линију кад је дата нека њена тачка кроз коју има да пролази а у исто доба кад је дато и њено теме S. За овако проучавање није нам згодна једначина *(4* у таком облику, но ваља да је прекројимо, што ћемо постићи ако из *1* израчунамо p па онда заменимо у *(4* и то за случај кад у *(1* прво заменимо координате дате тачке D а ове нека су $\overline{SR} = x = h$ и $\overline{DE} = y = d$ онда је:

$$p = \frac{d^2}{h} \text{ дакле је по (4 и:}$$

$$\eta^3 = h.\,\xi^2 \ldots (5.$$

Из ове једначине читамо ову теорему: Ламезанова линија не зависи ниуколико од параболиних параметара, но зависи јединствено од одстојања тачке D од Y осе а то је она тачка у којој се речене две параболе секу, те зато узели оваку тачку D гдигод хоћемо у правој $DR \parallel Y$ а која је од S за h удаљена, добићемо свакада једну и исту Ламензонову линију. Ми можемо количину h назвати просто параметром Ламезанове линије. Даље ваља дознати још и знање количине h, а то ћемо добити ако будемо тражили ординату тачке λ које је апециса $= h$, дакле метимо у *(5* $\xi = h$ па ћемо добити да је за тај случај и

$$\eta^3 = h^3 \text{ или}$$

$$\eta = h.$$

Отуда други важан став је овај:

Права DE пролази кроз тачку Ламезанове линије која је једнако удаљена од X и Y осе, а параметар Ламезанове линије јесте једна од координата тачке њене, λ слика 4 таб. B која је једнако удаљена од X и Y осовине. Дакле кад је дат параметар h моћи ћемо постројити Ламезанову линију.

У цељи построја Ламезанове линије а за случај кад је дато теме S и друга тачка O слика 2 таблица B кроз коју има да линија пролази, ваља да дознамо још једно знање параметра h те да будемо у стању, да постројем његову линеалну вредност изнађемо. Нека су дакле координате тачке O ово: $\eta = CO = R$ и $\xi = SO = H$, а то ће бити у самој ствари као што се већ из слике види: H висина шиљка пројектила а R је полупречник стражњег цилиндарског тела. Уводећи горње вредности у једначини (5 добијамо да је:

$$R^3 = h\ H^2$$

откуда је:

$$h = \frac{R^3}{H^2} \ldots . (6$$

као шот је и једначина Ламезанове линије у другом облику ово:

$$\eta^3 = \left(\frac{R^3}{H^2}\right) \xi^2 \ldots . (7.$$

Дакле кад је дато R и H моћићемо лако наћи и h дакле отстојање оне праве од Y осе рачунато која са Y осом иде паралелно а у којој можемо D узети где хоћемо; саму вредност количине h по једначини (6 можемо наћи и постројем овако. Количину h по (6 можемо и овако израдити:

$$h = \left(\frac{R^2}{H}\right) \cdot \frac{R}{H}.$$

Метимо даље $\frac{R^2}{H} = \chi$ и $\frac{R}{H} = tang.\ \alpha$

па је:

$$h = \chi\ tang.\ \alpha \ldots . (8.$$

У слици 3 таблица A начињен је угао SOQ прав па је зато $\chi = \overline{CQ}$ даље повуцимо из C праву $CQ^1 \parallel SO$ те је онда угао $Q_1CQ = OSC = \alpha$ и катета $\overline{QQ} = h$. Најзад ваља од S пренети отстојање $SE = h$ и повући праву $DE \parallel SY$, па онда у такој правој можемо узети где хоћемо параболну тачку D, и постројити Аполонијеву и кубну параболу, а из њих Ламезанову линију која ће пролазити кроз дату тачку O и имати за теме тачку S. Овакав построј извршен је у слици 4. Тачка λ је она која једнако отстоји од X и Y осовине, даље са m означене су тачке Аполонијеве параболе а са μ тачке кубне параболе.

Из свега досадањег видимо, да је за дату димензију пројектила, Ламезанова линија или њена обртна површина потпуно одређена а сама конструкција линеална и веома проста.

23 Фебруара 1879 год.
у Београду

Љубомир Клерић
професор механике на вел. школи.

ГЛАСНИК

СРПСКОГ УЧЕНОГ ДРУШТВА

КЊИГА XLIX

СА 1 КАРТОМ

У БЕОГРАДУ
ШТАМПАНО У ДРЖАВНОЈ ШТАМПАРИЈИ
1881

ШТА ИМА У ОВОЈ КЊИЗИ

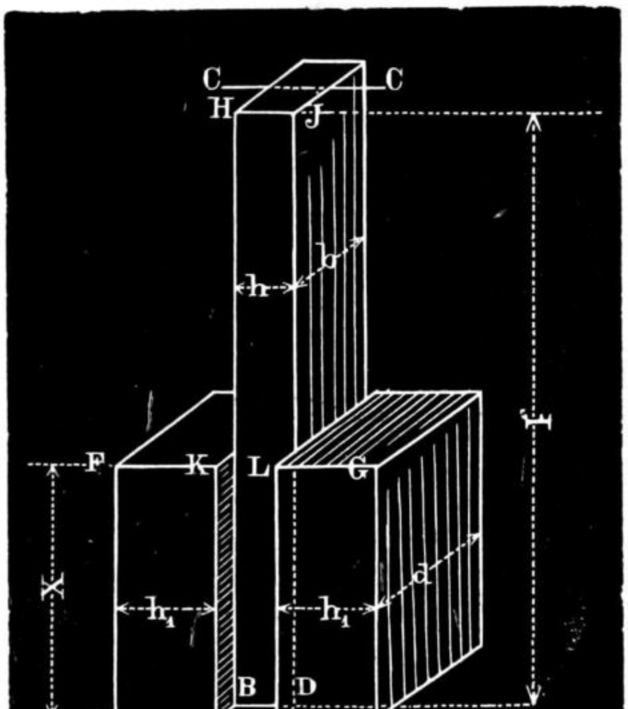
И ГДЕ ЈЕ ШТО.

СТРАНА

1. Прилошци к објасњењу извора српске историје, од И. Руварца 1
2. Књажевачки округ, са картом, од Ј. Мишковића 53
3. Балшићи, скице за историју Зете, од Ч. Мијатовића . . . 125
4. Компанзовано клатно не постоји, од Љ. Клерића 265
5. Одредба тежишта линија, полигона и равних површина, од Ј. Кнежевића 277
6 Пчиња, од А. С. Јовановића 318
7. Нова метода добијања a-динитро-фенила, од С. М. Лозанића 346
8. Неколико приложака експерименталној физици, од М. Петровића 350
9. Хрисовуља дечанског краља од год. 1326, од И. Јастребова 355
10. Рад‍ња и стање Срп. Уч. Друштва у 1878 год. 363

КОМПАНЗОВАНО КЛАТНО НЕ ПОСТОЈИ!

Да би доказао, како је досадања теорија о компанзовању физичких клатна у самом принципу погрешна, као и то, да није могуће начинити физичко клатно на које не би утицала промена температуре, а ово односно времена једне осцила-



ције — постројавајући овака клатна ма из каких комбинованих тела — ја ћу да испитам утицај топлоте на дужину математичког клатна, које ће са физичким — комбинованим — клатном исохроно клатити. У тој цељи склапам и ја физичко клатно из два разна тела, која имају разне сачиниоце истезања. У слици нацртано физичко клатно преставља нам BDJH јасно паралело-попедно тело ког је дужина DJ = l, а ширина нормално на осовини CC мерена, = b, даље обртна осовина (CC) клатна лежи у горњој површини HJ реченог тела и то у симетричкој равни истога, маса овог тела је m_1, тежина јединице запремине — специфичан терет — јесте γ_1, а топлотни сачинилац истезања α. На доњем делу BD тела BJ дометута су два паралелопипеда ABKF и DEGL, са обе стране првог паралелопипеда, но тако да површине AB, BD и DE леже у истој хоризонатној равни, која раван спојена је са реченим површинама; осим тога дометути паралелопипеди могу се слободно кретати дуж равни BH и DJ првог или средњег паралелопипеда. Дужина дометутих паралелопипеда нека је AB = GE = x, димензија управна на обртној осовини CC нека је d, а масе њихове нека су m'_2 и m'_2, даље сума ових маса нека је m_2, специфичан терет истих маса нека је γ_2 а топлотни сачинилац истезања β. Најзад димензије сва три паралелопипеда у правцу обртне осовине мерења нека су HJ = h и FK = LG = h_1.

У цељи одредбе времена једне осцилације, морамо да знамо средиште клатења, које је, као што из динамике знамо, у исто доба и средиште удара за обртну осовину CC. Но одстајање оваке тачке за описани систем тела, раван је моменту лењивости истог система, подељеним са статичким моментом а однесено обоје на обртну осовину CC. Означимо дакле са J_{co} и $\mathfrak{M}_{co}$ моменат лењивости и статичан моменат физичког клатна односно осовине CC, и то на температури $t = 0^0$, тако исто означимо са L_{co} одстојање средишта клатења од осовине CC мерено а на температури $t = 0^0$, онда је L_{co} у исто доба и дужина математичког клатна које би са описаним физичким клатном исохроно клатило, дакле је:

$$L_{co} = \frac{J_{co}}{\mathfrak{M}_{co}}$$

По описаној слици а на основу теорије о моменту лењивости физичких тела знамо да је:

$$J_{co} = \frac{1}{12} m_1 \left(l^2 + b^2\right) + \frac{m_1}{4} \cdot l^2 + \frac{1}{12} m_2 \left(x^2 + d^2\right) + m_2 \left(l^2 - \frac{x}{2}\right)^2$$

одовуд после довољног свођења добијамо да је:

$$J_{co} = \frac{1}{12} m_1 \left(4m_1 + 12m_2\right) l^2 + \frac{1}{3} m_2 x^2$$

$$+ \frac{1}{12} m_1 b^2 + \frac{1}{12} m_2 d^2 - m_2 l x \ldots (1$$

Даље статистички моменат истог тела за осовину CC јесте:

$$\mathfrak{M}_{co} = m_1 \frac{1}{2} + m_2 \left(l - \frac{x}{2}\right) \quad \text{или:}$$

$$\mathfrak{M}_{co} = \frac{1}{2} \left(m_1 + 2\, m_2\right) l - \frac{m_2}{2} x \ldots (2$$

На температури t^0 C, промениће се све димензије дакле и моменат лењивости заједно са статичким моментом. Ако сад моменат лењивости и статички моменат према истој осовини CC а за температуру t^0 C означимо са J_{ct} и M_{ct}, добићемо да је:

$$J_{ct} = \frac{1}{12} \left(4m_1 + 12\, m_2\right) l^2 \left(1 \pm \alpha t\right)^2$$

$$+ \frac{1}{3} m_2 x^2 \left(1 \pm \beta t\right)^2 + \frac{1}{12} m_1 b^2 \left(1 + \alpha t\right)^2$$

$$+ \frac{1}{12} m_2 d^2 (1 \pm \beta\, t)^2 - m_2\, l x\, (1 \pm \alpha\, t)\, (1 \pm \beta t)$$

одавде после довољног свођења изилази да је:

$$J_{ct} = J_{co} + \left\{ \frac{1}{12} (4m_1 + 12m_2) l^2 + \frac{1}{12} m_1 b^2 \right\} \left\{ \alpha^2 t^2 \pm 2\alpha t \right\}$$
$$+ \left\{ \frac{1}{3} m_2 x^2 + \frac{1}{12} m_2 d^2 \right\} \left\{ \beta^2 t^2 \pm 2\beta t \right\}$$
$$- m_2 l x \left\{ \alpha\beta t^2 \pm \left(\alpha + \beta\right) t \right\} \ldots\ldots (3$$

као што је и:

$$\mathfrak{M}_{ct} = \frac{1}{2} \left(m_1 + 2m_2 \right) l \left(1 \pm \alpha t \right) - \frac{m_2}{2} x \left(1 \pm \beta t \right)$$

или: $$\mathfrak{M}_{ct} = \mathfrak{M}_{co} \pm \frac{1}{2} \left(m_1 + 2\, m_2 \right) l\, \alpha\, t \mp \frac{m_2}{2} x\, \beta\, t \ldots. (4$$

Оба последња израза можемо написати скраћено и у овом општем облику:

$$J_{ct} = J_{co} + f(x, t) \ldots. (5.$$

и

$$\mathfrak{M}_{ct} = \mathfrak{M}_{co} + \varphi (x, t) \ \ldots (6.$$

гди нам $f(x, t)$ и $\varphi(x, t)$ значе промене момента лењивости и статичког момента на разним температурама.

По овоме дакле, дужина Lct математичког клатна које би са нашим физичким клатном на температури t^0C исохрано клатило, јесте дата овим изразом:

$$L_{ct} = \frac{J_{co} + f(x, t).}{\mathfrak{M}_{co} + \varphi (x, t.)} \ldots. (7$$

Ову последњу једначину ваља сада у даљем да проучимо, те да видимо, да ли је могуће построити физичко клатно, које би било компанзовано, дакле да му време једне осцилације буде исто на свима температурама (на којима су α и β стални бројеви). Ми би дакле имали да нађемо вредност за дужину x, те да на свакој температури буде L_{ct} равно L_{co}, дакле условна једначина за компанзацију клатна јесте:

$$L_{ct} = L_{co} = \text{Const} \; . \; . \; . \quad (8.$$

Последњу једначину можемо на два начина задовољити:

1) кад ставимо:

$$\frac{J_{co} + f(x, t)}{\mathfrak{M}_{co} + \varphi(x, t)} = \text{const} \; . \; . \; . \; . \; (9.$$

Али из ове једначине добијамо ово: да за свако друго t одгова и друга вредност за дужину x, ово другим речма тумачено једначина (9) исказује немогућност компанзације, пошто је x стална вредност која одговара дужини дометутих паралелопипеда на температури $t = 0^0$ C, а ово је исто и са свима осталим димензијама које у рачуну имамо.

2) друга комбинација могућности једначине (9) била би та кад би ставили да је:

$$\frac{J_{co} + f(x, t)}{\mathfrak{M}_{co} + \varphi(x, t)} = \text{const} = L_{co}.$$

што би био случај кад метемо да је:

$$\left.\begin{array}{r} f(x, t) = 0 \\ \text{и} \quad \varphi(x, t) = 0 \end{array}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; (\alpha$$

По природи самих функција $f(x, t)$ и $\varphi(x, t)$ — по једначинама (3) и (4) — видимо да би ова друга могућност наступила само на двема температурама и то прво за температуру $t = 0^0$ а друго за ону температуру t_1^0, и t_2^0, које би се израчунала из једначина под (α) и то, пошто прво израчунамо вредност x из друге једначине под (α) и исту заменимо у првој под (α) па решимо по температури, добијамо ту другу вредност t_1^0. То значи дакле да ће за неку вредност дужине x бити само две температуре и то је једна $= 0^0$ а друга $= t_1$ за коју ће бити $L_{ct} = L_{co}$; за све друге температуре (t) биће $L_{ct} \lesseqgtr L_{co}$. Дакле и ова друга комбинација даје нам немогућност компанзације.

Проучимо ли даље једначине под (α) са чисто математичког гледишта, то ћемо наћи још једну привидну могућност компанзације, а ова би била ова: узмимо нека су нам димензије d и x на температури $t^0 = 0^0$ непознате, па онда кад би математичка природа функција: $f(x, t) = f_1(x, d, t)$ и $\varphi(x, t) = \varphi_1(x, d, t)$ била таква да се исте дају разложити на овакове:

$$f(x, d, t) = F(x, d)\, f_{II}(t) \text{ и } \varphi_1(x, d, t) = \psi(x, d)\, f_{III}(t)$$

онда би било:

$$F(x, t) = 0, \text{ и } \varphi(x, t) = 0$$

за ма коју вредност температуре t, само кад би било

$$\text{и} \quad \left.\begin{aligned} f(x, d) &= 0 \\ \psi(x, d) &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots . \beta$$

те отуда могли израчунати x и d.

Горњу поставку можемо доиста и постићи, и то просто тиме кад узмемо да је $\alpha = \beta$, то би значило ваља комбинисати клатно из тела којих су сачиниоци истезања једнаки. Али кад би по нашем задатку решили једначине под (β), као што сам ја то и извршио, добијамо за x две стварне и позитивне вредности, док на против димензија d изилази иматиперна, као што се другом чему нисмо ни могли надати. Дакле и овакава комбинација доводи нас до немогућности компанзације.

Даље било би могућа и ова комбанација. Једначини (9) можемо и овај облик да дамо:

$$F\ (\alpha,\ \beta,\ t)\ =\ \mathrm{const}\ .\ .\ .\ .\ .\ (10$$

у ком случају узимамо да су све димензије клатна дате, а да је или α или β променљиво. Дакле кад би имали тако физичко тело за које би се н. пр. β према температури t тако мењало, те да једначину (10) задовољава, компензација била би могућа. Но мени се чини да немамо у природи тако тело, ког би се сачинилац β на температурама тако мењао те да задовољи једначину (10).

Осим до сада изведенога о компанзацији клатна, важно је још и ово: уредимо једначину (3) и (4) по степенима променљиве количине t, па ћемо онда добити — ако само један знак $+$ узмемо — да се исте једначине дају и у овом облику написати:

$$11,\ J_{ct} = J_{co} + \left[\left\{\frac{1}{12}\,(4m_1 + 12\,m_2)\,l^2 + \frac{1}{12}\,m_1\,b^2\right\}\alpha^2 + \left(\frac{1}{3}\,m_2\,x^2 + \frac{1}{12}\,m_2\,d^2\right)\beta^2 - m_2\,\alpha\,\beta\,l\,x\right]t^2 + \left[\left\{\frac{1}{6}\left(4\,m_1 + 2\,m_2\right)l^2 + \frac{1}{6}\,m_1\,b^2\right\}\alpha + \left(\frac{2}{3}\,m_2\,x^2 + \frac{1}{6}\,m_2\,d^2\right)\beta - m_2\,(\alpha + \beta)\,l\,x\right]t.$$

и

$$12,\ \mathfrak{M}_{ct} = \mathfrak{M}_{co} + \left\{\frac{1}{2}(m_1 + 2m_2)\,\alpha\,l - \frac{m_2}{2}\,\beta.\,x\right\}t.$$

Дакле ако хоћемо да построимо компанзовано клатно мора да буде $L_{ct} = L_{co}$ или $J_{ct} = J_{co}$, и $\mathfrak{M}_{ct} = \mathfrak{M}_{co}$ а овај услов биће исуњен кад су испуњена ова три што сљедују, т. ј. мора да је то (11) и (12):

$$\frac{1}{12}\left\{(4m_1+12m_2)\ l^2 + m_1 b^2\right\}\alpha^2$$

$$+\left(\frac{1}{3} m_2 x^2 + \frac{1}{12} m_2 d^2\right)\beta^2 - m_2 \alpha \beta l x = 0 \ldots . \text{ I.}$$

$$\frac{1}{6}\left\{\left(4 m_1 + 12 m_2\right) l^2 + m_1 b^2\right\}\alpha$$

$$+\left(\frac{2}{3} m_2 x^2 + \frac{1}{6} m_2 d^2\right)\beta - m_2\left(\alpha+\beta\right) l x = 0 \ldots . \text{ II.}$$

(ове две једначине вреде за компанзацију балансијера код крoнометра) и

$$(m_1 + 2 m_2)\, \alpha l - m_2 \beta x = 0 \ldots\ldots (\text{III.}$$

Пошто смо овим путем добили три условне једначине, то нам ваља у конструкцији клатна узети три условне димензије, а ове нека су: x, b и d; а да би решење задатка што простије испало, узмимо нека је $m_1 = n m_2$ где је n неки апсолутан број а овде је н. пр., $n = 1$ дакле $m_1 = m_2$, одкуд изилази да је:

$$\gamma_1\, l\, h\, b = 2\, \gamma_2\, x\, h_1\, d \ldots . \text{ IV.}$$

због чега можемо узети да нам је и h непознато. Даље кад последњим једначинама додамо још и ову пету условну једначину:

$$L_{co} = \frac{J_{co}}{\mathfrak{M}_{co}} \ldots (\text{V.}$$

и ако узмемо да нам је дужина L_{co} дата, као и домензија h, онда ћемо моћи и шесту непознату домензију l израчунати.

Ми имамо дакле свега пет непознатих димензија а ове су: x, b, d, l и h, које ћемо из датих пет једначина (I—V) моћи израчунати.

Да пређемо сада к израчунавању непознатих вредности. Пошто уведемо у једначинама I, II и III $m_1 = m_2$, онда нам исте прелазе у ове:

$$\alpha\beta l x = \frac{4}{3}\alpha^2 l^2 + \frac{1}{12}\alpha^2 b^2 + \frac{1}{3}\beta^2 x^2 + \frac{1}{12}\beta^2 d^2 \,..\, \mathrm{I}'$$

$$(\alpha+\beta)\, l\, x = \frac{8}{3}\alpha l^2 + \frac{1}{6}\alpha b^2 + \frac{2}{3}\beta x^2 + \frac{1}{6}\beta d^2 \,..\, \mathrm{II}'$$

$$3\alpha l = \beta x \,.\, \mathrm{III}'$$

из ових трију једначина добијамо за: x, b и d ове вредности:

$$x = 3\frac{\alpha}{\beta} l \,.\,.\,.\,.\, (A$$

$$b = l\sqrt{2} \,.\,.\,.\,.\, (B. \qquad \text{и}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} l \sqrt{-18} = \frac{\alpha}{\beta} l\, 3\sqrt{-2} \,.\,.\,.\,.\, (C$$

дакле димензија d изилази уображена, па зато је зада так компанзије клатна и у оваком случају комбиновања условних једначина, немогућ.

Још нам остаје да дознамо, да ли је могуће компанзовати баланс или хоризонатно клатно код кронометра. Зарад овога довољно је да буде моменат лењивости за осовину која иде кроз тежиште баланса — и која у исто доба нека је и осовина симетрије, дакле нацртана слика да нам преставља половину баланса — на свима температурама сталан. Довољне су дакле условне једначине I' и II'. У овом задатку узећемо да су нам x и d непознате димензије, а остале да се одреде из неких других услова. Из једначина I' и II' добијамо са x и d, ове вредности:

$$\mathrm{x} = \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{1}{6}\,\frac{\mathrm{b}}{1} + \frac{8}{3}\,l\right) \;.\;.\;.\;.\; (\mathrm{D.} \text{ и}$$

$$\mathrm{d} = \frac{\alpha}{\beta}\sqrt{12\,\left(-\,\frac{87}{108}\mathrm{b}^2 - \frac{96}{27}\,l^2 - \frac{1}{36}\,\frac{\mathrm{b}^4}{l^2}\right)} \;.\;.\;.\; (\mathrm{E}$$

Овај последњи израз, као што је врло лако увидети, даје нам за d уображену вредност, а то значи да није могуће ни балансије — немир — у кронометру компанзовати.

Најзад лако је увидети, да је једначина под (7) општа за сва физичка клатна ма каковог геометријског облика, те зато онда можемо горње резултате о компанзацији физичких клатна сасвим у опште да изкажемо, т. ј. да није могуће физичка тела, која имају разне сачиниоце истезања, тако комбиновати, те да добијемо у тој комбинацији компанзовано физичко клатно. Ово исто важи наравно и за балансије — замајац, немир — код кронометра.

Нема сумње да је ова моја теорија о немогућности компанзације, важна за физичаре и астрономе, који су до сада заједно са мном у компанзовано клатно веровали. Морам се и сам чудити, како ову немогућност, физичари, астрономи, и меканичари нису још одавна пре мене сазнали. Узрок овога, држим да је веровање у aукторитет онога, који је први дошао до идеје о компанзацији и за исту врло обманљиву теорију поставио. Привидно компанзовано клатно измислио је енглез Грахам (Graham) у 1721 години.

Досадања теорија о прорачунавању димензија компанзованих клатна, оснивала се, као што нам је познато на томе, да се дужина математичког клатна стављала равна алгебарној суми извесних линеарних димензија, а у овоме и лежи грешка теорије. Кад се узме у обзир право значење дужине математичког клатна које ће са одговарајућим физичким клатном исохроно клатити, а дужина је иста равна одстојању средишта клатења физичког клатна мерена од обртне осовине, онда ће се врло лако увидети да овака дужина није оно исто што и просто геометријско одстојање, но да је иста дужина функција поглавито још и од распореда масе система према обртној осовини, осим тога је зависно од квадрата одстојања материјалних делића од обртне осовине, а у исто је доба функција тих димензија и у првом степену. По до сада познатој теорији о привидној компанзацији, имамо доиста једну тачку у физичком клатну које је одстојање од обртне осовине на свима могућим променама температуре стално, али овака тачка није средиште клатења, но се иста само на $t = o$ и $t = t_1$ са средиштем поклапа. И по овој новој теорији имамо једну тачку у физичком систему клатна, која је на свима температурама у сталном одстојању од обртне осовине CC, а ова је тачка тежиште система, што добијамо из решења друге једначине под (α); ово је и природно, јер је статичан моменат — од чега зависи место тежишта — сталних маса функција само једне димензије у првом степену.

Ми знамо да је дужина математичког клатна, које би са физичким клатном исохроно клатило, дата и у овом изразу;

$$L_{co} = \frac{k^2}{a} = a$$

где нам је k полупречник замаивања физичког система за обртну осовину кроз његово тежиште, а количина a је одстојање тежишта од обртне осовине. Дакле и ако је могуће да нам је a на свима температурама стално, то није могуће да и k у исто време стално остане, као што смо се о овом уверили код компанзација кронометарског баланса, зато је дакле и L_{ct} на разним температурама различито од L_{co} и компанзација немогућа.

Радујем се што што је мени пало у део, да оборим досадању теорију о компанзацији физичких клатна и докажем немогућност овога проблема; но и жао ми је у исто доба, што немамо начина да компанзовано клатно построимо, међутим за науку је опет зато добит, а то је, да се не верује у оно што не постои.

20. Фебруара 1880.
у Београду.

Љуб. Клерић
професор механике на вел. школи.

ГЛАСНИК

СРПСКОГ УЧЕНОГ ДРУШТВА

КЊИГА LI

У БЕОГРАДУ

У КРАЉЕВСКО-СРПСКОЈ ДРЖАВНОЈ ШТАМПАРИЈИ.

1882

Шта има у овој књизи
и где је што

СТРАНА

1. Трагови преисторијског човека у Србији, од Феликса Хофмана 1
2. О старом гробљу у Подрињу, извештај Љуб. Клерића и дра Лазе Докића 22
3. Теорија и практика компанзације клатна, од Љубомира Клерића 26
4. Додатак мојим белешкама из Старе Србије, од Јастребова 53
5. О св. Луци и пренашању његовог тела. Рукопис српски друге половине XV века. Изнео Ив. Павловић . 70
6. Хронолошке белешке Нићифора Григоре о Краљу Милутину, од Ив. Павловића 101
7. Српска писма у француским архивама, изнео Ив. Павловић 113
8. Неколико нових интегралних образаца, од Дим. Нешића, проф. вел. школе 138
9. О дејству сумпор-угљеника на p-нитранилин, од С. М. Лозанића 148
10, Дејство азотне киселине на трибром-анилин (обичан), од С. М. Лозанића 151
11. Статистичан преглед нашег привредног и друштвеног стања, с обзиром на привредно и друштвено стање других држава, (наставак), од Вл. Јовановића . . . 158

О СТАРОМ ГРОБЉУ У ПОДРИЊУ.

Прошле године изаслало нас је учено друштво да испитамо старо гробље у селима: Батру, Борини, и Радаљу. Месеца октобра 1879 године предузели смо посао испитивања на реченим местима, и бавећи се ту са откопавањем, не би ли нашли каквих остатака може бити од неких украса, или какву лобању, несмо ништа од тог двога нашли, осим само по неке мале делиће иструлеле лобање. Посматрајући положај појединих гробова н. пр. близу села Батра, а на левој обали боринске реке и то од исте удаљено око 200 метара поред оног друма идући к Радаљу, нашли смо да су сви гробови у правцу север југ магнетног меридијана и да је глава мртваца била окренута северу а ноге југу дакле је мртвац лицем гледао на југ. Над главом мртваца усађен је споменик, (као што такове таблица показује) од мрамора или од сијенита, а лицем окренут на југ. На тим споменицима изрезати су релијефи, као што слике на таблици показују. У гробљу код Батра на левој обали Боринске Реке, ценимо да има около 70—80 гробова и готово над сваким по један обелискаст споменик од највеће висине до 1,3 м. За наше испитивање био је најважнији споменик онај који смо нашли у селу Борини а на месту званом Палучица који је од друма за Радаљ удаљен уз

Боринску Реку за 6800 метара. На истом месту нађосмо једно омалено гробље са споменицима којих је облик нацртан у слици 1. табл. I, око 40 метара идући од гробља уз Боринску Реку, а на самом путу, нађосмо на једну повелику плочу, која је у слици 2. табл. I. представљена. Ова је плоча подељена једним уздужним гребеном *cd* на два равна дела *a* и *b*. На десном делу је релијефно испупчено изрезана — по нашем мишљењу — рука са чекићем или пијуком у њој, а на левој страни види се једна испупчена полукугла *f* а испод ње нека алатка *c* у виду српа. Идући и даље уз обалу Боринске Реке наиђемо и на приличну количину заосталих старих згура (шљака) а поред истих на десној обали боринске реке и заосталих старих поткопа и окана у кречном камену. Из материјала који је из поткопа вађен и који је пред истим још и сад нагомилан, видели смо да је ту вађена оловна руда, а о овом нас је уверила и та околност што смо у згурама нашли још и металног олова у виду зрнаца.

Највеће гомиле шљака налазе се у селу Борини на обалама Боринске Реке а месту званом Метаљка.

Уз Боринску Реку, а од Палучице удаљено још око 3000 метара, водили нас борински сељаци на стара окна, која се налази око 250 м. високо над коритом Боринске Реке а на вису званом Костајница. Овде смо доиста видели два по својој прилици веома дубока окна, о чему смо се уверили бацањем камена у иста. Ова су окна врло неправилна, гранају се на ниже на разне начине, од куда се даје закључити да им је руда правац одређивала. Ту се може само то важно опазити да је камен вађен без употребе барута, но чекићима или пијуцима, као што се местимице неки остатци рада са пијуком и виде. Сељаци нам тврђаху да се у гранама окна може врло лепо распознати како су камен дубили и тесали, те се тако у унутарњост камена увлачили.

Из оваких података о заосталим старим топионицама и рудницима, закључујемо да ће и на слици 2. представљен релијеф на страни *b* бити рука са рударским чекићем, тупи крај чекића, а то је леви, служио је за разбијање камена, десни пак или зашиљени крај за резање или дубљење камена, као што такове справе и данас у рударству имамо. На страни *a* представљен релијеф *e* може бити да представља неку топионичку алатку (жарач). Ово би било дакле прво место у Србији где се налазе рударски емблеми.

Код гробља близу села Батра на левој страни главног пута идући Радаљу, ископали смо један камен који је лепо очуван и који је на слици 3. представљен. Ту смо га и оставили док не настане лепше време те да се у Београд за музеј донесе, о чему смо известили и г. начелника лозничког и молили да првом приликом пошље извађени споменик у Београд.

Слика 4. показује опет неки особени облик спомена у виду саркофага, и овај смо камен ископали, не би ли испод њега нашли на какве остатке од значаја, па и ту не беше ништа. Камен је једноставан а по назначеним котама види се какве је велике димензије.

Идући из Борине 4000 метара друмом на М. Зворник, пред Радаљском Реком а опет лево поред друма налази се старо гробље са споменицима готово истога облика као и у Борини. Слика 5. и 6. представља опет један саркофаг у реченом гробљу. У слици 5. представљен је предњи део који је на југ окренут, а у слици 6. стражњи део који гледа на север. Од овог места па и преко Радаљске Реке готово близу М. Зворника налази се лево и десно од пута све једно и исто камење.

Ми смо прелазили и у Велики Зворник, и уверили се да су иста така гробља и на левој обали Дрине, а по казивању тамошњих, још у већем броју но на нашој страни или десној обали Дрине.

Бечка академија наука изаслала је своје археологе и једнога антрополога, да проуче гробље поред Дрине. То је и учињено и опремљена су за бечки музеј два споменика, онакова, каквих се и на нашој страни находи. Један од такових престављен је у слици 7. који се у неколико од наших разликује.

Ми нисмо наишли ни на један камен са натписом, међутим сељаци борински казали су нам да је тамо био и г. М. Милојевић, и да је један споменик са натписом и то српским однео са собом; овај смо споменик видели у авлији читаонице лозничке, но ми несмо били у стању да прочитамо шта је написано. У самој ствари јесу старославенска писмена. Вредно би било да се и тај камен донесе у наш музеј.

Љуб. Ковачевић

и

Др. Лаза Докић.

ТЕОРИЈА И ПРАКТИКА КОМПАНЗАЦИЈЕ КЛАТНА.

од

ЉУБОМИРА КЛЕРИЋА.

I.

Најновија историја компанзације клатна.

Кад сам у 1880 години изишао на јавност са мојом теоријом о компанзацији физичког клатна, и то на немачком језику у виду једне монографије, дошла је иста монографија до руке једном барлинском сајџији R. Stäckel-у, који уређује у Берлину један сајџијски лист: „Deutsche Uhrmacher Zeitung“. Уредник овог листа, као познати пријатељ напретка сајџијске вештине, прештампао је моју монографију у бројевима 10 и 11 1880 године. На овај мој рад, на кратко време после публиковања, изашле су у истом листу три критике и то две од сајџија: Fisterer-а и Grosmann-а, а једна од W. Förster-а професора астрономије на берлинском универзитету и управника звездарнице у Берлину. Критика прве двојице написата је у том смислу, како се практика мало може користити мојим радом, а то веле с тога, што оборив стару теорију компанзације, несам на место ње поставио нешто друго што би имало у практику да уђе, па веле још даље, при свој тој новој теорији, којим се доказује немогућност компанзације, не остаје нам опет ништа друго, но да од свију обсурних компанзованих клатана опет зато и даље такова у сахатовима употребимо. Првом критичару одговорио сам и показао да само обарање досадање теорије и доказ да је немогуће постројити компанзовано клатно има опет зато своје практичке вредности, а ова лежи поглавито у томе, да од сада не верују више практичари у оно што не постоји, а осим овога, знајући да немају компанзовано клатно, моћи ће помоћу мојих једначина у свези са температуром израчунати и грешке клатна, или начинити за сваки сахат табеларни преглед грешака на разним температурама. О оваким грешкама није до сада нико ни помишљао, пошто се мислило да имамо клатно које је не грешимо. Другом критичару нисам одговарао пошто је истог критика у смислу прве написата била, те је одговор првом могао послужити за одговор и другом критичару.

Међутим, за мене најпретежнији критичар беше познати научењак W. Förster. Професор F. написао је критику на моју теорију у реченом листу № 18. У критици својој напада ме најјеткијим гласом, употребљавајући просто празне фразе а без икаквог научног значаја, говорећи да ми је цела теорија од почетка па до краја погрешна, не употребив при том ни један математички доказ. Професор F. ослања се дакле у тој критици просто на двестагодишње ауторитете, дакле верујући у њихову неистиниту и уображену теорију не одобрава нити признаје моју теорију која је тако јасно и строго математички доказана. Читајући ја овај напад морао сам се чудити таком ограниченом уму који на берлинском универзитету чак и астрономију предаје, а овамо не увиђа чисту математичку истину која незна за ауторитет, но којој се сваки поклонити мора. Професор F. вели даље, па ако би ја и њему понова доказао да и он тако исто обсурдно мисли као и они двестагодишњи ауторитети којима теорију обарам, онда вели он, вама читаоцима не остаје ништа друго но то: или ћете да верујете мени и двестагодишњим ауторитетима, или у „нихилистичку“ теорију која нам са далеке дунавске обале овамо до нас довејава, а од ауторитета, који при свем том има својих важних заслуга у овом питању.

На оваку критику ваљало ми је наравно одговорити и професору F. па доказати да и он, заједно са умрлим а двестагодишњим ауторитетима а ти су: Graham, Dent, Kessels, Tiede и т. д. погрешно мисли. У мом одговору, који сам послао уреднику речених новина, доказивао сам и по други пут и на други начин истинитост моје теорије. Али на моје чуђење, вратио ми је уредник мој одговор натраг и то после $1\frac{1}{2}$ месеца, и ако ми је у првом свом писму — о овој ствари — јавио да ми рад прима. У писму којим ми је уредник мој одговор вратио, одговорио ми да ми мој одговор професору F. просто не сме штампати, пошто се мојим одговором понижава један између највећих ауторитета немачке.

Дакле мој одговор није примљен, зато ћу ја овде кратко изложити само математичке доказе, који су били намењени професору F. и који би га из заблуде извели. Нови докази о истинитости моје теорије, дакле о немогућности компанзације ови су:

Први доказ. Једначине I' и II' моје теорије (види Гласник српског ученог друштва књига XLIX) можемо и овако написати:

$$\left(\frac{8}{3}l^2+\frac{1}{6}b^2\right)\alpha^2+\left(\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{6}d^2\right)\beta^2-2\,(lx)\,\alpha\beta=0\ldots(1$$

и

$$\left(\frac{8}{3}l^2+\frac{1}{6}b^2\right)\alpha+\left(\frac{2}{3}x^9+\frac{1}{6}d^2\right)\beta-(lx)\,(\alpha+\beta)=0\ldots(2$$

Који би хтео да докаже да је могуће постројити компанзовано клатно, ваљало би му доказати да једначине 1 и 2 у исто доба постоје, а да ли је ово могуће видећемо сада. У тој цељи испитајмо какве вредности ваља да имају сачиниоци α и β, па да нам горње једначине вреде, то значи за дате димензије клатна тражимо одговарајуће материје, којих је сачиниоц истезања α и β.

Ради одредбе α и β, можемо горње једначине написати и овако:

$$A\alpha^2 + B.\beta^2 - 2\,C.\alpha\beta = 0 \;.\;.\;.\;.\; I$$

и

$$A\alpha + B.\beta - C(\alpha + \beta) = 0 \;.\;.\;.\;.\; II.$$

Где су нам A, B и C сталне количине, а њихова се вредност види јасно из једначина 1 и 2. Из прве једначине (I) добијамо да је:

$$\alpha = \left(\frac{C}{A} \pm \sqrt{\left(\frac{A}{C}\right)^2 - \left(\frac{A}{B}\right)}\right)\beta = D.\beta \;.\;.\;.\;.\; III$$

где нам D значи сталну количину у загради. Кад ову вредност заменимо у II и уредимо по β добићемо да је најзад:

$$\beta\,\{(AD + B) - (D + 1)\,C\} = 0 \;.\;.\;.\;.\; IV.$$

Ова једначина постојаће кад буде било $\beta = 0$, па кад буде ово било, онда ће нам по (III) испасти и

$$\alpha = \beta = 0 \;.\;.\;. (\alpha.$$

Ово је могло да буде тек онда ако је сачиниоц од β једначине IV различан од нуле.

Дакле одовуд добијамо ово: компанзација постоји тек онда, кад је $\alpha = \beta = 0$, то значи дакле другим речма да компанзација не постоји јер ми немамо ни једно тело у природи које се усљед промене температуре не би у запремини мењало. Кад би имали случајно тела у природи за која би био $\alpha = \beta = 0$, онда нам у таком случају не би било ни потребно да клатно из различитих тела комбинишемо, но просто клатно од таких тела начињено било би у исто доба и оно, на које не би температура упливисала.

Једначина IV могла би и онда постојати кад би сачиниоц од β био раван нули.

А како ми о осталим количинама, које се у реченом члану налазе, нису предпостављали никакове услове, то ову поставку неможемо ни усвојити зато постоји онај први услов, т. ј. једначине 1 и 2 постојаће у исто доба тек онда, кад буде било $\alpha = \beta = 0$.

Други доказ. За немогућност компакације довољно је да докажемо како једначине I' и II' не могу постојати у исто доба, а кад је то случај онда ће још мање у исте моћи постојати и једначина III'.

Једначине I' и II', можемо у овом облику написати:

$$\eta\beta^2 + \xi.\alpha^2 - \alpha\beta.M.x + \beta^2 N x^2 = 0 \ldots (1$$

и

$$\eta\beta + \xi.\alpha - \frac{\alpha + \beta}{2} M.x + \beta N.x^2 = 0 \ldots (2.$$

Осим овога, имају последње једначине још и овај сасвим општи облик:

$$A + B x + C.x^2 = 0 \ldots . (3$$

и

$$A' + B'x + C'.x^2 = 0 \ldots . (4$$

гди нам A, B, C, ... значе сталне количине.

Ако компанзација постоји, то ће једне и исте вредности за x морати обе једначине задовољити, па ако то буде случај, онда је компанзација могућа, а у противном случају није. Пошто су једначине 3 и 4 нечисте квадратне једначине, то из теорије истих једначина излази ово: нека су истих једначина корени x_1 и x_2, онда је:

$x_1 + x_2 = \frac{B}{C}$ и $x.x_2 = \frac{A}{C}$, као што ће бити и

$x_1 + x_2 = \frac{B'}{C'}$ и $x_1.x_2 = \frac{A'}{C'}$ одкуда за опстанак једначина 3 и 4 добијамо ове услове:

$$\frac{B}{C} = \frac{B'}{C'} \text{ и } \frac{A}{C} = \frac{A'}{C'}$$

Али кад у овим двема условним једначинама заменимо одговарајуће вредности из 1 и 2, добићемо да ће исте једначине или најзад једначине 3 и 4 тек онда постојати у исто доба, кад буде било $\alpha = \beta$. Ово је дакле услов за могућност компанзације, али, држим да ће свакоме бити увиђавно, да нам тај услов казује у исто доба и то, да је баш усљед таког услова компанзација немогућа, јер ми би за комбиновано клатно могли узети једно и исто тело, пошто би за таково био испуњен услов $\alpha = \beta$; а кад је клатно комбиновано само из једнога тела, нема ни сумње да у таком случају нема компанзације.

Даље ставимо у једначинама 1 и 2 место вредности β, вредност α што по последњем услову можемо учинити, кад ову замену извршимо, онда ћемо једначине 1 и 2 добити у овом облику:

$$\alpha^2 (J_{co}) = 0 \text{ и } \alpha (J_{co}) = 0.$$

Али како Jco неможе никад раван нули бити, пошто је иста количина моменат лењивости каначног тела а одређеног облика, то да би последње једначине постојале мора да буде $\alpha = 0$, а са овим мора да је и $\beta = 0$. Дакле могућност компанзације тражи да је $\alpha = \beta = 0$, а то је онај исти услов, који смо првим доказом извели, с другим речма, и овај други доказ тврди нам да је компанзација, из физичких тела која су нам до данас позната, не могућа.

Трећи доказ. Ми можемо моменат лењивости као и статички моменат на температури t овако опште написати:

$$Jct = Jco + f\,(\alpha, \beta, x, d, l, b, m_1, m_2)\; t + \\ + F\,(\alpha, \beta, x, d, l, b, m_1, m_2)\; t^2$$

и

$$\mathfrak{M}_{ct} = \mathfrak{M}_{co} + \varphi\,(\alpha, \beta, x, l, m_1, m_2)\; t.$$

За компанзацију је нужно и довољно да је:

$$f\,(\alpha, \beta, x, d, \ldots\ldots) = 0 \;\ldots\; (1$$

$$F\,(\alpha, \beta, x, d. \ldots\ldots) = 0 \;\ldots\; (2$$

и

$$\varphi\,(\alpha, \beta, x, \ldots\ldots\ldots) = 0 \;\ldots\; (3$$

Међу тим, лако је увидети, да функција $f\,(\alpha, \beta, x \ldots)$ и $F\,(\alpha, \beta, x \ldots)$ несу ништа друго но мултипле момента лењивости Jco, па због особеног облика у ком се сачиниоци α и β у истим функцијама појављују, ако би н. пр. дозволили да за ма коју од непознатих буде $f\,(\alpha, \beta, x, \ldots) = 0$, то онда за исту вредност исте променљиве неће моћи бити и $F\,(\alpha, \beta, x \ldots)$ равно нули, као и у обрнутом случају, кад би $F\,(\alpha, \beta, x \,.\,.) = 0$

било, неби у исто доба и функција $f(\alpha, \beta, x \ldots)$ могла равна нули бити. Или ако би нашли неку вредност рецимо за x из функције $\varphi(\alpha, \beta, x \ldots)$ којом би се иста поништила, то иста вредност неби поништила и функције $f(\alpha, \beta, x \ldots)$ и $F(\alpha, \beta, x \ldots)$. Из ових посматрања излази за нас ово научљиво: једначине 1 и 2 немогу у исто доба постојати, а кад то није случај онда и немамо условних једначина за компанзацију, или другим речма: компанзација није могућа. Једначине 1 и 2 биле би тек онда равне нули кад би само Jco било нули равно, а овај би случај био тек онда кад би се физичко клатно смањило на једну материјалну тачку — која би лежала у самој обртној осовини; али у таком би случају и $\mathfrak{M}_{co} = 0$ било дакле и $\varphi(\alpha, \beta, x \ldots)$ испало би нули равно. У оваком екстремном случају неби ни имали никаково клатно, пошто би време клатење материјалне тачке која би у обртној осовини лежала, испало безконачно велико, а то значи да се такова тачка неможе окретати око обртне осовине. Али како Jco у самој ствари није равно нули, то и њене мултипле $f(\alpha, \beta, x \ldots)$ и $F(\alpha, \beta, x \ldots)$ као и мултипла статичког момента $\mathfrak{M}_{co}$, а та је $\varphi(\alpha, \beta, x \ldots)$ била би тек онда за исте вредности променљивих $x, l, \ldots$ равне нули, кад би α и β било нули равно, а то с тога што су сви чланови речених функција помножени или са α или са β.

Дакле и овај трећи доказ, који се оснива мислим на чисто логичком резоновању доводи нас на то, како компанзација физичког клатна није могућа.

Сваки онај, који је вичан математици а буде прочитао наведена три доказа о немогућности компанзације, држим да ће заједно самном веровати у немогућност компанзације и увидети у исто доба да је моја теорија компанзације — а та је да компанзовано клатно не постоји —

истинита. Држим најзад и то, да ће се тешко наћи који физичар или меканичар па и астроном који би у моју теорију могао и најмање посумњати или који би узалуд трошио времена на то, не би ли се опет зато могло наћи начина, како ли да се различита тела може бити по неким особеним облицима комбинишу те да добијемо компанзовано клатно. Овака је мисао признајем врло примамљива, али зато опет без икаква позитивна резултата исто онако као и мисао о пострoју „перпетуум мобила“.

Кад је страним научарима немогуће било увидети истинитост једне јасне и готове теорије, онда ми доиста и није чудо што је компанзација важила као истинита готово 200 година, а и да се до сада не нађе бар један који би у стару и уображену теорију ако ништи друго оно барем посумњао.

У теорији клатна са компанзованим тежиштем, што долази ево у следећем одељку, видећемо да ћемо имати за практику једно ново клатно „клатно са компанзованим тежиштем“, које је простије а и далеко савршеније од досадањих клатана уображене компанзације; али и ово ново клатно није оне врсте које би одговарало тачној компанзацији.

II.

Клатно са компанзованим тежиштем.

Пошто сам оборио стару теорију компанзације физичких клатана, дакле доказао да није могуће одржати средиште клатења, физичког клатна у сталном остојању на свима температурама, — дигли су се практичари у Германији па ме питају: па кад досадања клатна, сложена из разних метала, нису компанзована клатна, шта има сада у овакој прилици практичан саџија да ради, да ли и даље да конструјише стара сложена клатна или само проста од једног метала или најзад има ли какво друго клатно које би боље било од досадањих сложених клатана из разних метала? Овака питања од стране практичара доиста су умесна, а ја ћу се потрудити да овом расправом о компанзацији одговорим и практичарима, и надам се да ћу овим мојим радом задовољити практику сајџијску а тако исто и саме астрономе којих се ово питање исто толико тиче. Овом приликом дакле износим на јавност једно ново клатно, које је боље од свију досадањих сложених клатана. Међутим и ово ново клатно не одговара тачно мојој теорији компанзације, но опет је зато моје клатно таке врсте да на исто температура мање упливише но на досадања сложена клатна што је упливисала.

У овом раду употребићу исте оне математичке знаке, који се и у мојој теорији компанзације налазе (Гласник српског ученог друштва књига XLIX 1881 год.).

Дужина математичког клатна, и то на температури 0°, које ће са ма каквим датим физичким клатном изохроно клатити, дата је, као што је познато у овој једначини:

$$L_{ao} = \frac{J_{ao}}{\mathfrak{M}_{ao}} \; . \; . \; . \; . \; . \; (1.$$

Међу тим, означимо остојање тежишта клатна, рачунато од његове обртне осовине са x, а моменат лењивости истога клатна за обртну осовину кроз тежиште пролазећу, на температури 0° са J_{so}, као и масу целог клатна са M, онда је, као што је то познато из механике:

$$J_{ao} = J_{so} + M.x^2, \text{ као што је и } \mathfrak{M}_{ao} = M.x;$$

даље означимо са k_s полупречник или потег замаивања клатна за обртну осовину кроз тежиште, онда је:

$$J_{so} = M.k^2{}_s \text{ и } J_{ao} = Mk^2{}_s + Mx^2.$$

Заменимо сада одговарајуће вредности у једначини (1) са овим новим вредностима, па ће бити:

$$L_{ao} = \frac{Mk^2{}_s + M.x^2}{M.x}$$

одкуда изилази:

$$L_{ao} = \frac{k^2{}_s}{x} + x \;.\;.\;.\;.\;.\;. (2.$$

Да би на најувиђавнији начин увидели у којој зависности стоји L_{co} према k_s и x, дакле како се мења L_{co} кад се k_s и x буде мењало, или само кад се буде x мењало, а то значи кад осовину клатења будемо на друго место померили, најбоље ће бити да зависност L_{co} од x преставимо графички. У овој цељи повуцимо кроз S (тежиште клатна AD) две координатне осовине SU и SV слика 1., од којих оса SU нека са правом AS заклапа угао α, а осовина SV нека је хоризонтална, дакле управна на вертикалној тешкој линији AS. Даље, AD нека нам преставља ма каково физичко клатно, које се око тачке или осе A клати а кога је тежиште у S. Повуцимо свакад кроз тачку A хоризонталу AL_{ao} и на истој пренесимо дужину L_{ao}, дакле постројимо $AL_{ao} = L_{ao}$, овим путем за различита вешалишта A добићемо и различите тачке L_{co}, па је сада у питању да нађемо таквих тачака геометријско значење, то значи ону криву линију у којој тачке L_{ao} леже. Криву линију тачака L_{ao} утврдимо за коси координатан систем USV, према томе је:

$QL_{ao} = u$ и $SQ = PL_{ao} = v$, дакле ово су координате тачке L_{co}, којих вредности дате су у једначинама:

$$u = \frac{x}{cos.\alpha} \text{ и } v = \overline{AL_{ao}} - \overline{AP} = L_{ao} - u.sin.\alpha$$

одкуда изилази:

$$x = u.cos.\alpha \text{ и } L_{ao} = v + u.sin.\alpha.$$

Пошто заменимо ове последње вредности у једначини под (2) добићемо да је:

$$v + u.sin.\alpha = \frac{k^2_s}{u.cos.\alpha} + u.cos.\alpha$$

одкуд изилази ово:

$$k^2_s = u.v.cos.\alpha + u^2 cos.\alpha\ (sin.\alpha - cos.\alpha) \quad . \; . \; . \; . \; (3.$$

Ми смо углу α дали привремено произвољну вредност, међу тим задатак биће много простији, ако углу α дамо таку вредност, која ће учинити да нам други члан у десној страни последње једначине буде нули раван, дакле нека је: $sin.\alpha - cos.\alpha = o$ одкуда је $sin.\alpha = cos.\alpha$, а ово ће бити онда кад је $\alpha = \frac{\pi}{4}$; за ову вредност угла α јесте $sin.\alpha = cos.\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}}$. Дакле кад осовине U и V заклапају међусобом угао од 45^0, онда нам за такав координатан систем и једначина под (3) прелази у ову:

$$k^2_s = uv\sqrt{1/_2} \text{ или је}$$

$$uv = k^2_s\sqrt{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (4$$

Ова последња једначина јесте асимптотна једначина Хиперболе, дакле U и V осовине јесу исте Хиперболе асимптоте. По овоме онда и тачке L_{ao} леже на Хиперболи.

Из овога изилази за практичара ово важно: кад пострдјимо за неко одређено физичко клатно, дакле за дато k_s, том клатну одговарајућу Хиперболу тачака L_{co}, лако је онда наћи и дужину L'_{ao} која ће одговарати истом телу као клатну и за тачку вешања или прекрет у некој његовој другој тачци A_1; јер у цељи одредбе дужине L'_{ao}, ваља повући кроз A_1 хоризонталу, и продужити је до пресека L'_{ao} са Хиперболом, па је онда $L'_{ao} = \overline{A_1 L'_{ao}}$, дужина математичког клатна које ће са физичким клатном исохроно клатити.

По нацртаној Хиперболи увиђавно је и то, да ћемо у физичком клатну имати и неку особену тачку B (у правој AS), о коју ако пустимо да нам се клатно клати, биће и одговарајућа му дужина минимум, а ово ће опет одговарати оној тачци Хиперболе, за коју је дирка вертикална, овакова Хиперболина тачка јесте тачка M. За дужину $\overline{BM}$ биће и време клатења минимум. Да би дакле путем рачуна нашли такову вредност за x за коју ће бити L_{co} минимум, ваља једначину (2) диференцијалити и ставити $\frac{dL_{ao}}{dx} = o$, коју једначину кад решимо добићемо да је тражено $x = \overline{SB} = k_s$, а одговарајућа минимална дужина за вешалиште B јесте $L_{ao} = \overline{BM} = 2k_s$. По томе је тачка M удаљена од B за количину $2k_s$. Ово је за нас врло важно докучење, јер кад за неко дато клатно знамо k_s, онда ћемо моћи одредити и тачку B, пошто је $\overline{SB} = k_s$, а кад знамо тачку B наћи ћемо лако и тачку M, јер у тој цељи ваља нам кроз B повући хоризонталу и на њој пренети дужину $\overline{BM} = 2\overline{SB}$.

Овим путем добијамо једну хиперболину тачку M па кад ову знамо а знамо још и хиперболине асимптоте U и V, као и то да је средиште хиперболе у тежишту система — у S, — моћи ћемо и све остале хиперболине тачке врло лако конструисати, а по начину који нам је познат. Ми можемо дакле и за свако A наћи и одговарајућу дужину L_{ao}.

Пошто смо дознали значење тачке L_{ao}, моћи ћемо на врло увиђаван начин сравнити ове три врсте клатна, међу се: право или у идеји компанзовано клатно, лесасто клатно (Rostpendel) и клатно са компанзованим тежиштем, које ћемо сравњивање чинити у цељи одредбе релативног односа њихових дужина на једној и истој температури. Да би ово што тражимо могли одредити, узмимо да смо конструисали речена три клатна тако, да сва три имају на температури 0° један и исти полупречник замаивања k_s, па кад така клатна у истом остојању $\overline{AS}$ од тежишта а у тачки A обесимо, то ће сва три клатна на температури 0° и исохроно клатити, а то значи да ће на температури 0° за сва три клатна вредити једна и иста Хипербола, а та нека је $N_0 M_0 O_0$ слика 2., дакле и дужина сва три клатна на температури 0° јесте једна и иста AL_0. Кад се буде температура мењала, мењаће се и дужина како код лесастог клатна тако и код клатна са компанзованим тежиштем, и видећемо да за ова два клатна добијамо и друге хиперболе различите од прве, у којој су се све три на температури 0° поклопиле.

1.) Код правог компанзованог клатна — које као што знамо не можемо конструисати и које и не постоји, — тражи се да му тежиште S слика 2. буде на свима температурама у сталном остојању од обртне осовине A, а осим овога нужно још да и тачка B_0 — које је остојање од тежишта S а то је $\overline{SB_0}$ равно полупречнику замаивања за обртну осу кроз тежиште система — буде на свима температурама на истом месту рачунато или од A или од S. Нека је овде Хипербола $N_0M_0O_0$ она која одговара идеално компанзованом клатну а и оним другима но на температури 0^o, то је онда и дужина свију три клатна на температури 0^o једна и иста, а та је $\overline{AL}_{ao} = L_{ao}$, која би код компанзованог клатна остала стална на свима температурним променама.

2.) Што се тиче лесастог клатна или и Грахамовог клатна, које је комбиновано са живом, код таких клатана — као што је у мојој теорији компанзације доказано — мења се на променама температуре како тачка S тако и тачка B_0, и то: кад температура порасте над нулом, онда се S удаљава од осовине кроз A а тако се исто удаљава и тачка B_0 од тежишта S. Отуда сада излази за нас ово важно: пошто се тежиште S услед повишене температуре спушта на ниже, то ће се услед тога и асимптоте одговарајуће хиперболе на тој температури спустити на ниже, пошто оне увек кроз тежиште система пролазе; осим овога и тачка B_0 биће удаљенија од садањег тежишта, а то значи још и то, да ће се и одговарајућа хипербола измаћи од идеалне хиперболе на десно а и на ниже. По овоме је онда и то увиђавно, да ће на повишеној температури одговарајућа дужина речених клатана порастети, а то ће исто бити и са временом клатења, дакле речена клатна неће сада исохроно клатити са идеалним клатном.

3). Најзад код клатна са компанзованим тежиштем S — које ћемо клатно, као што ћемо видети, моћи лако конструисати — остаје му исто тежиште S у сталном остојању од обртне осовине — на свима температурним променама. Дакле и Хипербола која ће овом клатну а за дату температуру одговарати, имаће асимптоте, које на истом месту леже на ком су лежале на температури 0°, дакле оне се на свима температурама поклапају са асимптотама идеалног клатна. Међу тим код овог клатна са сталним остојањем тежишта, од обртне осе рачунато, мења се једино тачка B_0 или полупречник замаивања k_s који одговара обртној осовини кроз тежиште повученој, дакле и ово клатно као што видимо није компанзовано клатно. И овде ће се одговарајућа хипербола покренути нешто у десно а то зато, што се и овде тачка B_0 удаљава од тежишта, дакле на температуром „$+$“ расте и количина k_s. По томе ће и дужина клатна порастети, дакле на температурама различним од нуле, и ово клатно неће клатити са идеалним клатном исохроно.

За нас је сада даље од велике практичке вредности ово: да из свега овог што смо дознали изведемо једну престагку из које би видели, у колико лесасто клатно а у колико опет клатно са компанзованим тежиштем одступа од идеално компанзованог клатна, па тим путем да дођемо и до закључка, који би нам казао, које је од прво речених клатана за практику тачније, дакле и боље.

а.) У овој цељи посматрајмо слику 2. Дакле сравнимо дужине речених три клатна на температури $+t^{\circ}$, а која три клатна, као што смо напред узели, имају на температури 0° исто x и исто k_s, дакле на тој температури и исту дужину $\overline{AL_{ao}} = L_{ao}$. На температури $+t^{\circ}$ нека се тежиште лесастог клатна спусти на ниже за $\overline{SS_t}$, дакле нека дође у тачку S_t. Истог клатна, на температури 0°, нека је $k_s = \overline{SB_0}$, а на температури $+t^{\circ}$, порастиће k_s н. пр. за количину $\overline{B_0B_t}$, дакле садање $k_s = \overline{SB_t}$ или одговарајућа тачка B као што је лако увидети доћи ће према новом тежишту S_t у тачку B'_t, дакле је и садање $k_s = \overline{S_t \cdot B'_t}$. Да би сада нашли дужину лесастог клатна на температури $+t^0$, ваља нам прво да повучемо кроз S_t познате асимптоте, а те су на слици означене са V'_t и U'_t; за тим ваља кроз B'_t повући хоризонталу и на истој пренети дужину $B'_t M'_t = 2\overline{S_t B'}$, те тако добијамо ону карактерну хиперболину тачку M'_t. Кад ову тачку знамо, моћи ћемо по познатим особинама или односима између хиперболиних тачака и асимптота конструисати и на температури $+t^0$ одговарајућу Хиперболу лесастог клатна. Овака је Хипербола означена у слици 2. са $N_t M'_t O_t$. Пошто имамо нацртану Хиперболу, ваља нам још и кроз тачку вешања A повући хоризонталу и продужити је до пресека са Хиперболом. Пресек исте праве са Хиперболом даје нам тачку L'_{at}, које остојање од A јесте дужина одговарајућег лесастог клатна на температури $+t'$, а ову дужину ако означимо са L'_{at}, то је њена вредност $L'_{at} = \overline{AL'_{at}}$. Кад бацимо поглед на слику, видимо да је дужина овог клатна, а на температури $+t^0$ за $\overline{L_{ao} L_{at}'}$ различито од оне дужине, коју је исто клатно имало на температури 0^0, дакле је за исту дужину лесасто клатно измакло од дужине идеално компанзованог клатна. Лесасто клатно по овом, не клати сада са идеалним исохроно, но на против као — што видимо — у неколико спорије.

b.) Дужину клатна са компанзованим тежиштем а на температури $+t^0$ налазимо овако: Тежиште истог клатна остаје на свима температурама непомично од обртне осовине, дакле при реченој температури остаће тежиште у тачки S, зато и асимптоте одговарајуће хиперболе за речено клатно, остаће на истом месту на ком су биле на температури 0^0. Како су код сва три речена клатна одговарајући полупречници замаивања k_s били једнаки на температури 0°, то ће се упливом температуре и код овог клатна k_s исто онолико променити колико се променило код лесастог клатна. Тачка редуковања маса за обртну осовину кроз тежиште, т. ј. тачка B_0 помаће се на реченој температури у тачку B_t, дакле је на температури $+t^{0}$ одговарајући полупречник замаивања $k_s = \overline{SB_t}$. Пошто смо нашли тачку B_t, наћи ћемо и њој одговарајућу хиперболину тачку M_t, коју добијамо кад кроз B_t повучемо хоризонталу и на њој пренесемо дужину $\overline{B_tM_t} = 2\overline{SB_t}$, тачка M_t јесте тражена тачка оне хиперболе која одговара клатну са компанзованим тежиштем а на температури $+t^{0}$. Хипербола, у којој ће лежати тачке L_{at} овог клатна, нацртана је у слици и означена са $N_sM_tO_s$ са асимптотама V^{0} и U^{0}, оним истим које и идеалном клатну одговарају. Пошто смо и Хиперболу тог клатна за температуру $+t^{0}$ нацртали, ваља кроз A повући хоризонталу и продужити до речене Хиперболе, а то је до тачке L_{at}, дужина $AL_{at} = L_{at}$ јесте дужина клатна са компанзованим тежтштем а на температури $+t^{0}$. Из слике видимо да је упливом температуре дужина клатна са компанзованим тежиштем порасла за $\overline{L_{ao}\,L_{at}}$, дакле за толико постала дужа од дужине идеалног клатна. Дакле и време клатења клатна са компанзованим тежиштем биће веће од истог времена које идеалном клатну а за исту тачку вешања A одговара; по чему и клатно са компанзованим тежиштем није компанзовано клатно.

c.) Најзад Хипербола $N_0M_0O_0$ одговара идеалном клатну, код кога је на свима променама температуре $\overline{AL_{ao}} = L_{ao}$ сталне величине, јер се код истог клатна не мења ни S нити B_0.

Пошто смо на основу горњих тачака a), b) и c) добили у хоризонтали кроз A а на температури $+t^{0}$ две тачке L_{at} и L'_{at}, од којих прва одговара клатну са компанзованим тежиштем а друга лесастом клатну, осим тога су исте тачке а у истој правој још и удаљене од тачке L_{ao} која одговара идеалном клатну, то је сада врло јасно како ће и поменута три клатна на разним температурама, н. пр. овде на температури $+t^{o}$, имати и различито време клатења, ако смо осовину клатења, а то је A, узели у систему једну и исту тачку. Даље, кад бацимо још поглед на слику 2, видимо још и то важно, како за исту температуру дужина лесастог клатна највише одступа од дужине идеалног клатна, а напротив одговарајућа дужина клатна са компанзованим тежиштем одступа — при истој температури — најмање од дужине правог компанзованог клатна, осим овога видимо из слике и то за нас поучљиво да је промена дужине лесастог клатна далеко већа од исте таке промене — на истој температури, — која одговара клатну са компанзованим тежиштем.

Из свега досадањег изилази за нас овај теоријски а за практику цењени закључак: Клатно са компанзованим тежиштем јесте за практику много тачније клатно од обичног лесастог клатна или клатна које је са живом комбиновано. Дакле моја је одсудна одлука та, да се досадање уображено компанзовано клатно а то је лесасто клатно и њему подобна из досадањег двеста-годишњег гњезда истисне и у будућој практици замени са другим бољим клатном, а ово је клатно: клатно са компанзованим тежиштем.

Овом приликом потврдио сам и по други пут немогућност компанзације а у исто доба показао теорији и практици које је клатно најбоље дакле које се највише приближује идеално компанзованом клатну. У исто доба држим да сам овим мојим студијама теорију а и практику компанзације задовољио. Практику за сад задовољавам донде, док се неби неки други усљед мојих студија појавио са неким другим клатном које би и од клатна са компанзованим тежиштем још и боље било, дакле се идеалном још и више приближило.

Најзад остајем практичким сацијама или конструктерима сахатова још у толико дужан да им покажем начин, како сам ја искомбинисао клатно са компанзованим тежиштем, ваља ми дакле изложити конструкцију истога као и одредбу димензија. На ово питање одговара следећа тачка:

Да би у стању био да покажем, како ваља постројити клатно коме ће тежиште на температурним променама бити свакад у истом остојању од обртне осовине, ја ћу да покажем како је могуће сложити једно тело из два различита метала, те да у том телу две му тачке буду на свима температурама у сталном остојању. У овој цељи посматрајмо слику 3. Узмимо буди каково физичко тело AB_1 па спојмо исто на крајевима AB и A_1B_1 са друга два једака физичка тела CD и $C'D'$ и положимо их према телу AB_1 онако, као што слика 3. показује; обележимо сад на дометнутим телима две црте mn и m_1n_1 које од средине MN тела AB_1 подједнако одстоје. Нека је α топлотни сачинилац истезања тела AB_1 а β нека је такав сачинилац горњег и доњег тела. Дужину AA' означимо са x а остојање равни или линије mn од A_1B_1 као и равни m_1n_1 од равни AB означимо са y. Нађимо сада између x и y такав однос, како би нам остојање равни mn и m_1n_1 било равно некој константи C на свима температурама; међутим константа C нека је у исто доба она линијска дужина која одговара остојању речених црта на температури нули. Из слике је врло јасно како је на температури 0^o:

$$y - x + y = C \text{ или } 2y - x = C \;.\;.\;.\;.\; (1.$$

Међу тим на некој другој температури $+t^o$ промениће се како дужина x тако исто и y и биће уопште узев:

$$2y\,(1 + \beta t) - x\,(1 + \alpha t) = C_1$$

или

$$2y - x + 2\beta yt - \alpha x.t = C_1,$$

а са погледом на једначину (1) биће још и

$$C + 2\beta yt - \alpha \mathit{ɔ} t = C_1.$$

Хоћемо ли сада то, да нам на свима температурама буде остојање линија mn и m_1n_1 стално и $= C$, то онда мора да буде и $C_1 = C$ а ово ће опет бити онда кад буде било:

$$(2\beta y - \alpha x)\; t = 0$$

или кад је:

$$2\beta y - \alpha x = 0.$$

У овој последњој једначини имамо већ једну условну једначину између непознатих x и y а та је:

$$y = \frac{\alpha}{2\beta}.x \;.\;.\;.\;.\; (2.$$

Пошто су нам у овом задатку димензије x и y оне које одговарају на температури 0°, то нам ваља просто једначину (1) спојити са једначином (2) и отуда израчунати x и y. Кад то извршимо, онда ћемо за резултат решења добити да је:

$$x = \frac{\beta}{\alpha-\beta}.C \quad . \ . \ . \ . \ (3$$

и

$$y = \frac{\alpha}{2\,(\alpha-\beta)}.C \quad . \ . \ . \ . \ (4.$$

Из ових једначина видимо још и то, да пошто су x и y позитивне количине то мора да буде $\alpha > \beta$, дакле средње тело мора да се више истеже но она два поред њега са стране.

Ми имамо дакле начина да две црте mn и m_1n_1 на бочним телима што су, одржимо у узајамном сталном остојању на свима температурним променама. Даље из слике видимо још и то, да ће средина MN тела AB_1 бити тако исто у сталном остојању од равни mn или од равни m_1n_1 дакле у њиховој средини, на свима температурама (на којима су α и β сталне количине). Међутим кад начинимо да тела CD и C_1D_1 буду по облику потпуно једнака (конгриентна) а осим тога кад су још и иста физичка тела, то ће онда и тежиште тако комбинованог тела пасти у геометријско средиште тела AB_1, ако је још и ово последње наравно таког облика да његово тежиште пада у његову геометријску средину, а то је случај н. пр. код паралелопиперног тела. Одовуд излази сада за нас то важно, како је тако комбинованог тела тежиште на свима температурама у сталном остојању од равни mn или од равни m_1n_1, дакле у средини између истих. Оваказ комбинација тела даје се врло угодно употребити за клатно са компанзованим тежиштем и то ова о:

Постројимо једно клатно облика као што слика 4. показује, а x и y димензију одредимо по једначинама (3) и (4). Тим начином добијамо и две паралелне равни

mn и m_1n_1 које стоје управно на вертикалној тешкој линији CD а којих је равни остојање независно од температурних промена. Кад дамо сложеном клатну облик као што слика 4. показује, ми можемо исто клатно обесити о такову тачку C у равни mn, да нам кроз C повучена управна на равни mn буде у исто доба тешка линија тела CD (не рачунећи ту сочиво у осовини или тачки D); но како је $mn \parallel m_1n_1$ а у исто доба хоризонтално кад је тело у C обешено, онда добијамо у пресеку вертикалне тешке линије са равни m_1n_1 нову тачку D или осовину кроз D која је осовини кроз C паралелна а удаљене су једна оса од друге на свима променама температуре једнако. Сад је увиђавно да тако тело, које ће се клатити око тачке или осовине C, биће клатно са компанзованим тежиштем, пошто је и S у сталном остојању на свима температурним променама.

Међу тим да би овако клатно довели на обичан облик клатна, т. ј. таково, код кога на доњем делу има утврђено сочиво а то у цељи да се тежиште што дубље спусти, то ћемо и овде код овог новог клатна утврдити на осовину код D једно сочиво, али тако га везати са главном мотком клатна, како ће тежиште истог сочива лежати тачно у хоризонталној осовини кроз D. Пошто је осовина D на свима температурама у сталном остојању од обртне осовине C то ће и тежиште сочива бити на свима температурама непомично од исте осовине C. Ми имамо дакле сада једно особено сложено клатно и то таково, код кога је тежиште S, а тако исто и тежиште сочива непомично према обртној осовини C, и тако је сада природно да ће и тежиште целог система, дакле мотке клатна и сочива са мотком утврђеног лежати на свима температурама у сталном остојању од осовине C. Ми можемо дакле постројити клатно са компанзованим тежиштем.

Што се тиче облика клатна, које је у слици 4. нацртано и ако је могуће врло лако и извршити, опет држим да није сасвим практичког облика, а овако клатно узео сам само зато да би што простије преставио клатно са компанзованим тежиштем. У слици 5. нацртано је оно клатно са компанзованим тежиштем које ја предлажем за практичку употребу, дакле конструктерима сахатова.

За унутарње тело, коме сачиниоц истезања α, најбоље је да се употреби цинк, који је у слици 5. и 6. означен са z; тела која су са цинком утврђена за површину AB и $A'B'$ нека је кованог гвожђа коме је сачиниоц истезања β, и које је на слици 5. и 6. означено са s, (слика 6. преставља пресек по линији MN слика 5). Из слике 5. и 6. лако је увидети каког су облика два конгруентна гвоздена тела, у којима су тачке C и D на свима температурама у сталном остојању. У тачци D утврђено је сочиво са два дијаметрална а потпуно једнака завртња и то тако да тежиште сочива дође у осовину кроз D а специјално у оној тачци у којој се вертикална линија симетрије сложеног тела CD сече са хоризонталном осом која је кроз D повучена. Међу тим, овде се порађа још и ово важно питање: на који ћемо начин моћи оваково клатно дотеривати те да нам избија на температури 0° оно време које ми хоћемо? Регулисање или дотеривање оваког клатна бива овако. На конструкцијама што су од кованог гвожђа, дакле на s и s ваља нам наместити два сасвим једнака терета a и b којих тежишта да дођу у вертикалну линију симетрије целог клатна. Осим овог услова, ваља да су исти терети тачно и у једнаком остојању од равни MN која је у средини сталног остојања $\overline{CD}$, јер ћемо само тим путем постићи то да нам тежиште тих терета падне у тежиште конструкције или сложеног тела о која је сочиво утврђено, а пошто тежиште конструкције падне у равни MN а у пресеку вертикалне линије симетрије са истом равни која је тачка у сталном остојању од C или од D, то ће и тежиште терета бити непомично кад су исти од MN у једнаким остојањима јер ће и њихово тежиште пасти у речену тачку равни MN. Дакле сад је дотеривање времена клатења проста ствар, ако хоћемо да нам клатно спорије клати, ваља нам терети a и b тачно за исту дужину одмицати од MN, а ако хоћемо да нам клатно брже клати, онда нам ваља обратно терете a и b тачно за исту дужину дуж гвоздених мотака примицати к равни MN. Оваким пословањем у првом случају увеличавамо моменат лењивости а у другом случају умањавамо и отуда оне промене у времену клатења. Али пошто смо теретима дали онај положај, којим постизавамо тражено време клатења, нужно је да исте терете на одређеним местима утврдимо, ово се постизава помоћу два завртња p, q и p_1, q_1, који морају бити потпуно једнаког терета и облика, а осим тога да њихова хоризонтална тешка линија лежи још и у хоризонталној тешкој линији терета a и b у којима се увртити могу. Исто тако дотеривање, а да нам опет остане клатно са компанзованим тежиштем, могуће је постићи опет са једнаким теретима којих би тежиште подједнако удаљено било од осовине D или од осовине C, а ова једнака остојања могу бити и у дијаментралним линијама кроз C или D. Но да би удешавање времена сретством терета a и b што лакше ишло, ваља нам начинити поделу на горњој и доњој мотци s и s па онда је лако помицати за једнака остојања ка MN или од MN. Осим овога, овде је на свом месту да се још и ово напомене, што год будемо начинили тању ону конструкцију о коју је сочиво обешено, у толико ће нам се и клатно више приближавати математичком клатну, осим овога клатно са компанзованим тежиштем биће у толико ближе идеално компанзованом клатну у колико буде тачка вешања или прекрет C даљи од тежишта целог система, а ово се даје увидити из слике 2., кад у овом смислу бацимо поглед на ове хиперболе које су ту нацртане. Најзад ваља знати овде још и ово: каквим завртњима утврдим мотку C за цинкену површину AB истим таким завртњима и на исти начин морамо утврдити и дољу гвоздену мотку за цинкену површину код $A'B'$, а због истезања цинка, морамо како на страни AB тако исто и на страни $A'B'$, оставити између гвоздених делова нешто међупростора, као што је то и на слици показано.

Желимо ли да имамо клатно са компанзованим тежиштем, и то таково које би било на температури 0° секундно клатно, најбоље је да начинимо $C = \overline{CD} = 1^m$, за овaку вредност сталне количине C изилази нам да је дужина цинка дакле $x = 723{,}49^{mm}$ а дужина гвоздених делова дакле $y = 861{,}745$. За клатно где би било $C = 0{,}5^m$ изашла би одговарајућа дужина цинка $= \frac{x}{2}$ као и гвожђа, $= \frac{y}{2}$ и т. д. У овом рачуну узето је да је $100.\alpha = 0{,}002942$ као и $100.\beta = 0{,}001718$. Међутим ако хоће да се клатно построји што тачније и то н. пр. сложи из цинка и каквог гвожђа, ваља тим истим металима, од којих клатно градимо прво засебно као засебним физичким индивидуама одредити и њима одговарајуће α и β.

Најзад не треба заборавити ни то, како се клатно око C клати на ивици једне простране призме, зато би ваљало да и у осовини кроз D стоји иста онака призма као и код C а да је првој симетрично положена, дакле ивица призме код D окренута је навише, овака призма могла би се наместити на она два завртња, код D, и то половина призме на један завртањ да дође а половина на други. Тек у оваком случају била би нам мотка сочива потпуно симетрично тело према равни MN или така би раван делила мотку на два подударна тела, што је апсолутно узев и нужно. Али како ће тежина призме према терету целог клатна бити један врло малени део истога, то онда у таком случају можемо призму код D да и изоставимо, којом изоставком учинићемо малену и готово немерљиву грешку а ово односно сталности тежишта целог система.

ГЛАСНИК

СРПСКОГ УЧЕНОГ ДРУШТВА

КЊИГА 52

У БЕОГРАДУ 1883

У ШТАМПАРИЈИ КРАЉЕВИНЕ СРБИЈЕ

На продају у књижарници В. Валожића

Преглед.

	СТРАНА
1. Статистични преглед нашег привредног и друштвеног стања, поређено, од Владимира Јовановића (свршетак).	1
2. Чешка библиографија у колико се тиче јужних Словена (до 1877), прибрао Едвардо Јелинек	163
3. О резултујућем дејству лењивих (реактивних) сила на обртну осу, при окретању физичких тела око исте, од Љубомира Клерића	195
4. Мале државе у данашњем међународноме склопу, од Глише Гершића.	215
5. Извештај уметничкоме одбору, од Драгутина С. Милутиновића и Михаила Валтровића	265
6. Примедбе на извештај В. В. Макушева, од Панте Срећковића.	268
7. Изводи из записника ученога друштва, 1882, одбори и управа.	280
8. Две оцене рукописа Лазара Арсенијевића (Баталаке), од Милоша Зечевића и Милана Ђ. Милићевића	298
9. Именик српскога ученог друштва, I. живих чланова: редовних, почасних и дописних	312

О РЕЗУЛТУЈУЋЕМ ДЕЈСТВУ ЛЕЊИВИХ — РЕАКТИВНИХ — СИЛА

НА ОБРТНУ ОСУ ПРИ ОКРЕТАЊУ ФИЗИЧКИХ ТЕЛА ОКО ИСТЕ.

од

ЉУБОМИРА КЛЕРИЋА.

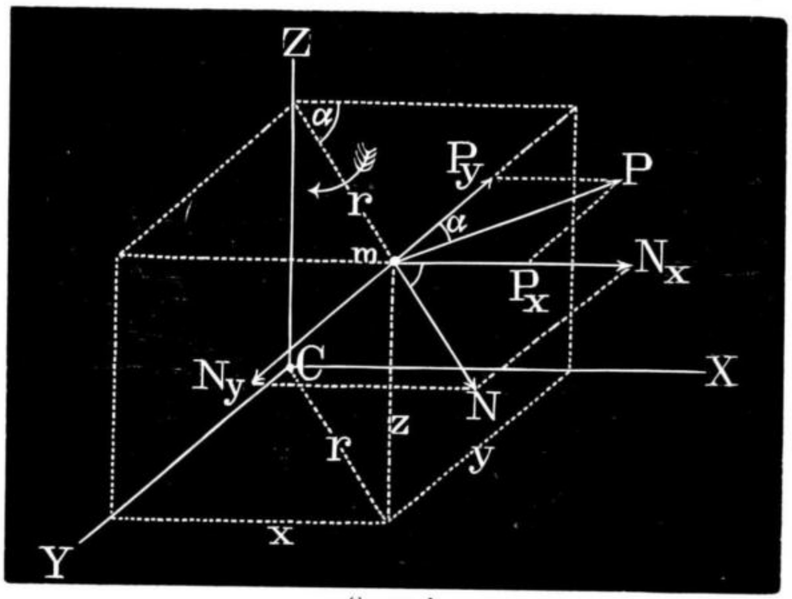
Нека се неки сталан систем маса или чврсто физичко тело обрће око неке сталне Z осе, упливом динамичког спрега $(\mathfrak{P}, -\mathfrak{P})$, који нека произведе у систему угловно убрзање k, а после извесног времена, нека је исто тело постигло још и угловну брзину ω. Да би у стању били да одредимо дејство лењивих сила на обртну Z осу, које долази од лењивих отпора појединих материјалних тачака реченог тела, одредимо прво положај појединих материјалних тачака, које су редом масе m_1, m_2, и т. д. њиховим трима координатама x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 и т. д. према произвољним правоуглим координатним осама CX, CY и CZ са почетком у C, од којих CZ оса нека је обратна оса. Материјална тачка m, положаја x, y, z, а полупречника окретања $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ има као и све остале тачке угловно убрзање k и угловну брзину ω, зато су исте тачке центрифурално убрзање p_n и негативно тангенцијално убрзање p_t ове вредности:

$$p_n = \frac{v^2}{r} = w^2 r \text{ и } p_t = kr.$$

Тим убрзањима одговарају центрифурална сила N и негативна или лењива тангенцијална сила P, којих су вредности ове:

$$1). \quad N = \omega^2 mr \text{ и } P = kmr,$$

исте су силе нацртане у слици 1.



Слика 1.

Како би могли дати себи лекше рачуна о свима таким силама за све поједине материјалне тачке целог система, то разложимо свако N а тако исто и свако P на по две компаненте и то: једне нека су паралелне X оси а друге паределне Y оси. У тој цељи означимо са α онај угао који полупречник обртања — r — са X осом заклона, па су онда речене компоненте горњих сила редом ове:

$$N_x = N \cos.\alpha, \; N_y = N \sin.\alpha$$

$$P_x = P \sin.\alpha \text{ и } P_y = P \cos.\alpha,$$

но пошто је: $\sin.\alpha = \frac{y}{r}$ и $\cos.\alpha = \frac{x}{r}$ то је:

$$N_x = N.\frac{x}{r},\ N_y = N\frac{y}{r}$$

$$P_x = P.\frac{y}{r} \text{ и } P_y = P.\frac{x}{r},$$

кад у тим изразима метемо место N и P њихове вредности из 1). то ћемо после довољног свођења добити да је:

$$N_x = \omega^2 mx,\ N_y = \omega^2 my$$

$$P_x = k\,m\,y \text{ и } P_y = rm.x$$

Дакле то су нам сада четири силе, која нам потпуно замењују дејство резултујуће лењиве силе за масу m. Ако компоненте лењиве силе за масу m, у правцу X и Y осе означимо просто са X и Y, онда су исте компоненте, као што слика показује, ове вредности:

$$X = N_x + P_y = \omega^2 mx + kmy$$

и

$$Y = N_y - P_y = \omega^2 my - km\,x.$$

Оваке две силе даће нам свака од материјалних тачака система. Према томе имамо у компонентама правца X осе један паралелан систем сила у простору, а такав исти паралелан систем сила имамо у Y-ским компонентама, које су паралелне Y-ској оси; зато ако резултујућу компоненту X-ских сила означимо просто опет са X а резултујућу компоненту Y-ских сила означимо са Y, то је онда по принципу слагања паралелних сила просто

$$\text{I}).\ \mathrm{X} = \Sigma(\mathrm{X}) = \omega^2\Sigma(m\,x) + k\,\Sigma(wy)$$

и

$$\text{II}).\ Y = \Sigma(Y) = \omega^2\Sigma(my) - k\,\Sigma(mx).$$

Силе X и Y јесу оне, које нам цео систем лењивих сила замењују, али да би могли одредити још места а и нападну тачку истих двеју сила, ваља да се послужимо принцином статичких момената за паралелне силе. У тој цељи означимо координате нападне тачке — A — силе X у правцима X, Y и Z осе мерено редом са a_x, b_x и c_x; координате за нападну тачку B силе Y са a_y, b_y и c_y па је онда на основи реченог принципа:

$$\text{III).}\quad X a_x = \Sigma(\omega^2 m x^2 + k m x y) = \omega^2 \Sigma(m x^2) + k \Sigma(m x y)$$

$$\text{IV).}\quad X b_x = \Sigma(\omega^2 m x y + k m y^2) = \omega^2 \Sigma(m x y) + k \Sigma(m y^2)$$

$$\text{V).}\quad X c_x = \Sigma(\omega^2 m x z + k m y z) = \omega^2 \Sigma(m x z) + k \Sigma(m y z)$$

исто је тако и:

$$\text{VI).}\quad Y a_y = \Sigma(\omega^2 m x y - k m x^2) = \omega^2 \Sigma(m x y) - k \Sigma(m x^2)$$

$$\text{VII).}\quad Y b_y = \Sigma(\omega^2 m y^2 - k m x y) = \omega^2 \Sigma(m y^2) - k \Sigma(m x y)$$

$$\text{VIII).}\quad Y c_y = \Sigma(\omega^2 m y z - k m x z) = \omega^2 \Sigma(m y z) - k \Sigma(m x).$$

Из једначина I. до VIII. добијамо за тражене координате ове вредности:

$$a_x = \frac{\omega^2 \Sigma(m x^2) + k \Sigma(m x y)}{\omega^2 \Sigma(m x) + k \Sigma(m y)}$$

$$b_x = \frac{\omega^2 \Sigma(m x y) + k \Sigma(m y^2)}{\omega^2 \Sigma(m x) + k \Sigma(m y)}$$

$$c_x = \frac{\omega^2 \Sigma(m x z) + k \Sigma(m y z)}{\omega^2 \Sigma(m x) + k \Sigma(m y)}$$

и

$$a_y = \frac{\omega^2 \Sigma(m x y) - k \Sigma(m x^2)}{\omega^2 \Sigma(m y) - k \Sigma(m x)}$$

$$b_y = \frac{\omega^2 \Sigma (my^2) - k\Sigma (mxy)}{\omega^2 \Sigma (my) - k\Sigma (mx)}$$

$$c_y = \frac{\omega^2 \Sigma (myz) - k\Sigma (mxz)}{\omega^2 \Sigma (my) - k\Sigma (mx)}$$

Из последњих група једначина јасно је, да координате нападних тачака A и B лењивих сила X и Y јесу различите, зато се и дејство лењивих сила, на тело ког је угловна брзина ω а угловно убрзање k, даје у опште узев свести на две силе X и Y које у опште узев не леже у једној и истој обртној равни но у двема паралелним обртним равнима које се силе укрштају у простору под правим углом. Дакле резултујуће дејство лењивих сила не даје се уопште заменити са једном једитом простом силом.

Пошто се физички систем тачака окреће око сталне Z осе, то да би дознали дејство нађених X и Y сила на Z осу, ваља да их просто на исту осу пренесемо, па кад то учинимо, онда ћемо добити за Z осу два спрега $(X,-X)$ и $(Y,-Y)$ и осим тога две просте силе $+X$ и $+Y$; од којих прва сила тежи да креће Z осу у равни xz а друга креће исту осу у равни yz, због тога мора да је оса бар у двема тачкама утврђена, те ће се онда силе X и Y у тим утврђеним тачкама потрти, а остаће још дејство окретања спрегова $(X,-X)$ и $(Y,-Y)$, којих је резултујући моменат

$$\mathfrak{M}_z = Ya_y - Xb_x$$

а то зато, јер су спрегнуте осе речених спрегова паралелне обртној Z оси.

Пошто будемо у последњој једначини заменили вредности из IV). и VI). биће:

$$\mathfrak{M}_z = \omega^2 \Sigma (mxy) - k \Sigma (mx^2) - \omega^2 \Sigma (mxy)$$
$$- k \Sigma (my^2)$$
$$= -k \{\Sigma (mx^2) + \Sigma (my^2)\} = -k \Sigma m (x^2 + y^2)$$

дакле:

$$\mathfrak{M}_z = -k \Sigma (mr^2)$$

но $\Sigma (mr^2) = J_z$ јесте моменат лењивости тела за Z осовину, зато је моменат обртања на Z осовину:

$$\mathfrak{M}_z = - k J_z \ldots . \text{(IX.}$$

Ту је знак момента зато одречан. што је значење момента $\mathfrak{M}_z$ моменат лењивих или реактивних сила, а овом моменту јесте раван моменат динамичког спрега ($\mathfrak{P}, -\mathfrak{P}$), ког спрега ако је крак q, онда је исти:

$$\mathfrak{P} . q = k J_z .,$$

а који би моменат добили по шестој d'Alambert — овој једначини динамичке равнотеже.

Предпостављено је да се обртање тела произвело упливом дејства динамичког спрега ($\mathfrak{P}, -\mathfrak{P}$), међутим ако се исто обртање произведе неком ексцентричком силом P, која нека је паралелна xy равни, онда ће иста сила осим свог момента Pq, произвести још и притисак $+P$ на обртну Z осовину, који добијамо кад дату силу P пренесемо на обртну осу.

Ако сила P заклања угао φ са xz равни, а лежи у обртној равни у остајању $z = c$, онда су исте силе компоненте у правцу X и Y осе ове:

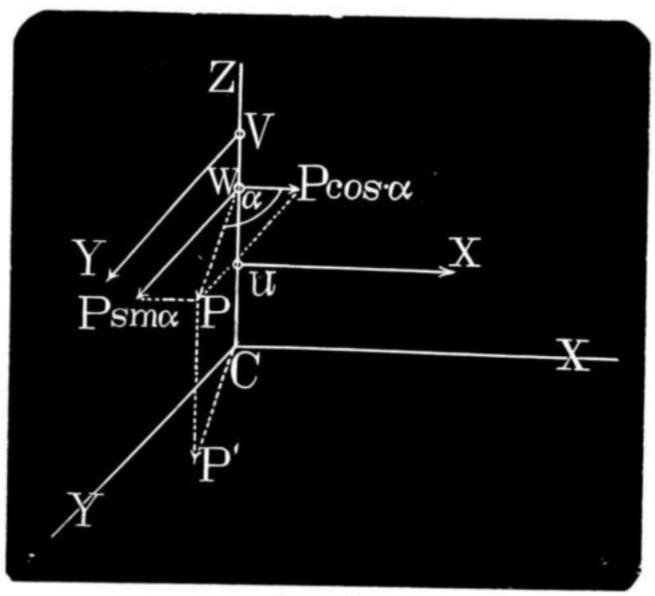
$$P \cos . \varphi \text{ и } P \sin . \varphi$$

а нападна тачка истих сила у Z оси нека је W, онда ћемо у тој тачци имати у равни yz. силу $P \sin . \varphi .$, а у равни xz. силу $P\,cos.\,\varphi$, зато ако означимо са U и V нападне тачке сила X и Y које су од C удаљене за c_x и c_y, то ће силе X и $P\,cos.\,\varphi$ окретати Y-ску осу, а силе Y и $P.\,sin.\,\varphi$ окретати X осу, па ако моменте обртања за исте осе означимо за $\mathfrak{M}_y$ и $\mathfrak{M}_x$, добићемо да је:

$$\mathfrak{M}_y = P\,cos.\,\varphi.\,c + Xc_x = P\,cos.\,\varphi.\,c + \omega^2\,\Sigma\,(mxz) + k\,\Sigma\,(m\,y\,z)$$

$$\mathfrak{M}_x = P\,sin.\,\varphi.\,c + Yc_y = P\,sin.\,\varphi.\,c + \omega^2\,\Sigma\,(m\,y\,z) - k\,(\Sigma\,m\,x\,z)$$

Дакле кад на неко тело дејствује речена ексцентричка сила P, онда се најзад све лењиве силе своде на три и то силу P, силу X и Y које се све три уопште узев у простору укрштају а не секу се, зато се и резултујући притисак на подупртим тачкама обртне осе одређује силама $+P$, $+X$ и $+Y$ са нападним тачкама у W, U и V слика 2.



Слика 2.

У извесним специјалним случајима могла би и та околност наступити да буде н. пр. резултанта свих трију сила P, X и Y равна нули, а то би био онда случај, кад би прво силе X и Y пале у исту обртну раван, а сила P дејствовала у западној линији резултанте Q сила X и Y, по смислу дејствовала противно а по интензитету морала би бити равна Q, дакле кад је још и

$$P + Q = 0$$

онда би и притисак на обртној оси био раван нули. Така линија, у којој би дејствовала ексцентричка сила P па да упливом исте буде притисак на обртној оси раван нули зове се линија удара, а свака тачка исте линије зове се средиште удара.

Пошто така сила P мора лежати у равни сила X и Y ако се лењиве силе дају на таке свести, онда је за одредбу линије удара нужна ова условна једначина

$$c_x = c_y = c$$

а ако раван сила X и Y узмемо још и за координатну xy-ску раван, онда ће бити:

$$c_x = c_y = c = 0.$$

који случај може само онда наступити кад буде било: $\mathfrak{M}_x = \mathfrak{M}_y = o$ а то ће бити онда кад је:

$$\Sigma(mxz) = o \text{ и } \Sigma(myz) = o.$$

Овим је двема једначинама одређена раван удара. Дакле ако можемо на Z осу наћи таку обртну раван, за који последњи услов постоји, онда се и силе X и Y дају на само једну једиту просту силу свести. Последња су два услова испуњена н. пр. онда кад би xy-ска раван била раван симетрије, осим овога, последње две једначине казују нам да је Z оса главна оса момента лењивости за тело које се око исте обрће, зато ако је обратно обртна оса главна оса момента лењивости а то за тачку C, онда ће и силе X и Y лежати у једној равни, која кроз C пролази и стоји на Z оси управно, и тада се резултујуће дејство лењивих сила даје заменити само са једном силом:

$$Q = \sqrt{X^2 + Y^2} = Mr_s\sqrt{\omega^4 + k^2}$$

где нам M значи масу целог тела $(= \Sigma(m))$, а r_s то је полупречник обртања тежишта система, или остојање тежишта системе од обртне Z осе. Но ако тражимо од силе P да нам она силу Q уништи, те да се услед тога не произведе потрес или притисак на обртној оси, онда мора да је

$$P + Q = o$$

дакле и:

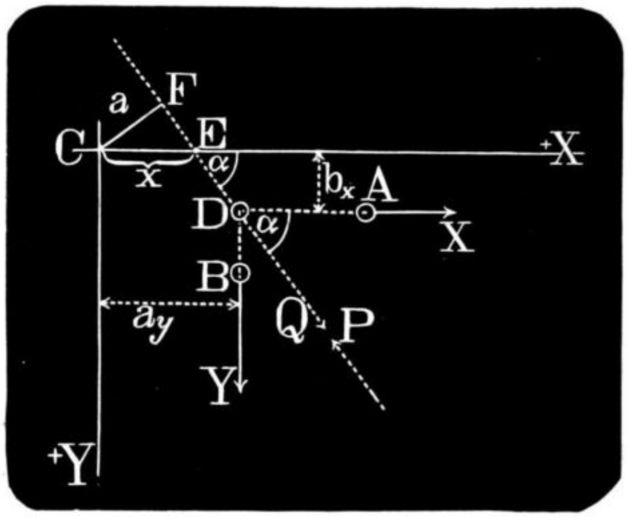
$$P = - Mr_s\sqrt{\omega^4 + k^2} \ldots (X.$$

Ми смо тако дакле нашли јачину силе P, која ће потрти дејство лењивих сила на обртној оси, која је по јачини оно лика као и за једну материјалну тачку што би испала кад би цела маса система била у тежишту истога система; ваља још да нађемо и место исте силе P, место је њено у нападној линији силе Q. Пошто је заједничка нападна тачка D слика 3., сила X и Y у xy равни одређена координатима a_y и b_x, то је иста тачка D у исто доба и једна од тачака кроз коју ваља да прелази сила P од које тражимо да нам кретање уништи а без потреса на обртну осу.

Да би дакле нашли још и правац нападне линије силе P, то означимо са α онај угао који резултанта Q лењивих сила са X осом заклона, па је онда:

$$\text{XI}). \quad tang.\, \alpha = \frac{Y}{X} = \frac{\omega^2 \Sigma (my) - k \Sigma (mx)}{\omega^2 \Sigma (mx) + k \Sigma (my)}$$

углом α одређен је и правац силе P.



Слика 3.

Дакле, сила $P = Mr_s \sqrt{\omega^4 + k^2}$, која пролази кроз тачку D, заклона са X осми угао α кога је угла дирка дата у једначини XI). и осим тога дејствује по смислу сили Q противном, она ће уништити угловно убрзање k као и угловну брзину ω, или она ће спречити окретање тела а на осовини неће бити никаког притиска. Овде узета ударајућа сила P има онда реченог смисла и значења, кад би се ω и k произвело пре њеног дејства неким динамичким спрегом ($\mathfrak{P}, -\mathfrak{P}$), а пошто се ω и k произвело, то онда да нађемо силу P по јачини и месту која би свако кретање спречила а да се на оси не произведе потреса.

Пошто је положај равни xz која кроз обртну Z осу пролази произвољан, то је ми можемо ставити да иста прође и кроз тежиште тела, у таким је случају $\Sigma (my) = o$ дакле је онда и

$$XI_a) \ldots tg\,\alpha = -\frac{k}{\omega^2}.$$

Једначина линије удара речене особине дата је у овом облику:

$$y - b_x = tg.\,\alpha\,(x - a_y)$$

где кад заменемо одговарајуће вредности биће:

$$XII).\ y - \frac{\omega^2\Sigma(mxy) + k\,\Sigma(my^2)}{\omega^2\Sigma(mx) + k\,\Sigma(my)}$$

$$= \frac{\omega^2\Sigma(my) - k\,\Sigma(mx)}{\omega^2\Sigma(my) - k(\Sigma my)}\left(X - \frac{\omega^2\Sigma(mxy) - k\,\Sigma(mx^2)}{\omega^2\Sigma(my) - k\,\Sigma(my)}\right)$$

према овој једначини јесте абсциса пресечне тачке E линије удара са X осом дата у овом изразу:

$$x = -\frac{k\{\Sigma(mx^2) + \Sigma(my^2)\}}{\omega^2\Sigma(my) - k\,\Sigma(mx)}.$$

Но ако нам раван xz пролази кроз тежиште тела, онда је за такав положај речене равни:

$$x = \frac{k\{\Sigma(mx^2) + \Sigma(my^2)\}}{k\,\Sigma(mx)}$$

или

$$IX_b) \ldots\ldots x = \frac{J_z}{\Sigma(mx)}.$$

Дакле правац резултујуће силе [illegible], пролази свакад кроз једну и исту тачку E, X осе која је тачка за $\frac{J_z}{\Sigma(mx)}$ удаљена од почетка C, правац је силе променљив јер је исти по XI_a) зависан од ω.

Означимо још са a крак обраћује силе P, — а то је крак и за силу Q, па је онда:

$$a = \frac{ax}{\sqrt{1 + tg.^2 \alpha}}$$ где кад извршимо нужну замену биће:

$$\text{XIII).}\ a = - \frac{k\{\Sigma(mx^2) + \Sigma(my^2)\}}{Mr_s \sqrt{\omega^4 + k^2}} = - \frac{k\,J_z}{Mr_s \sqrt{\omega^4 + k^2}}$$

за крак a одречан знак што смо добили, значи да је смисао момента силе P противан смислу момента лењиве силе Q, као што то и треба да је тако.

Пошто будемо довели у свезу једначину XI_a) и XI_b), лако је увидети да је геометријско значење крајње тачке F крака a ништа друго но круг кога је пречник $= x$, који лежи у X оси тешке равни xz-ске.

Најзад кад би ударајућа сила P дејстовала на мирно тело, и тражило би се од исте силе то, да нам она произведе у телу угловно убрзање k а да на осу не произведе потреса, или да нам уништи само дејство тангенцијалних лењивих сила, онда је за такав случај $\omega = o$, а тај исти услов можемо унети у рачун, ако одустанемо од дејства центрифуралних сила, дакле све оне чланове који су снабдевени са сачиниоцем ω да их изоставимо. За такав случај јесте:

$$\text{XIV).}\ tg.\alpha = - \frac{\Sigma(mx)}{\Sigma(my)} = - \frac{Mx_s}{my_s} = - \frac{x_s}{y_s}$$

где су нам x_s и y_s абсциса и ордината тежишта S система.

Означимо сада са φ онај угао који тешка раван система пролазећа кроз Z осу закона са xz равни, па је онда:

$$\text{XV).}\ tg.\varphi = \frac{y_s}{x_s} = - cotg.\,\alpha.$$

одкуда за нас ево ово важно докачење:

Сила P мора стајати управно на тешкој равни која кроз Z осу пролази (ово изилази из XI_a) кад метемо $\omega = o$) а која је још главна оса момента лењивости за тачку C, која лежи у обртној равни xy за коју ваља да је испуњен услов

$$\alpha)\ \Sigma(mxz) = o \text{ и } \Sigma(myz) = o.$$

Пошто је по горњој поставци $\omega = o$, то је и бројна вредност крака a силе P дата у изразу:

$$\text{XVI}).\ a = \frac{J_z}{Mr_s}$$

Услов под $\alpha)$ испуњен је онда кад је н. пр. xy раван раван симетрије, те из свега горњег изилази ово:

Нападна линија силе P, која има да произведе угловно убрзање k или која има да тако убрзање уништи, те да се на оси не произведе потреса — од дејства лењивих тангенцијалних сила — ваља да лежи у равни симетрије тела која лежи управно на обртној Z оси; осим тога мора да лежи правац силе P још и управно на оној тешкој равни тела која кроз Z осу пролази, нападна линија силе P удаљена је од Z осе за крак a који добијамо по једначини XVI).

Такова тачка F која лежи у реченој тешкој равни, а удаљена је од Z осе за a назива се просто средиште удара, и ако исту тачку може да замени свака тачка у нападној линији силе P.

Пошто је одредба тачке F независна од величине убрзања k, то онда кад ударимо тело у таквој тачци, ма колико великом силом P, она неће произвести потреса на обртној оси, који би иначе постао услед дејства лењивих тангенцијалних сила, или ако би се тело пре дејства силе P већ обртало по извесном закону, и у моменту судара постојало неко убрзање k, то сила P по довршеном удару или дејству у тачци F неби ни у колико изменила пре удара дејствујуће притисе на обртној оси, така сила неби произвела нове лењиве тангенцијалне силе, које би се на осовини као реактивне могле појавити кад би сила P у некој другој тачци F' дејствовала које би остојање од Z осе било $\lesseqgtr a$.

Будемо ли пак тешку раван која кроз Z осу пролази узели за xz раван, а раван симетрије која је управна на Z оси на xy-ску раван, онда нам је за такав координатан систем

$$tang.\alpha = -\frac{k}{\omega^2}$$

а ако је још и $\omega = o$ онда је и $X = o$, те се тада резултанта лењивих сила своди на $Q = Y$. Нападна тачка резултанте Y која лежи у xy-ској равни, одређена је у овом случају просто координатима:

$$a_y = \frac{\Sigma(mx^2)}{\Sigma(mx)}$$

$$b_y = \frac{\Sigma(mxy)}{\Sigma(my)}$$

Према овоме је крак a оне силе P, која кад дејствује на тело да она њеним дејством не произведе потреса на обртној оси, дат још и овим особеним новим изразом:

$$a_y = a = \frac{\Sigma(mx^2)}{\Sigma(mx)} = \frac{\text{моменат лењивости за } yz \text{ раван}}{\text{статистички моменат масе за } yz \text{ раван}}$$

Међу тим, ако би xz раван била још и раван симетрије, или најзад и така раван за коју је $\Sigma(mxy) = o$, онда би у таком случају било $b_y = o$, дакле средиште удара лежало би само у оваком случају у тешкој равни која кроз Z пролази, а удаљена од Z осе у X оси — тешкој линији — за a_y. Овако средиште удара било би и јесте права нападна тачка лењиве силе Y, па дакле и ударајуће:

$$P = Y = Q.$$

Из свега што смо до сада дознали о линији удара, изилази за нас ово важно. За ма коју тачку C у телу, постоји само извесан положај осовине Z, око које кад се тело обрће, да може бити и извесна линија удара, у којој кад ма каква динамичка сила дејствује, она не промењује њеним дејством већ постојеће притиске на обртној оси. Обратно, она оса Z за тачку C, која оса има линију удара, јесте и главна оса момента лењивости за исту тачку C; но пошто ми по теорији о моментима лењивости имамо за сваку тачку тела, три главне осе момента лењивости, то ћемо онда и за сваку тачку моћи наћи и три осе положаја обртних оса, за које ћемо у стању бити наћи и линију удара. Линија удара за ма коју главну осу као обртну осу, лежи у равни оних других двеју главних оса.

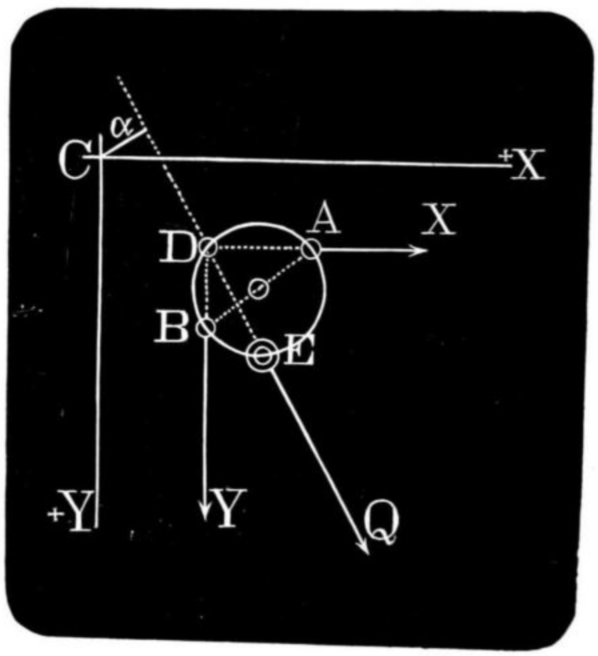
Ако је положај координатиних оса у простору и за тачку C као почетак такав, да је Z оса главна оса момента лењивости, за тачку C, онда се као што знамо своди и резултат склапања резултујуће лењиве силе само на две X и Y којих су нападне тачке A и B, слика 4. а леже у равни оних других двеју главних оса момента лењивости за исту тачку C. У оваком се случају права нападна тачка резултујуће лењиве силе:

$$Q = \sqrt{X^2 + Y^2} = Mr_s \sqrt{\omega^4 + k^2}$$

налази у периферији круга који пролази кроз тачке A, B и D, где је тачка D пресечна тачка праваца сила X и Y

а специјално још у оној тачци E у којој правац резултујуће силе Q сече речени круг. Ово изилази из теорије о средишту равног система сила.

Међу тим пошто за ма коју вредност угловне брзине ω, правац силе Q пролази увек кроз тачку E слика 3. која је у тешкој XZ равни, то је онда јасно да је E средиште удара и да је тачка E слика 3. интендична са тачком E слика 4.



Слика 4.

Пошто је у опште:

$$a = \frac{k\,J_z}{Mr_s\sqrt{\omega^4 + k^2}}$$

то је јасно да је за свако друго ω и крак a други, а исто је тако и друга вредност угла α, на ком краку и у ком правцу имала би да дејствује сила $P = Mr_s\sqrt{w^4 + k^2}$

која је тако исто зависно од угловне брзине ω, те да уништи кретање без потреса обртне осе. За $\omega = o$, а $k = const$ јесте a максимум, а сила P минимум. Према овоме ће и линија удара обавијати неку особену линију у равни xy-ској — а та је линија ништа друго но баш сама тачка E слика 3. која лежи у тешкој zx. равни, види једначину XI_b), и зависна је само од геометријског облика тела кад је ово хомогено.

Најзад нека је познат моменат $\mathfrak{M}$ неког динамичког спрега ($\mathfrak{P}$,—$\mathfrak{P}$), који својим дејством нека је произвео за обртну Z осу као главну осу момента лењивости угловно убвзање k и угловну брзину ω, онда је речени моменат а и механичан рад $\mathfrak{A}$ истог спрега дат у овим вредностима:

$$\mathfrak{M} = k\, J_z \quad \text{и} \quad \mathfrak{A} = \frac{1}{2}\, \omega^2\, J_z.$$

од куда је:

$$\omega^2 = \frac{2\,\mathfrak{A}}{J_z}$$

пошто будемо сада ω као и $k\,J$ заменили у једначини XIII., биће:

$$a = \frac{k\,J_z}{Mr_s\sqrt{\dfrac{4\mathfrak{A}}{J_z^2} + k^2}} = \frac{1}{k}\,\frac{k^2\,J_z^2}{Mr_s\sqrt{4\mathfrak{A}^2 + k^2\,J_z^2}}$$

дакле је најзад:

$$a = \frac{\mathfrak{M}^2}{M(r_s\,k)\sqrt{4\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{M}^2}}$$

но пошто је $r_s\,k = p_t$ тангенцијално убрзање тежишта S система који се око Z осе окреће, то је онда:

$$a = \frac{\mathfrak{M}^2}{Mp_t\sqrt{4^2\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{M}^2}} \;..\; \text{(XVII.}$$

Ми имамо дакле сада крак a ударајуће силе изражен као функција рада $\mathfrak{A}$, момента $\mathfrak{M}$ динамичког спрега $(\mathfrak{P}, -\mathfrak{P})$, и тангенцијалног убрзања тежишта система а за случај кад је Z оса главна оса момента лењивости за тачку C кроз коју пролази xy. раван, у којој лежи и линија удара. На подобан начин прелази нам и образац X). у овај:

$$P = Q = \frac{Mr_s}{J_z}\sqrt{4\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{M}^2} \; . \; . \; . \; (XVIII.$$

Дакле што се буде истим моментом $\mathfrak{M}$ већи рад производио, у толико ће и сила морати бити у извесном односу већа.

Најзад и једначина XI) прелази нам у ову:

$$tang.\, \alpha = \frac{2\mathfrak{A} y_s - k\, J_z\, x_s}{2\mathfrak{A} r_s + k\, J_z\, y_s} \; . \; . \; (XIX.$$

где нам x_s и y_s значи одстојање тежишта тела од yz. и xz. равни. Узмемо ли тешку раван која кроз Z пролази за xz. раван онда је $y_s = o$, то је за тај случај простије:

$$tang.\, \alpha = \frac{-k J_z\, x_s}{2\mathfrak{A} x_s} = -\frac{k}{2} \cdot \frac{J_s}{\mathfrak{A}} \; . \; . \; (XX.$$

према томе је угао α зависан само од рада $\mathfrak{A}$, пошто је за $\mathfrak{M}$ стално и угловно убрзање k стално.

Ја сам овде изложену општу теорију о дејству лењивих сила на обртну осу зато изнео на јавност, да би показао то, како је погрешно схватан досадањи појам о средишту удара. Под средиштем удара у неком телу а за дату обртну осу, разумевала се она тачка, у којој под извесним правцем кад сила удара или дејствује на тело да она онда потре притиске на обртној оси. При одредби овакове тачке прешло се ћутке преко дејства центрифуларних сила, но се узимале у рачун само реактивне —

лењиве — тангенцијалне силе. Зато је и природно да се при реченом захтеву неможе уклонити цео потрес на обртну осу, а овај наступа чим се тело покрене, јер се тада пробуђују центрифуларне силе, које се ударајући тело у речену тачку, не потиру.

Међу тим, ја сматрам ону тачку за средиште удара, а то је строго узев тачка E слика 3. и 4. у којој кад динамичка сила одређене јачине и одређеног правца дејствује, да она њеним дејством уништи обртно кретање а при том да потре и резултујуће дејство свеколиких лењивих сила, не остављајући на осовини никака потреса или притиска. Овака је тачка једино зависна од геометријског облика тела или од узајмног распореда материјалних тачака у телу према обртној осовини. — Средиште удара, као што га ја дефинишем, јесте дакле у телу непокретна тачка, а правац и јачина ударајуће силе јесу промењиви.

Даље ваља напоменути још и ово: Средиште удара узев у обзир и дејство центрифуларних сила, не разликује се од средишта удара узев у обзир само тангенцијалне силе, но је једина и главна разлика у правцу дејства силе која би потрла дејства свију лењивих сила. Док је, узев у обзир само тангенцијалне силе, правац ударајуће силе управан на тешкој xz равни, дотле је правац таке силе, узев у обзир и дејство центрифуларних сила, кос према тешкој xz равни јер је правац силе у последњем случају одређен једначином $tg.\alpha = -\frac{k}{\omega^2}$.

Осим горе реченог, држим да је много коректније говорити о линији удара коју би могли назвати оса средишта удара, а то је нападна линија — или место — оне силе, у којој кад иста буде дејствовала, које је јачина $P = Q$, да нам она кретања уништи а да на обртној оси не произведе никаког потреса. Овако би могли по-сматрати ствар зато, што ће свака тачка у линији удара моћи играти улогу средишта удара, но строго узев тачка је E она која би се могла у правом смислу речи назвати средиште резултујуће лењиве силе, дакле и средиште удара.

Најзад нека ми је дозвољено да обратим пажњу читаоца овог рада још и на једначине (XVII., (XVIII., (XIX. које држим да су сасвим новог облика, и које су врло важне за теорију о средишту удара у оном случају, кад је познат рад динамичког спрега и његов обртни моменат.

12 Декембра 1881
Београд.

Љуб. Клерић
ПРОФЕСОР МЕКАНИКЕ У ВЕЛ. ШКОЛИ.

ГЛАСНИК

СРПСКОГ УЧЕНОГ ДРУШТВА

КЊИГА 54

РАСПРАВЕ И ДРУГИ ЧЛАНЦИ

У БЕОГРАДУ 1883

У ШТАМПАРИЈИ КРАЉЕВИНЕ СРБИЈЕ

На продају у књижарници В. Валожића

Преглед.

СТРАНА

1. Теорија о повратној сили зáкона. Правничка студија Глише Гершића 1
2. Како делује јод на моно- и динитро-дифенил-тијокарбамид (мета), од С. М. Лозанића 95
3. О постајању дибром-динитро-метана и о Вилијеровом тетранитро-етилен-бромиду, од С. М. Лозанића . . . 99
4. Анализа српских минералних вода, од С. М. Лозанића . 102
5. Неколико нових образаца за број комбинација са задатим збиром, од Димитрија Нешића 111
6. О средишту сила у равни у опште, од Љубомира Клерића. 115
7. Графичко представљање вредности простог односа тачке у низу и зрака у прамену, од Петра Живковића. . . 129
8. Стање и односи српских архонтија према Угарској и према Византији, у половини 12 века, од П. Срећковића 155
9. Црна Река. Прилог за историју и етнографију Србије. Од Драгољуба К. Јовановића 187
10. Изводи из записника српскога ученог друштва, 1883 . 257

О СРЕДИШТУ СИЛА У РАВНИ У ОПШТЕ.

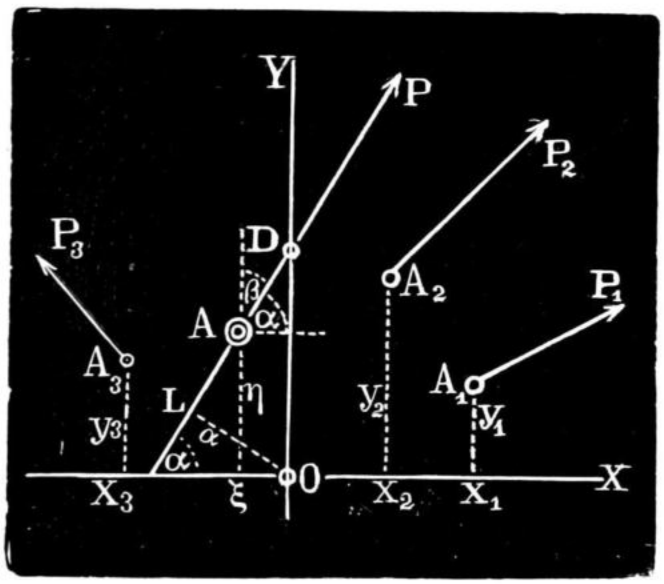
Кад се у меканици слаже или склапа дати и одређени систем сила, који је у равни, то се исти посао врши у цељи одредбе резултанте датог система сила, другим речма, тражи се датом систему сила она њему еквивалентна сила, која ће кадра бити да дати систем сила у свему замени а ово кад је реч о кретању система, или кад је реч о одредби равнотеже, (мировања и једнаког кретања). Слажући силе у резултанту, служимо се принципом пренашања нападне тачке појединих сила из датог система сила по њиховој нападној линији. Тим путем доводимо нападне тачке н. пр. ма које две силе — из система сила — у пресечну тачку C њихових нападних линија, па на исту тачку пренашамо и саме силе сматрајући је сада као заједничку нападну тачку. Кад је то тако урађено, онда се примењује принцип паралелограма сила за две силе које под извесним углом у тачци C дејствују. Дијагонала таког паралелограма сила, јесте резултанта речених двеју сила из система. За тим се узме ма која трећа сила из система сила, па се онда њена нападања линија продужи док се не пресече у тачци C_1 са резултантом првих двеју сила. На тачку C_1 преноси се резултанта првих двеју сила — као сила истима еквивалентна — а то се исто ради и са трећом силом из система; затим се на исте две силе, које имају сада заједничку нападну тачку C_1 примењује поново принцип паралелограма сила.

Дијагонала тог паралелограма даје нам интензитет и смисао резултанте речених трији сила из система, а место исте дијагонале јесте у исто доба и нападна линија речене резултанте, у којој линији — кад је говор о пргоресивном кретању — можемо узети нападну тачку исте резултанте где хоћемо. Употребљујући на показани начин више пута паралеограм сила, преносећи нападне тачке делимичких резултаната и следеће силе система до пресека њихових нападних линија, долазимо најзад и до последњег паралеограма, кога је дијагонала по величини равна интезитету резултанте целог система сила, а место исте дијагонале јесте у исто доба и место саме нападне линије исте резултанте датог система сила у равни. То је дакле она сила, која ће моћи да дати систем сила замени те да произведе оно исто кретање, које би произвеле све силе система, кад оне заједнички дејствују. Описани начин слагања сила јесте графички, међу тим у механичким задатцима често је пута потребно, да нађемо рачуниским путем: интезитет, место и смисао резултанте датог система сила, о чему ће бити говора у овом што долази.

Слажући силе или путем цртања или пак путем рачунања, обично се задовољавало код теорије о силама, да се по оба речена метода нађе просто само: интензитет резултанте, њен смисао и место њене нападне линије; не водећи при томе рачуна још и о нападној тачци исте резутанте. Међу тим, има у природи и таких сила (сила теже, хиростатички притисци на елементима оквашене криве површине и. то. подобно), које су свака за се везане за извесну или одређену тачку у простору равни у којој исте дејствује па ма какав правац исте силе заузимале, не мењајући при таком окретању њихов релативан положај. Дакле, кад се систем сила у равни састоји из таких појединих сила, од којих су свака појединце припете за своју одређену напудну тачку у равни и то тако, да кад се једна од сила окрене око своје нападне тачке за извесан угао φ, то да и све остале око својих нападних тачака скрену за исти угао φ и у истом смислу, то нам онда за такав систем сила вреди овај закон: Као што је свака сила из система сила везана за одређену тачку као њену нападну тачку, то исто вреди и за резултанту целог система сила, и резултанта система сила има извесну одређену и само јединцату тачку — њему нападну тачку — кроз коју ће правац исте резултанте стално пролазити, па ма какав правац буде резултанта у равни сила заузимала. Даље, кад поједине силе система скрену око својих нападних тачака за угао φ, за тај ће исти угао скренути и резултанта система, а у истом смислу са њеним компонентама, око њене нападне тачке. Овакова тачка резултанте зове се средиште — нападна тачка — система сила у равни. Средиште система сила има ту особину, да кад би неки крути систем тачака у равни, на који силе именоване особине дејствују, везали за исту тачку или кад би исту тачку подупрли, то би онда такав крути систем могли окретати како хоћемо око осовине, што пролази кроз средиште, а стоји управно на равни сила, такав би систем остао у свима положајима у равнотежи. Дакле средиште сила јесте у исто доба и средиште за равнотежу а речена оса зове се још и оса немарне — индиферентне — равнотеже.

Пример уз ово био би овај: узмимо да имамо неку круту а танку материјалну плочу, која лежи на непомичној хоризонталној равни, па да у њеним разним тачкама A_1, A_2, A_3 и т. д. нападају у равни плоче сталне а разне силе P_1, P_2, P_3 и т. д., али тако, да кад исту плочу окренемо око неке вертикалне осовине, дакле је доведемо у други положај према непокретној хоризонатној равни, то да при таком окретању остане сила: P_1, P_2, P_3 . . . свака за се свом првашњем положају паралелна, са истим нападним тачкама A_1, A_2, A_3 и т. д. (услед чега ће свака тачка A_1, A_2 и т. д. описати разне кружне лукове око обртне осовине). При оваком дејству сила, окренуће се свака од сила о косвојих нападних тачака, а према плочи, за онај исти угао φ, за који се и плоча око своје обрне осовине окренула, силе ће дакле и у новом положају задржати њихов сталан релативан положај. Пошто смо овде узели обртну осовину са свим произвољну, то ће уопште узев, резултанта система сила у новом положају плоче, пролазити ван обртне осовине, дакле резултанта ће имати према обртној осовини момента, и тежиће, да кад плочу самој себи оставимо дејству речених сила, да врати или окрене у такав положај, у ком ће резултанта пролазити кроз повољно узету обрну осовину. Будели пак при првом обртању плоче — сматрајући да се плоча, утврђена за произвољну вертикалну осовину, налазило у почетку обртања у миру, дакле да нападна линија резултанте прелази кроз исту осовину, — резултанта система, рачунато од њене нападне тачке имала такав правац, да јој њен смисао иде од нападне тачке па ка обртној осовини, или пак буде ли резултанта имала такав правац, рачунато опет од њене нападне тачке, да јој смисао иде од обртне осовине, у спољашност, то ће се у првом случају налазити тело у лабилној равнотежи, а у другом пак случају у стабилној равнотежи. Међу тим само онда, кад буде пролазила обртна осовина кроз ону тачку круте плоче, која се буде поклапала са средиштем сила, тек ће у таком случају иста осовина бити осовина неутралне равнотеже. Кад је плоча у овакој осовини утврђена, онда можемо плочу око исте осовине за ма колики угао окренути па је онда оставити дејству система сила, равнотежа неће се пореметити, плоча ће остати у оном положају у ком смо је и оставили. Овака осовина зове се у хидростатици пловећих тела осовина метацентрума, која игра у бродарству веома важну улогу, а код физичких тела, изложена дејству свог сопственог терета, јесте оса немарне равнотеже свака права која пролази кроз тежиште истог тела и која се ту зове још и тешка линија. Ми ћемо мало доцније видети, како је тежиште само специјални случај средишта сила уопште. Да приступим даље да израчунимо: 1.) интензитет резултанте датог система сила, 2.) правац резултанте, 3) место њено и 4) њену нападну тачку, које тачке координате да означимо са η и ξ.

Нека су нам познате и дате у некој равни дејствујуће силе P_1, P_2, P_3 и т. д. по месту смислу и интезитету са одређеним нападним тачкама A_1, A_2, A_3 и т. д. Узмимо сада у равни сила неку повољну тачку 0 слика 1, и кроз исту



Слика 1.

повуцимо правоугле осовине $X\overline{X}$ и $Y\overline{Y}$. Према тим координатним осовинама дате су и нападне тачке: A_1, A_2 и т. д. редом овим координатама x_1, y_1 | x_2, y_2 | и т. д. правце сила утврдимо угловима које исте са X. и Y. осовином заклапају и то: са α_1, α_2, α_3 и т. д. оне углове што силе са $+ X$. осовином заклапају, као и са β_1, β_2, β_3 и т. д. оне угле, што правци истих сила са $+ Y$ осовином заклапају.

Последњим је податцима одређено место појединих сила а и њихов је смисао утврђен. Кад појединe силе из датог система сила разложимо на правоугле компоненте у правцу $X\overline{X}$ и $Y\overline{Y}$ осовине, и означимо исте компоненте редом са: X_1, X_2, X_3 и са Y_1, Y_2, Y_3 и т. д. као и кад означимо исте таке компонентне резултанте P система просто са X и Y, као и углове што сила P са $+X$ и $+Y$ осовином заклапа кад означимо са α и β, што ћемо добити да је:

$$\begin{array}{lcl} X_1 = P_1 \cos. \alpha_1 & & Y_1 = P_1 co\,.\, \beta_1 \\ X_2 = P_2 \cos. \alpha_2 & \text{и} & Y_2 = P_2 \cos. \beta_2 \\ X_3 = P_3 \cos. \alpha_3 & & Y_3 = P_3 \cos. \beta_3 \\ \vdots \quad\quad \vdots & & \vdots \quad\quad \vdots \end{array}$$

Међу тим употребљујући за слагање сила премештање нанадне тачке и принцип паралелограма сила, видимо, да кад је говор само о интезитету резултанте и њеном правцу и смислу, онда се то троје налази исто онако као кад би све силе датог система сила биле свака од њих пренесена на заједничку нападну тачку а паралелно самој себи; за такав је случај:

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + \ldots = P_1 \cos. \alpha_1 + P_2 \cos. \alpha_2 + \ldots$$
$$= \Sigma (P \cos. \alpha)$$

и

$$Y = Y_1 + Y_2 + Y_3 + \ldots = P_1 \cos. \beta_1 + P_2 \cos. \beta_2 + \ldots$$
$$= \Sigma (P \cos. \beta)$$

зато је резултанта система сила по интензитенту дата у овој једначини:

$$1.) = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{[\Sigma (P \cos. \alpha)]^2 + [\Sigma (P \cos. \beta)]^2};$$

а правац и смисао резултанте одређује нам ова једначина:

$$2.)\ tang.\, \alpha = \frac{Y}{X} = \frac{\Sigma (P \cos. \beta)}{\Sigma (P \cos. \alpha)}.$$

Последњим двема једначинама одредили смо само интензитет, правац и смисао резултанте, но то још није довољно за ону силу која ће бити еквивалентна датом систему сила, пошто ће само одређена сила P на одређеном месту у равни сила кад дејствује, моћи дати систем сила заменити, зато ваља да одредимо још и резултантино место. Место резултанте налазимо по принципу статичких момената овако:

Означимо са a нормално отстојање нападне линије резултанте од тачке 0 рачунато; а пошто нам систем сила: P_1, X_2 и т. д. Y_1, Y_2 и т. д. замењује дати систем сила P_1, P_2 и т. д., то је онда статички моменат резултанте ово:

$$Pa = (X_1 y_1 + X_2 y_2 + \ldots) - (Y_1 x_1 + Y_2 x_2 + \ldots)$$
$$= \Sigma(Xy) - \Sigma(Yx)$$

одкуда је крак разултујуће силе дат у овој вредности:

$$3.)\quad a = \frac{\Sigma(X.y) - \Sigma(Y.x)}{P}.$$

којом је једначином одређено и резултантино место.

За одредбу пак средишта датог система сила, биће потребно да одредимо још и једначину нападне линије исле P; у тој цељи одредимо отстојање пресечне тачке D резултанте P са Y осовином мерено од тачке 0. Отстојање $\overline{0D} = \frac{a}{cos.\,\alpha}$, дакле је $a = \overline{0D}.\,cos\,\alpha$, кад послењу вредност заменимо у једначини 3.) биће:

$$\overline{0D}.\,cos.\,\alpha = \frac{\Sigma(Xy) - \Sigma(Yx)}{P}$$

одкуда је:

$$\overline{0D} = \frac{\Sigma(Xy) - \Sigma(Yx)}{P.\,cos.\,\alpha}.$$

Пошто је нападна линија резултанте права, то је исте линије једначина овог облика:

$$y = tang.\, \alpha \,.x + b$$

где је $tang.\, \alpha = \frac{Y}{X} = \frac{\Sigma(Y)}{\Sigma(X)}$ и $b = \overline{0D}$

то је према томе и нападна линија резултанте позната и дата у овој једначини:

$$y = \frac{\Sigma(Y)}{\Sigma(X)}\, x + \frac{\Sigma(X.y) - \Sigma(Y.x)}{P\cos.\, \alpha};$$

али је $P.\cos \alpha = \Sigma(X)$ зато је још:

$$4.)\quad y = \frac{\Sigma(Y)}{\Sigma(X)}.\, x + \frac{\Sigma(X.y) - \Sigma(Y.x)}{\Sigma(X)}.$$

Да би могли да одредимо координате η и ξ средишта A датог система сила, то окренимо сваку силу: P_1, P_2 и т. д. око своје нападне тачке A_1, A_2, и т. д. за угао 90^0 у истом смислу, па компоненте тих окренутих сила у правцу X. и Y. осовине означимо редом са: X'_1, X'_2 и т. д. са: Y'_1, Y'_2 и т. д. па је онда н. пр.

$$X'_1 = P_1 \cos.(\alpha_1 + 90^0) = - P_1 \sin.\, \alpha_1$$

$$= - P_1 \cos.\, \beta_1 = - Y_1$$

дакле је:

$$\alpha)\ldots\ldots\ X'_1 = - Y_1;$$

исто је тако и

$$Y'_1 = P_1 \cos.(\beta_1 - 90^0) = P_1 \cos. - (90^0 - \beta_1)$$

$$= P_1 \cos.(90^0 - \beta_1) = P_1.\sin.\, \beta = P_1 \cos.\, \alpha_1.$$

дакле је:

$$\beta)\ Y'_1 = X_1$$

Дакле, једначину нападне линије за 90° окренутог система сила P_1, P_2 и т. д. добијамо просто из једначине 4.) кад тамо метемо место количина X_1, X_2 .... количине X'_1, X'_2 ...., као и место Y_1, Y_2 .... метемо количине Y'_1 Y'_2 и т. д.; а пошто исто замењивање доведемо у свезу још и са једначинама под $\alpha)$ и $\beta)$, онда је једначина нападне линије резултанте за 90° окренутог система сила дата у изразу:

$$5.)\ y = -\frac{\Sigma(X)}{\Sigma(Y)}.x + \frac{\Sigma(Yy) + \Sigma(Xx)}{\Sigma(Y)}.$$

Пошто сравнимо једначину 5.) са једначином 4.) видимо из угаоних сачиниоца истих једначина, да обе једначине припадају двема правима које се под правим углом секу, дакле под оним истим углом за који смо поједине силе система окренули, дакле се и резултанта истог система окренула за 90°. Даље означимо са P' резултанту за 90° окренутог система сила, па је онда:

$$P' = \sqrt{[\Sigma(X')]^2 + [\Sigma(Y')]^2},$$

кад у истој једначини извршимо замене вредности које смо добили у једначинама под $\alpha)$ и $\beta)$, биће:

$$P' = \sqrt{[(-Y)]^2 + [(X)]^2} = \sqrt{[\Sigma(Y)]^2 + [\Sigma(X)]^2} = P$$

дакле је и:

$$P' = P,$$

а то значи, да се резултанта за 90° окренутог система сила по интензитету није променула.

Кад вежемо једначине 4.) и 5.) и решимо их по y и x дајући тим . исменима значење η и ξ, наћи ћемо у тим количинама координате средишта *(A)* датог система сила, а то је она тачка A, у којој се линије 4.) и 5.) секу, дакле означујући са η ординату а са ξ абсцису тачке A, биће:

$$6.)\ \eta = \frac{\Sigma(Y)\,\Sigma(Yy + Xx) - \Sigma(X)\,\Sigma(Yx - Xy)}{P^2}$$

и

$$7.)\ \xi = \frac{\Sigma(X)\,\Sigma(Yy + Xx) + \Sigma(Y)\,\Sigma(Yx - Xy)}{P^2}.$$

Пошто су на десној страни двеју једначина све киселине познате и сталне, то су зато сталне киселине и η и ξ па ма за колики се угао поједине компоненте система око својих нападних тачака окренуле; према томе и тачка A заузима савршено одређени положај у систему тачака A_1, A_2, A_3 и т. д. количине пак η и ξ можемо да изразимо и као функције првобитно датих вредности, а те су: x_1, x_2, . . . ; y_1, y_2, ... ; α_1, α_2, ... ; β_1, β_2, . . . ; P_1, P_2, ... , па је онда:

$$8.)\ \eta = \frac{\left\{\begin{array}{l} cos.\,\beta\,\Sigma(P\,cos.\,\beta\,y + P\,cos.\,\alpha\,.x) \\ - cos.\,\alpha\,\Sigma(P\,cos.\,\beta\,.x - P\,cos.\,\alpha\,y) \end{array}\right\}}{\sqrt{[\Sigma(P cos.\,\alpha)]^2 + [\Sigma(P\,cos.\,\beta)]^2}}$$

и

$$9.)\ \xi = \frac{\left\{\begin{array}{l} cos.\,\alpha\,\Sigma(P\,cos.\,\beta\,.y + P\,cos.\,\alpha\,.x) \\ + cos.\,\beta\,\Sigma(P\,cos.\,\beta\,.x - P\,cos.\,\alpha\,.y) \end{array}\right\}}{\sqrt{[\Sigma(P\,cos.\,\alpha)]^2 + [\Sigma(P\,cos.\,\beta)]^2}}$$

Ми смо дакле одредили координате средишта сила за најопштији систем сила у равни — са поставком да је систем еквивалентан простој сили — то је сада јасно, како се у том општем решењу морају садржати и особени случајеви.

Особени случај био би н. пр. тај, кад би све слиле P_1, P_2 и т. д. биле паралелне силе, а осовине координатне можемо тако положити да је н. пр. $X\overline{X}$. осовина паралелна нападним линијама истих сила. У оваком је случају $X_1 = P_1$, $X_2 = P_2$ и т. д. $Y_1 = Y_2 = \ldots = 0$, па је зато сада резултанта таког паралелног система сила дата у овом изразу:

$$P = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{X^2} = X = \Sigma(X)$$

одкуда је:

$$P = \Sigma(P).$$

Дакле резултанта паралелних сила, равна је алгебарној суми компанената.

Даље је:

$$tg.\alpha = \frac{Y}{X} = \frac{0}{X} = 0,$$

што значи: да је правац резултанте паралелних сила, паралелан њеним компонентама.

Осим овога, нападну тачку резултанте таког система сила, или средиште паралелног система сила, одређујемо координатама η и ξ из једначина 6.) и 7.), кад у тим једначинама ставимо $Y_1 = Y_2 = \ldots = 0$ и $\Sigma(Y) = 0$, то је онда:

$$\eta = \frac{\Sigma(X)\,\Sigma(Yy)}{P^2}$$

као што је и:

$$\xi = \frac{\Sigma(X)\,\Sigma(Xx)}{P^2}$$

али пошто је

$$\Sigma(X) = P, \Sigma(Xy) = \Sigma(Py) \text{ и } \Sigma(Xx) = \Sigma(Px)$$

то је најзад:

$$10.)\ \eta = \frac{\Sigma\,(Py)}{P} \text{ и } \xi = \frac{\Sigma\,(Px)}{P} \ldots (11.$$

У последњим једначинама имамо дакле координате средишта A паралелних сила P_1, P_2 и т. д., које су координате сталне донде, док се интензинтети сила P_1, P_2 и т. д. не мењају, а осим тога кад се још не мењеју ни координате: $x_1, x_2 \ldots;\ y_1, y_2 \ldots$ нападних тачака A_1, A_2 и т. д. речених паралелних сила.

Међу тим исте паралелне силе: P_1, P_2 и т. д. могу ма какав угао заклапати са XX осовином, дакле се могу за један и исти угао окренути око својих нападних тачака, тачка A неће мењати своје место, кроз њу ће увек пролазити правац резултанте, који ће бити паралелан њеним компонентама, а интензитет је резултантин раван алгебарној суми компонената. Даље тачка A, јесте и тачка равнотеже система, јер кад систем утврдимо у тачци A, систем ће се налазити у немарној — неутралној, индиферентној — равнотежи, па ма какав положај буду заузимале паралелне силе у њиховој равни где се оне находе.

Као што смо видели, ми можемо ма какав систем сила у равни заменути са два друга паралелна система, од којих је један систем паралелан $X\overline{X}$ осовини а други је паралелан $Y\overline{Y}$ осовини. Први систем има своју резултанту: $X = \Sigma\,(P\ cos.\ \alpha)$ са средиштем тачци у A_x, која је одређена координатама: η_x и ξ_x, а те су по једначинама 10.) и 11.) дате у изразима:

$$12.)\ \eta_x = \frac{\Sigma\,(Xy)}{\Sigma\,(X)} = \frac{\Sigma\,(P\ cos.\ \alpha\ y.)}{\Sigma\,(P\ cos.\ \alpha)}$$

и

$$13.)\ \xi_x = \frac{\Sigma\,(Xx)}{\Sigma\,(X)} = \frac{\Sigma\,(P\ cos.\ \alpha\ .x)}{\Sigma\,(P\ cos.\ \alpha)}.$$

Други систем има своју резултанту: $Y = \Sigma(P \cos. \beta)$ са средиштем у тачци A_y, која је одређена координатама η_y и ξ_y, а те су координате по једначинама 10.) и 11.) дате у изразима:

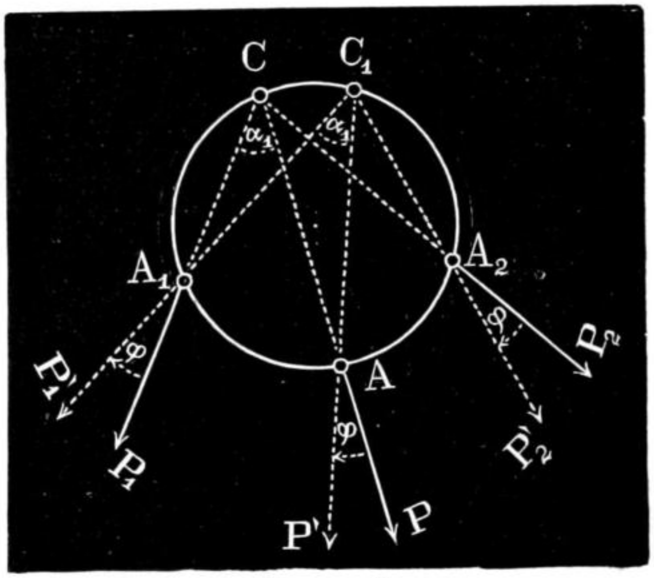
$$14.)\ \eta_y = \frac{\Sigma(Yy)}{\Sigma(Y)} = \frac{\Sigma(P \cos. \beta . y)}{\Sigma(P \cos. \beta)}$$

и

$$15.)\ \xi_y = \frac{\Sigma(Yx)}{\Sigma(Y)} = \frac{\Sigma(P \cos. \beta . x)}{\Sigma(P \cos. \beta)}.$$

Дакле силе: X и Y, са нападним тачкама у A_x и A_y замењују нам потпуно дати систем сила P_1, P_2 и т. д. Нападне линије сила X и Y, довољно продужене секу се у некој тачци C, а нападна тачка резултанте P датог система сила нека је A, које су тачке координате η и ξ дате једначинама 6.) и 7.) и која је тачка у систему стална. Но пошто силе X и Y будемо окренули око својих нападних тачака A_x и A_y у једном и истом смислу за један и исти угао φ, то ће се морати и резултанта P система окренути за исти угао φ у истом горњем смислу око своје нападне тачке A. Према томе ми ћемо за сваки други угао φ добијати и све друге и друге тачке C, а пошто се тачке A, A_x и A_y при таком обртању не мењају, то ће се такча C кретати по периферији сталног круга који пролази кроз сталне тачке A, A_x и A_y. Из овога изилази за слагање сталног система сила ово важно. Кад слажемо две силе P_1 и P_2 којих су нападне тачке редом A_1 и A_2 сталне, ваља да нападне линије сила P_1 и P_2 продужимо до пресека C, затим ваља описати око тачака C, A_1 и A_2 круг а затим постројити дијагоналу паралелограма сила P_1 и P_2, која дијогонала нека је PC слика 2; где нам иста дијогонала пресече периферију реченог круга, а то је у слици тачка A, то је онда иста тачка и средиште или нападна тачка резултанте P сила P_1 и P_2.

Употребљујући тако више пута поменути круг, можемо и путем цртања наћи систему сила: P_1, P_2 P_3 и т. д. одговарајуће средиште или тачку немарне равнотеже.



Слика 2.

Или, пошто се рачунским путем дају врло лако одредити координате тачака A_x и A_y, то ваља исте координате израчунати па онда обележити место тачкама A_x и A_y, које кад су обележене ваља пустити да дејствују на исте тачке силе X и Y, нападне линије тих сила кад подужимо до њиховог пресека добијамо тачку C, затим ваља постројити круг који иде кроз тачке A_x, C и A_y, и осим тога још и дијагоналу паралелограма сила, кога су стране X и Y, где нам иста сече периферују реченог круга, а то ће бити н. пр. у тачци A, то ће иста тачка бити средиште сила X и Y, дакле и средиште целог система сила P_1, P_2 и т. д. који је еквивалентан силама X и Y. Последњи метод одређивања тачке A, јесте у пола рачунски а у пола графички.

10. Декембра 1882 у Београду.

Љуб. Клерић

професор механике у вел. школи.

ГЛАСНИК

СРПСКОГА УЧЕНОГ ДРУШТВА

КЊИГА 60

РАСПРАВЕ И ДРУГИ ЧЛАНЦИ

СА ЈЕДНИМ ЦРТАЧКИМ ПРИЛОГОМ

У БЕОГРАДУ 1885
У ШТАМПАРИЈИ КРАЉЕВИНЕ СРБИЈЕ

На продају у књижарници В. Валожића

Преглед.

СТРАНА

1. Спољашњи односи Србије, II. Србија и кримска војна (1852—1856). Од Јов. Ристића 1
2. О границама знања. Од А. Васиљевића 106
3. Нешто о Горњој Морави. Од И. Јастребова. Са земљописном картом 123
4. Нови обрасци за број комбинација друге, треће и четврте класе, при неограниченом и броју и понављању основака. Од Д. Нешића 136
5. О једначини хронографа код опште промењивог кретања. Од Љ. Клерића 140
6. О непосредном заступању групе NH_2 у ароматичним аминима халогенама. Од С. М. Лозанића 148
7. Нове петрографске врсте. Од Ј. Жујовића 153
8. Друштвена и међународна борба за опстанак. Од Владимира Јовановића 165
9. Енглеска, француска и српска порота. Од Ј. Авакумовића. Први чланак 257
10. Књижевне оцене. I. О „Зборнику правила светијех апостола, васељенских и помјесних сабора", с грчкога превео архимандрит Н. Милаш. — II. „О јерархичном положају сарајевске митрополије", написао Н. Милаш; и о расправи „Ein Kampf um's Recht, Beitrag zur Lösung der orthodoxen Kirchenfrage in Bosnien-Herzegovina", написао протосинђел Радић. Од Н. Дучића архимандрита 319
11. Изводи из записника 1

О ЈЕДНАЧИНИ ХРОНОГРАФА КОД ОПШТЕ ПРОМЕНЉИВОГ КРЕТАЊА.

Кад се нека тачка креће по правој линији са једнаком брзином, онда је пут што прелази тачка, сразмеран времену. У таком случају можемо врло лако одредити оно време, које је протекло док је тачка неки одређени пут прешла, или кад знамо време кретања, можемо лако наћи место покретној тачци на њеној прâвој путањи. Међу тим, кад се тачка креће по правој линији по закону опште промењивог кретања, кад је дакле убрзање нека функција времена, онда може да је и однос између времена и пута веома сложен, те је у таком случају често пута тешко израчунати време кад је дата путања, или обратно кад је дато време да нађемо пут. Но и оваки најсложенији задатак можемо да решимо по принципу једнаког кретања онда, кад уведемо у кинематику једну помоћну криву линију, или кад са датим опште промењивим кретањем покретне тачке M, по правој линији, доведемо у свезу кретање једне нове помоћне тачке m, која нека се креће по једној помоћној кривој линији $(x, y) = o$ и то са једнаком датом брзином c, али тако, да се тачка m креће са тачком M паралелно путањи тачке M по оном истом закону, по ком се креће и тачка M по њеној правој путањи. Према томе тачке M и m налазиће се у сваком магновењу времена у правима које су међу собом паралелне, а простије пак у правима, које су управне на путањи тачке M. Кад пак путању тачке M узмемо за абсцисну осовину, онда ће се тачка m налазити свакад управно над тачком M а у правима које су паралелне ординатној осовини. Дакле кретање тачке M и m да начинимо да су паралелно кретању тачке M исохрана.

Из услова тога што је тачке m резултујућа брзина c стална, и што је њена компонента v_x, у правцу абсцисне осовине, дакле у правцу доисног пута таке M, свакада равна правој брзини покретне тачке M, можемо свакада наћи и једначину оне криве линије $(x, y) = o$ по којој треба да се тачка m креће, кад једновремене координате тачке m означимо са x и са y. Но и пошто је таке m у сваком магновењу времена дато c и v_x, можемо из познатог паралелограма брзина наћи и брзину v_y као компоненту брзине c у правцу y осовине, а пошто је свакад v_x познато као функција времена, то ћемо наћи и v_y као неку функцију времена, дакле биће обште:

$$\frac{dx}{dt} = v_x = \chi(t) \, . \, . \, (\alpha$$

и

$$\frac{dy}{dt} = v_y = \gamma(t) \, . \, . \, (\beta$$

одкуда интегралећи и елиминишући време, налазимо тражену једначину:

$$(x, y) = o \, . \, . \, (\gamma.$$

Криву линију или путању тачке m називаћемо хранограф кретања тачке M, а то зато тако, што крива линија $(x, y) = o$ има ту особину, да кад исту поделимо на једнаке ректификоване дужи $= c$ и поделне тачке означимо редом са 1, 2, 3, и т. д. са n, то ће се онда покретна таска M налазити у првој, другој и т. д. у n-тој секунди и увек паралелно ординатној осовини испод поделних тачака 1, 2, и т. д. n или у правима које прелазе кроз поделне тачке 1, 2, 3, и т. д. а паралелима ординатној осовини. Према томе, крива линија $(x, y) = o$ служи нам просто на то, да помоћу исте нађемо место покретној тачци M по њеној путањи у ма ком магновењу времена, зато се и зове линија $(x, y) = o$ хронограф (немачки Zeitcurve). Хронограф је веома важан и примењлив код физичких задатака, у вибрационој теорији уопште, а нарочито још онда кад се закони вибрационих кретања хоће да оличе графички, као што се то тако ради у графијској динамици и графијској балистици, у последњој је науци осовина пушке или осовина топа у исто доба и хронограф за балистичку путању зрна, где је онда c почетна брзина пројектила.

Једначину хронографа одређујемо овако.

Брзину покретне тачке M по њеној путањи — коју ћемо узети за абсцисну осовину — означимо са v_x, која брзина нека је позната или дата као функција пута x тачке M, дакле нека је дато

$$1) \quad v_x = \varphi(x);$$

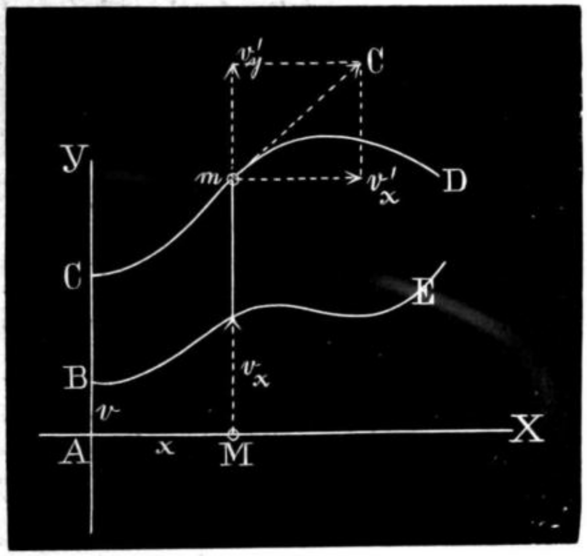
резултујућа пак брзина тачке m нека је количина c. Из тих података нађимо сада једначину хронографа.

Из кинематике знамо да је брзина тачке M дата и у овом облику:

$$2) \quad v_x = \frac{dx}{dt} \cdots$$

коју налазимо кад је дата путања у кинематичком облику, дакле кад је дато $x = \tau(t)$.

Означимо сада са v_y брзину тачке m у правцу AY осовине — управна брзина на путањи AX; а то је прва управна компонента сталне фразе c, исто тако означимо и са v'_x другу управну компоненту брзине c, која је дакле паралелна са



путем *AM* или са абсцисном осовином. По услову задатка имамо сада да је:

$$3)\quad (v_x')^2 + (v_y)^2 = c^2;$$

али пошто због исохронизма тачака M и m у правцу AX осовине мора да постоји још и:

$v_x' = v_x$, а $v_y = \frac{dy}{dt}$, то је онда и $v_x' = \frac{dx}{dt}$, те је отуда и:

$$4) \ldots\ldots \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = c^2,$$

одкуда је:

$$5)\quad \frac{dy}{dt} = \sqrt{c^2 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2}.$$

Међу тим је $\frac{dx}{dt} = v_x = \varphi(x)$, као што је и $dt = \frac{dx}{\varphi(x)}$, а по једначини 5) јесте:

$$dy = dt \sqrt{c^2 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2},$$

у којој једначини кад место dx и $\frac{dx}{dt}$ заменимо са одговарајућим горњим вредностима, добијамо да је:

$$dy = \frac{dx}{\varphi(x)} \sqrt{c^2 - [\varphi(x)]^2}.$$

Пошто последњу једначину довољно сведемо, добићемо ову општу диференцијалну једначину хронографа, а та је:

$$6)\quad dy = \frac{c^2 - [\varphi(x)]^2}{\varphi(x) \sqrt{c^2 - [\varphi(x)]^2}} \cdot dx,$$

коју кад интегралимо биће:

$$7)\quad y = \int \frac{c^2 - [\varphi(x)]^2}{\varphi(x) \sqrt{c^2 - [\varphi(x)]^2}}\, dx + const.$$

Пошто је десна страна последње једначине уопште нека функција од x, а та нека је равна $f(x)$, то нам и једначина 7) решава задатак, дакле из исте једначине добијамо оно што смо тражили а то је $y = f(x)$.

Хронограф CD може да има његов пресек C ма где на AY осовини, дакле н. пр. у тачци C, која је од почетка A удаљена за $\overline{AC} = y_0$. Па зато, кад у решеној једначини 7) метемо за x вредност нулу, онда ће нам бити $y = \overline{AC} = y_0$, којим условом одређујемо вредност интегралне константе. По самој природи задатка мора да је c увек веће од $\varphi(x)$ те да је задатак могућ, а решење задатка испашће увек најпростије кад будемо ставили $c = max.\, \varphi(x)$; па ће онда за ону тачку пута (x), за коју ће $\varphi(x)$ бити максимум, бити дирка одговарајуће тачке m хронографа хоризонтална.

За пример да узмемо хармонично кретање из физике. Тог је кретања путања, као функција времена дата у овом облику:

$$8) \ldots x = a . sin . kt$$

где нам k значи неки апсолутан број. Из последње једначине имамо да је:

$$9) \quad v_x = \frac{dx}{dt} = ka \, cos. \, kt,$$

па сада ваља наћи $v_x = \varphi(x)$, што добијамо кад из последњих двеју једначина елиминишемо време, то кад учинимо добићемо да је:

$$10) \ldots \frac{x^2}{a^2} + \frac{v_x^2}{(ka^2)} = 1,$$

дакле геометријско значење линије брзина, а та је BE јесте код датог хармоничног кретања елипса, које је једна полу осовина размак a а друга је пола осовина размак $ka = b$, кад решимо једначину 10) по v_x биће:

$$11) \quad v_x = \varphi(x) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

одкуда је и:

$$12) \quad [\varphi(x)]^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2)$$

кад вредности из 11) и 12) заменимо у једначини 7) а у исто доба ставимо $c = max. \, v_x = b$, онда ћемо за резултат решења добити ову једначину:

$$13) \quad y = \sqrt{a^2 - x^2} + const.$$

Узмимо сада да нам за $x = o$ буде $y = a$, то је онда

$$const. = o$$

дакле је најзад једначина хронографа ово:

$$14)\quad y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

или је:

$$15)\quad x^2 + y^2 = a^2$$

а то је једначина круга, полупречника a, са средиштем у A. Према томе помоћна тачка m, креће се по кругу једнако, док међу тим тачка M вибрише у границама пута $\pm\, a$, рачунато да је почетак кретања у тачци A.

Да смо узели да хронограф сече ординатну осовину у одстојању B, дакле да је за $x = o$, $y = B$, онда би испала $const = B - a$, те је онда за тај случај:

$$16\quad \{y - (B - a)\}^2 + x^2 = a^2,$$

а то је опет круг полупречника a, кога је средиште у ординатној осовини у одстојању $B - a$. То значи пак то, да средиште хронографа можемо ставити где хоћемо у ординатну осовину. Ово исто вреди и за сваки други хронограф, т. ј. ми можемо сваки хронограф померати паралелно ординатној осовини и поставити га тако помереног где хоћемо.

Ми смо овде одредили хронограф за кретање тачке M по правој линији, међу тим ако се тачка M креће по ма какој кривој линији, то и у таком случају може бити говора о хронографу кретања. Али у оваком случају знамо да се свако криволинијско кретање може сматрати као резултат кретања тачке M по два једновремено права кретања, од којих је једно кретање у абсцисној а друго је кретање у ординатној осовини. У оваком случају ваља одредити хронограф за компонујуће кретање у абсцисној осовини, или ваља одредити хронограф за компонујуће кретање у ординатној осовини, па онда од та два хронографа ваља узети онај који буде испао најпростији. Први или други хронограф, биће нам у исто време и хронограф за резултујуће криволинијско кретање тачке M. Ово пак долази отуда, што знајући место тачки M у абсцисној осовини, или пројекцији пута тачке M на абсцисној осовини, као и саму путању тачке M, знаћемо и њено место на њеној прâвој путањи, а из хронографа, који одговара н. пр. закону кретања тачке M по абсцисној осовини, одредићемо време кретања, које ће одговарати времену кретања тачке M по њеној прâвој криволинијској путањи.

За кретање по правој линији, кад је дато:

$$v_x = \frac{2c.\,x}{\sqrt{4x^2 + px}} = \varphi(x)$$

јесте одговарајући хронограф тог кретања, проста аполонијева парабола, и узев да је почетак хронографа у самој почетној тачци A, биће једначина истога ово:

$$y^2 = px.$$

За $x = o$ јесте брзина $v_x = o$ која је у исто доба и минимум. Према томе линија брзине — $v_x = \varphi(x)$ — сече ординатну осовину у њеном почетку; а за $x = \infty$ јесте $v_x = c$, а то је и максимална брзина. Дакле линија $(v_x, x) = o$ има асимптоту паралелну абсцисној осовини у остајању c.

8. Декембра 1883 г.
у Београду.

Љуб. Клерић.

ГЛАСНИК

СРПСКОГА УЧЕНОГ ДРУШТВА

КЊИГА 66

РАСПРАВЕ И ДРУГИ ЧЛАНЦИ

СА 2 СЛИКЕ У ПРИЛОГУ

У БЕОГРАДУ 1886
У ШТАМПАРИЈИ КРАЉЕВИНЕ СРБИЈЕ

На продају у књижарници В. Валожића

ПРЕГЛЕД.

СТРАНА

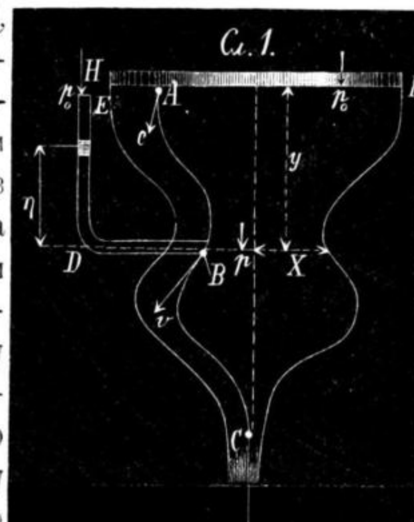
1. Спољашњи одношаји Србије, III. Пропаст олигархије, 1856 до 1858. Од Јов. Ристића 1
2. Психолошке особине српскога народа. Од А. Васиљевића · 49
3. Нова грађа за флору кнежевине Бугарске. Од д-ра J. Панчића. 103
4. Балшићи. Генеалошка студија. Од Чед. Мијатовића · · · · 147
5. Теорија и практика новчаничних банака. Од д-ра Михаила Вујића 228
6. О уздужном профилу суда сталнога хидрауличног притиска. (Њутенова катаракта). Од Љубомира Клерића · · · · · · 381

О УЗДУЖНОМ ПРОФИЛУ СУДА СТАЛНОГ ХИДРАУЛИЧКОГ ПРИТИСКА

I.

Површине сталног стања пијезометра.

Из хидраулике познато нам је, да на свима оним тачкама бока суда, где је стање пијезаметра једно и исто да је на свима тим тачкама и хидраулички притисак сталан, а то долази отуда што ми хидраулички притисак меримо са стањем пијезометра, или што исто значи, са висином воденог стуба у пијезометру. Хоћемо ли дакле да одредимо геометријско значе уздужног профила суда — из кога вода истиче — који ће на његовим периферијским тачкама имати сталан хидраулички притисак, то ваља у тој цељи да тражимо просто геметријско значење уздужног профила суда сталног стања пијезометара на свима тачкама бока суда. Одредба таког правила бива овако:



Сл. 1.

Водена маса молекила A, налазиће се у извесном магновењу времена у самој површини HH воде у суду, исти ће молекил продирући кроз површину HH кретати се на ниже са почетном брзином c и доћи по некој нама још непознатој путањи у место B и ту постићи брзину v, условљавајући пак да нам у суд онолико дотиче колико нам на отвору воде у дну суда истиче, ниво HH (слика 1.) остаће за цело време изтицања воде на истој висини; и ако специфичан притисак на површини HH дејствујући означимо са p_0, и тај нека је атмосферски притисак, онај исти који дејствује и на отвор суда, и ако са p означимо хидраулички специфичан притисак на молекилу A кад се исти спустио на дубину y испод површине HH, то нам на основи Ајлерове диференцијалне једничине кретања течности у судовима, постоји ова позната једначина:

$$1) \quad \frac{v^2 - c^2}{2g} = \frac{p_1 - p}{\gamma}$$

где нам значи γ специфичан терет воде — терет јединице запремине воде —, количина p_1 пак то је хидростатички специфичан притисак воде у тачки B, а то је онај притисак који добијамо на тачци B кад отвор суда затворимо.

Из хидростатике знамо, да кад суд мирује, а за такав случај и испитивaћамо односе кретања течности у суду — онда је на тачци B хидростатички специфички притисак дат овом вредности:

$$2) \quad p_1 = \gamma y + p_0$$

коју вредност за p_1 кад у једначини 1) заменимо, добијамо ову једначину:

$$3) \quad \frac{v^2 - c^2}{2g} = y + \frac{p_0 - p}{\gamma},$$

где нам је $\frac{p_0}{\gamma}$ висина барометра напуњеног са водом, а $\frac{p}{\gamma}$ то је висина стуба воде пресека један којим меримо специфички хидраулички притисак p у тачци B.

Из последње једначине да одредимо висину $\frac{p}{\gamma}$ којом меримо хидраулички притисак; кад то учинимо, добијамо да је иста висина дата у изразу:

$$4) \quad \frac{p}{\gamma} = \left(y + \frac{p_0}{\gamma}\right) - \frac{v^2 - c^2}{2g}.$$

Међу тим, висину стуба воде $\frac{p}{\gamma}$ одређује хидраулика стањем воде у пијезометру или са висином воденог стуба у отвореном пијезометру BDE (слика 1.), ког један отвор ваља да дође у тачку B а други отвор E ваља да комуникује са атмосферским ваздухом.

Услед хидрауличког притиска у тачци B, вода ће се у пијезометру попети уопште узев, над нивом тачке B на извесну висину, те је онда и висина стуба воде — а тај је $\frac{p}{\gamma}$ — којом меримо хидраулички специфичан притисак тачке B: раван висини η стуба воде у пијезометру плус висини стуба воде барометра наливеног са водом — над површином воде у пијезометру — а та је висина $\frac{p_0}{\gamma}$, за то је:

$$5)\quad \frac{p}{\gamma} = \eta + \frac{p_0}{\gamma};$$

кад ту вредност за $\frac{p}{\gamma}$ заменимо у једначини 4) и што треба скратимо, добијамо за тачку B стање пијезометра, а то је стање:

$$6)\quad \eta = y - \frac{v^2 - c^2}{2g}.$$

Дакле кад би за тачку B, у дубини y знали v, могли би наћи и η, а кад знамо η можемо по једначини 5) наћи и хидраулички притисак p исте тачке B.

Претпостављајући да сви молекили течности који се к отвору суда крећу кад у исту дубину y стигну да они у тој дубини добију исту брзину v — што би се оправдало теоријом потенцијала за кретање чврстих тела по различитим стрмим равнима исте висине, јер изложено тело дејству само свог сопственог терета, нивоске површине јесу хоризонталне површине — које претпоставља у исто доба кретање воде у суду по хоризонталним слојевама кад се вода у суду к отвору C креће и отуда истиче, то је онда по томе и свију малекила који лежи за исто y испод површине HH, стање пијезаметра η стално; зато се пијезометар и не увлачи у суд унутра, но је довољно да се његов дољи отвор доведе просто у комуникацију са водом само до бока суда. Из једначине 6) видимо, да где год знамо стање пијезометра η, моћи ћемо ту одредити и ефективну брзину v молекила који су за y дубоки испод површине HH. Овај став вреди не једино за теоријску но и за практичку хидраулику; јер нивоска разлика површине HH воде у суду и површине воде у пијезометру, даје нам разлику брзних висина брзина v и c, што се добија овом једначином

$$7) \quad y - \eta = \frac{v^2}{2g} - \frac{c^2}{2g},$$

према чему нам и у теоријској хидраулици, као оно што је случај у практичкој хидраулици, стање пијезометра η игра просто улогу отпорне висине, која је разуме се у теоријској хидраулици минимум, а у практичкој је хидраулици максимум; овде мимогред речено, те висине η у практичкој хидраулици зависе поглавити од природе отпора, које отпоре ток воде кроз систем судова или систем отвора има да савлађује.

Кад се овде користимо принципом континуитета течности, а тај је: да кроз све пресеке суда протиче у једном и истом времену, н. пр. у једној секунди једна и иста количина воде, коју ако са Q означимо, онда је још и:

$$8) \quad Q = F_0 \ c = F_y v,$$

где нам F_0 значи величину хоризонталне површине HH, а F_y значи нам величину површине пресека воде у дубини y: из последње једначине добијамо да је:

$$9) \quad v = \frac{F_0}{F_y} c,$$

коју вредност за v кад у једначини 6) заменимо добићемо да је пијезометра стање:

$$10) \quad \eta = y - \frac{F_0^2 - F_y^2}{F_y^2} \cdot \frac{c^2}{2g}.$$

Знајући сада брзину c у површини HH, учинили смо да је пијезометарско стање η зависно од самог геометријског облика суда, које је за даља испитивања веома корисно.

Ми ћемо у даљим испитивањима узети да је унутарњи облик суда нека обртна површина, и то да је обртно особина вертикална, па кад сада полупречник кружне површине F_0 означимо са r_0 а полупречник кружног пресека F_y у дубини y означимо са x, онда је: $F_0^2 = \pi^2 r_0^4$ и $F_y^2 = \pi^2 . x^4$, које вредности кад у једначини 10) заменимо, то ћемо после довољног скраћивања добити да је пијезометарско стање:

$$11) \quad \eta = y - \frac{r_0^4 - x^4}{x^4} \cdot \frac{c^2}{2g}.$$

Кад у последњој једначини ставимо за η различите константе A, B, C, и т. д. уопште const., добићемо тиме геомеријско значење уздужног профила суда, на свима његовим периферијским тачкама — или бока његовог — сталног пијезометарског стања = const., или сталног хидрауличког притиска. Једначина пак уздужног профила таког суда је ова:

$$12) \quad y - \frac{r_0^4 - x^4}{x^4} \cdot \frac{c^2}{2g} = const.$$

а то је читав низ или систем паралелних кривих линија или низ уздужних профила обртне површине суде свугда на боку једнаког хидрауличког притиска, ових је линија положај одређен вредношћу константе. Иста линија игра улогу нивоских линија у хидростатици.

Дискутујући исту једначину, лако је увидети, да она има две асимптоте, једна је асимптота вертикална Dy осовима (слика 2) а у исто доба и обртна осовина ротационе површине бока суда свугде сталног стања пијезометра, друга је асимптота на првој управна и хоризонтална, паралелна површини HH, која је асимптота удаљена од површине HH за количину:

$$y_0 = const. - \frac{c^2}{2g}.$$

Иста линија позната је у геометрији под именом Њутенова катаракта.

Уздужни профил ротационе површине као бок суда свугде једнаког хидрауличког притиска уопште, дакле где је пијезометарско стање равно у опште ма какој константи, нема тако важног значаја у теоријској хидраулици, колико има значења линија као уздужни профил суда где је на свима тачкама његовог бока хидраулички притисак сталан и раван специјално атмосферском притиску p_0: дакле да тражимо сада геометријско значење уздужног профила суда, који би свугде на његовим бокавима имао сталан хидраулички притисак $p = p_0$, за такав је случај, по једначини 5) стање пијезометра:

$$\eta = 0.$$

Према томе лако је наћи и уздужни профил суда тражене особине, што ћемо учинити у следећој тачци.

II.

О уображеној хидрауличкој површини.

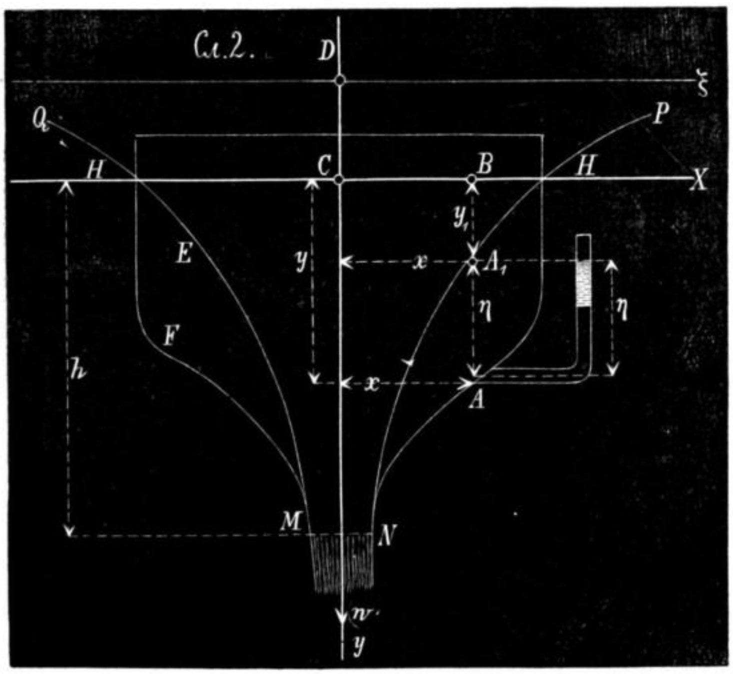
Геометријско значење уздужног профила суда код кога ће по свима тачкама његовог бока бити $\eta = 0$, добијамо просто из једначине 12) кад у истој ставим oconst $= \eta = 0$, дакле једначина траженог профила јесте ова:

$$13)\quad y = \frac{r_0^4 - x^4}{x^4} \cdot \frac{c^2}{2g}.$$

Исте линије хоризонтална асимптота удаљена је над координатном осовином CX (слика 2), за:

$$y_0 = -\frac{c^2}{2g},$$

а та је управо брзна висина брзине c молекила којим они површину HH продиру.



Једначину 13, можемо још и у чисто геометријском облику добити и то на овај начин, кад у једначини 3. место c метемо вредност из једначине 9), а та је

$$c = \frac{F_y}{F_0^2} \cdot v,$$

онда ћемо за резултат замене добити ову једначину:

$$\frac{v^2 - \frac{F_y^2}{F_0^2} v^2}{2g} = y + \frac{p_0 - p}{\gamma}$$

одкуда је у дубини y одговарајућа брзина:

$$14) \quad v = \sqrt{\frac{\left(y + \frac{p_0 - p}{\gamma}\right) 2g}{1 - \left(\frac{F_y}{F_0}\right)^2}}$$

а то је једначина за брзину v, која је у науци позната под именом Данијел Бернулијева. Ми ћемо сада моћи одредити брзину v када будемо у дубини y знали одговарајући хидраулички притисак p, а веома просто можемо одредити брзину w, којом вода кроз хоризонтални отвор — у дну суда — MN (слика 2) истиче, кад нам отвор MN комуникује са атмосферским ваздухом, јер је у таком случају ту одговарајући хидраулички притисак p познат а тај је раван атмосфеском притиску, зато је на отвору MN специфички притисак $p = p_0$, и ако величину отвора MN означимо са F, који лежи за дубину h изнад површине HH, онда нам у једначини 14) брзина v прилази у брзину w, кад у истој ставимо $y = h$ и $F_y = F$, зато је дакле:

$$15) \quad w = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{F}{F_0}\right)^2}}$$

По принципу континуитета течности постоји и ова једначина:

$$16) \quad F_0 \, c = F . w$$

па кад у последњој једначини за w заменимо вредност из једначине 15) и решимо је по брзини c то ћемо за резултат решења добити ову једначину:

$$17)\quad c = \frac{F}{F_0}\sqrt{\frac{2gh}{1-\left(\frac{F}{F_0}\right)^2}}$$

одкуда је брзна висина брзине с дата овом вредности;

$$18)\quad \frac{c^2}{2g} = \left(\frac{F}{F_0}\right)^2 \frac{h}{1-\left(\frac{F}{F_0}\right)^2},$$

даље означимо са r полупречник кружног отвора MN онда је услед замене количина $F_0 = \pi r_0^2$ и $F = \pi r^2$ у једначини 18) ово резултат замене и довољног свођења:

$$19)\quad \frac{c^2}{2g} = \frac{hr^4}{r_0^4 - r^4}.$$

Кад извршимо замену у једначинама 11) и 13) место количине $\frac{c^2}{2g}$ једнаку вредност из последње једначине, то ће једначине 11) и 13) прећи редом у ове:

$$A)\quad \eta = y - h\frac{r^4}{x^4}\left(\frac{r_0^4 - x^4}{r_0^4 - r^4}\right)$$

и

$$B)\quad y = h\frac{r^4}{x^4}\left(\frac{r_0^4 - x^4}{r_0^4 - r^4}\right)$$

Последња једначина представља нам тражену чисто геометријску природу уздужног — вертикалног — профила суда, где је на боковима стање пијезометра стално и равно **нули**, а то би био такав облик суда, да буди где на боку његовом кад би начинили рупу, то вода кроз исту рупу неби истицала. Профил таког суда преставља је у слици 2. линијом NA_1HP и $MEHQ$, које је линије једна асимптота Cy а друга је $D\xi$. Та линија — Њутенова катаракта — пролази уопште кроз тачке H и H, јер за $x = r_0$ добијамо за y вредност равно нули. Међу тим, да би сазнали какву улогу игра Њутенова катаракта пијезометарског стања $\eta = 0$, означимо ординате тачке исте Њутенове катаракте сада са y_1 то је онда по једначини $B)$ ово њена једначина:

$$C) \quad y_1 = h \frac{r^4}{x^4} \left(\frac{r_0^4 - x^4}{r_0^4 - r^4} \right)$$

Кад буде имао суд, из кога на дну вода истиче, ма какав други облик профила н. пр. облик $NAHHFM$ (слика 2) различан од Њутенове катаракте — за $\eta = 0$ — онда ћемо у таком случају одговарајуће стање пијезометра η неке тачке A на боку истога суда а у дубини y наћи из једначине $A)$, по којој је сада стање пијезометра:

$$\eta = y - h \frac{r^4}{x^4} \left(\frac{r_0^4 - x^4}{r_0^4 - r^4} \right)$$

где нам сада x значи одстојање тачке A од обртне осовине ротационе површине суда, то је дакле абсциса тачке A.

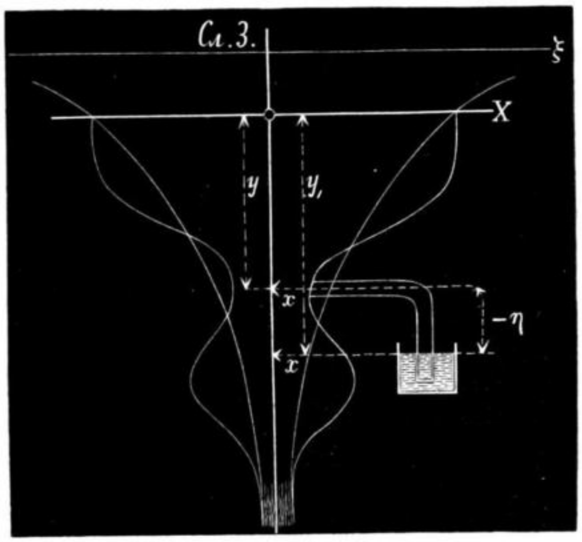
Међу тим, као што видимо, други члан последње једначине са десне стране, јесте ордината Њутенове катаракте за једно и исто x или за једнаке абсцисе тачке A бока суда и тачке A_1 Њутенове катаракте, према томе је сада сасвим уопште, стање пијезаметра ма које тачке A бока суда ма каквог облика, дато овом простијом једначином:

$$D) \quad \eta = y - y_1$$

одкуда добијамо овај први нови хидраулички аксијом.

1) Стање пијезометра — или отпорна висина — ма које тачке A ма каког бока суда јесте равно дубини исте тачке испод Њутенове ка-

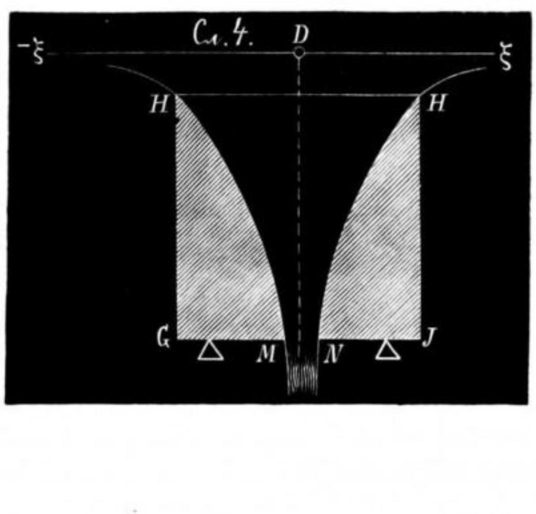
тaракте; или сасвим уопште речено: стање пијезометра ма које тачке A, бока суда ма каквог облика, јесте равно вертикалном одстојању исте тачке A мерено од обртне површине Њутенове катаракте. Овде је речено вертикална одстојању зато, што има и таких облика суда, где ће стање пијезометра бити негативно које је лако увидети из једначине под $A)$; за овакав је случај нацртана слика 3). На



истој је слици као што видимо $y_1 > y$ па је зато и количина η одречна, дакле тачци A у једној и истој вертикали, одговарајућа тачка A_1 — тачка Њутенове катаракте, — лежи испод тачке A. Према овоме све оне тачке бока суда које улазе у унутарњост Њутенове катаракте, имају негативно стање пијезометра; а све оне тачке бока суда, које леже у спољности Њутенове катаракте, имају позитивно стање пијезометра. Горе изречени аксијом, построив Њутенову катаракту, може нам врло корисно послужити к томе, да просто путем построја конструишемо инјекторе или такозвани хидрулички шмрк, кога је основа негативно стање пијезометра, којим можемо путем сисања да воду из нижег нивоа дижемо у виши ниво или да ваздушне просторе евакуишемо.

Кад пијезометрима меримо специфички хидростатичан притисак у ма којој тачци воде у суду — која се према простору суда налази у статичкој равнотежи, онда знамо да је стање пијезометра ма које тачке A воде у суду, равно вертикалној дубини исте тачке мереној од од водине површине ваде у суду. У хидраулици видимо да се стање пијезометра тако исто мери од једне особене површине — као оно у хидрастатици од површине воде у суду — која је позната под именом Нутенове катаракте. Према ономе што смо дознали о Нутеновој катаракти, односно њеног понашања за пијезометарска стања, она се понаша у хидраулици исто онако као што се у хидростатици понаша површина воде која према суду релативно мирује. Пошто дакле површина Њутенове катаракте за $\eta = 0$, односно стања пијезаметра има идентичко значење са површином мирне воде у суду, на коју површину дејствује онај исти специфички притисак p_0 као и на површину Њутенове катаракте, то сам ја зато у мојим предавањима, у теоријској хидраулици, наименовао површину Њутенове катаракте: — за $\eta = 0$ — „уображена хидраулична површина“ воде која из суда истиче.

Кад би Њутенова катаракта играла стварну улогу хидрастатичке површине, онда би се стање пијезометра морало мењати, кад би отвор пијезометра у истом нивоу кретали к вертикалној асимптоти Њутанаве катаракте, и то у оваком случају стање пијезометра опадано би, што би значило брзина молекила у једном и истом нивоу неби била стална. Ја сам дуго и сам веровао, да ће тако стање пијезометра наступити, али пре два месеца градећи са мојим ученицима опите у овим смислу, уверио сам се да је стање пијезометра воде свију тачака у једном и истом нивоу стално и управо онолико, колико је било на тачци бока суда тог нивоа, а пошто се стање пијезометра мери вертикално од Њутенове катаракте, то се Њутенова катаракта појављује као хидростатичка површина воде само за тачке бока суда, због чега је и зовем уображена хидраулична површина. Тај опит потврдило ми је у исто доба и принцип паралелности слојева који се хоризонтално крећу кад вода из суда кроз неки отвор истиче. Међу тим важно је одма још овде да напоменем то, како тај принцип паралелности слојева не постоји код н. пр. тестастих маса, код земљастих тела и код песка, што да потврдим показаћу мало час резултате опита које сам у овом смислу извршио са тестастим телом и са сувим песком. Кад би Њутенова катаракта играла праву или стварну улогу хидрастатичке површине воде у суду, онда би се отуда морао извести тај закључак, да сва водена маса која је у суду — из ког вода истиче — а у спољности је Њутенове катаракте, дакле која лежи између бока суда и Њутенове катаракте, да та маса мирује, према томе да је то она маса којом суд на његову подлогу притискује; она пак маса воде која је обухваћена у запремини тела Њутенове катаракте, рачунато од отвора MN суда па до хоризонталне асимптоте $\xi D \xi$ била би као притисак на подлогу суда изгубљена. Маса воде која би имала својим теретом да на подлогу суда притискује означена је у слици 4. са косим линијама. Према последњем, излази дакле то, да би и на дно суда притискивала само она количина воде, која је дата у запремини



NJH и MGH, о којој мислимо да мирује а напротив да је тежина запремине $HMNH$ која одговара ротационом телу Њутенаве катаракте од отвора MN па до хоризонталне асимптотне равни $\xi, \xi,$ — заузета просто са њеним кретањем, да нам иста маса издаје данамички ефекат, те да је тиме њено дејство као хидрастатичан притисак на дно суда изгубљено. Доиста чудновато је: све што је речено о истинском и изгубљеном притиску на дну суда то у самој ствари и постоји, што ћемо ево овим путем доказати.

Из хидраулике знамо, да је вертикална реакција воде која истиче кроз отвор суда у његовом хоризонталном дну који реакцију ако са R означимо, дата овом вредности:

$$R = 2F\gamma \frac{h}{1 - \left(\frac{F}{F_0}\right)^2}$$

а то је у исто доба и она тежина којом суд на његову подлогу мање притискује кад кроз отвор истиче но што би притискивала цела маса воде у суду кад би отвор био затворен, дакле вода у суду мировала; међу тим, одредимо сада тежину запремине ротационог тела Њутенове катаракте и то запремине која лежи између просека MN и хоризонталне асимптотне равни, па кад одредимо тежину исте запремине, добијамо то чудновато, да је иста тежина управо онолика колика је и горња вредност реакције R. Ми смо добили једначину уздужног профила Њутенове катаракте у једначини $B)$ за почетну тачку координата у тачци C, па ако горе речену запремину означимо са V, онда је иста дата овим одређеним интегралом:

$$V = \pi \int_{\frac{c^2}{2g}}^{h} x^2 \delta y,$$

и ако краткоће ради ставимо $\frac{c^2}{2g} = \psi$, онда је простије:

$$V = \pi \int_{-\psi}^{h} x^2 \, \delta y.$$

Кад решимо једначину 13) по x^2, добићемо да је:

$$x^2 = r_0^2 \frac{\sqrt{\psi}}{\sqrt{\psi + y}}$$

дакле је услед замене:

$$V = \pi \int_{-\psi}^{h} r_0^2 \frac{\sqrt{\psi}}{\sqrt{\psi + y}} \cdot \delta y =$$

$$= \pi r_0^2 \sqrt{\psi} \int_{-\psi}^{h} \frac{\delta y}{\sqrt{\psi + y}},$$

а пошто је интеграл:

$$\int_{-\psi}^{h} \frac{\delta y}{\sqrt{\psi + y}} = 2 \sqrt{\psi + h}$$

то је онда и запремина:

$$V = 2 \pi r_0^2 \sqrt{\psi^2 + \psi h}.$$

Из једначине 18) имамо да је:

$$\psi = \frac{c^2}{2g} = \frac{F^2}{F_0^2} \cdot \frac{h}{1 - \left(\frac{F}{F_0}\right)^2}$$

зато је услед замене и довољног свођења, најзад запремина V дата у овом изразу:

$$V = \frac{2Fh}{1 - \left(\frac{F}{F_0}\right)^2}$$

ову запремину кад помножимо са специфичким теретом γ, добићемо исте запремине абсолутан терет G, који је:

$$20) \quad G = \frac{2Fh\gamma}{1 - \left(\frac{F}{F_0}\right)^2}$$

Дакле ето тим смо доказали да је терет познате нам запремине воде Њутенове катаракте, раван вертикалној реакцији истичуће воде кроз отвор F.

За F_0 безконачно велико према F, дакле за $c = 0$ — у ком би случају сама површина воде у суду била асимптотна раван — добијемо да је:

$$G = R = 2Fh\gamma$$

који се израз у практици и најчешће употребљава.

Према овоме као што видимо, површина Њутенове катаракте и у том је случају слична — па овде и индентична — хидростатичкој површини мирне воде у суду. Зато ми је опет чудновато то, што се стање пијезометра не мења, кад са његовим дањим отвором идем или улазим к средини суда или што исто значи к вертикалној асимптоти Њутенове катаракте. Може бити малени суд са којим сам опите градио, а и због малене висине $h = 15$ cm., није се могао пијезометар показати осетљив, јер осетљвост његова зависна је прво од капиларног дејства а друго од отпара на савијеном месту — који је веома велики — трећи од отпора према самој цеви. Као што видимо: говоре два битна разлога за мировање водене масе у суду која лежи између бока суда и површине Њутенове катаракте, јер то условив добијамо отуда истинске последице — истинске резултате који су из других познатих хидрауличких принципа изведени. Према томе опет сам приморан да посумњам о паралелизму слојева код воде кад она из суда истиче, као што сумњам и о томе да се молекили у једном и истом нивоу крећу једном и истом брзином; а употребив принцип континуитета, да нам он вреди за средњу брзину извесног пресека (?).

Даље, једначина 20) речма изказана даје нам овај други нови хидраулички аксијом:

2) Вертикална реакција воде, која истиче кроз хоризонтални отвор суда, равна је тежини водене масе која је захваћена у запремини ротационог тела Њутенове катаракте — уображене хидрауличке површине — рачунате од отвора суда па до хоризонатне асимптотне равни или и овако:

Изгубљени вертикалан хидростатичан притисак на дно суда, раван је тежини познате запремине Њутенове катаракте. Зато и тежину воде што је у запремини познате Њутенове катаракте можемо назвати тежина изгубљеног хидростатичког притиска. Последица последњег аксијома је ова: да је вертикални притисак суда на његову подлогу раван тежини масе воде која лежи између уображене хидрауличке површине и бока суда или: маса воде која је у суду између уображене хидрауличке површине и бока суда, понаша се као статичка, дакле исто онако као кад би она ту просто мировала.

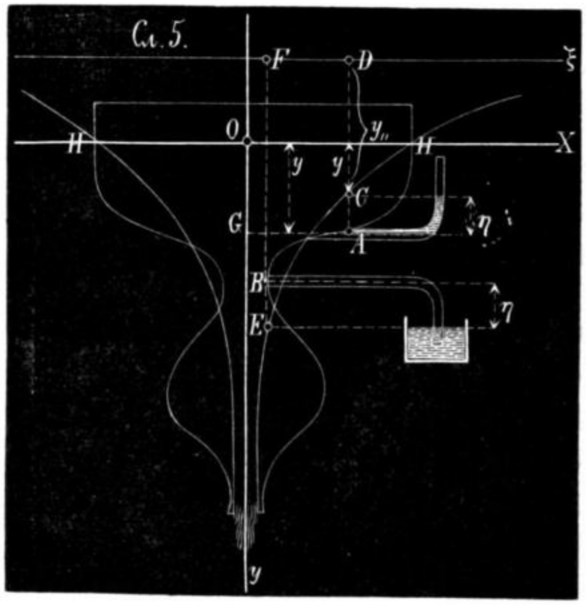
Даље имамо да говоримо о брзним висинама брзина тачака A на боку суда слика 5). У једначини 6) добили смо да је:

$$\eta = y - \frac{v^2 - c^2}{2g}$$

одкуда је:

$$y - \eta = \frac{v^2 - c^2}{2g}$$

према томе, знајући стање пијезометра и дубину y тачке A



бока суда, можемо из последње једначине израчунати висину брзине v а та је $\frac{v^2}{2g}$; али пошто је $y - \eta$ равно ординати Њутенове катаракте за абсцису $GA = x$ која тачци A одговара, коју орданату $y - \eta = y_1$ стављајући, имамо

$$21) \qquad y_1 = \frac{v^2 - c^2}{2g},$$

одкуда је висина брзине v ово:

$$\frac{v^2}{2g} = y_1 + \frac{c^2}{2g}.$$

Но ми знамо да је $\frac{c^2}{2g}$ одстојање ψ хоризонталне асимптоте $\xi\xi$ Њутенове катаракте од површине овде у суду, то је онда:

$$22) \qquad \frac{v^2}{2g} = y_1 + \psi$$

међу тим из слике 5) видимо да је:

$$y_1 + \psi = y_{11} = \overline{CD}$$

где нам у слици тачка C стоји у вертикали, кроз тачку A повученој, то је брзна висина молекила бочне тачке A или брзна висина тачака воде у нивоу дубине y_1 дата у овом изразу:

$$23) \qquad \frac{v^2}{2g} = \overline{CD}$$

На сасвим исти начин добили би да је брзна висина тачке B бока суда, дата у овом изразу

$$24) \qquad \frac{v^2}{2g} = \overline{FE}$$

где у слици тачка E лежи у Њутеновој катаракти и у вертикали кроз B повученој.

Код једначине 23) и 24) речма искажемо, онда ћемо добити овај трећи нов хидраулички аксијом:

3) Висина брзине v буди које периферијске тачке B бока суда: равна је размаку $\overline{FE}$ који лежи на вертикали тачке B а између хоризонталне асимптоте равни $\xi\xi$ Њутенове катаракте и саме површине исте катараке.

Према овоме само висине $\overline{FE}$ иду на то у штету да оне произвађају одговарајуће брзине v; и овај би разлог говорио за то, да се само извесна количина воде у суду креће а да извесна мирује. Висине $\overline{FE}$, зваћемо: висине изгубљеног хидростатичког притиска.

Важно је да напоменем још и ово, кад вода ističe из хоризонталног дна суда кроз кружан отвор, онда је у таком случају при савршеној и потпуној контракцији — воденога млаза — уздужни вертикалан профил воденога млаза опет Њутенова катаракта, она иста која одговара и уображеној хидрауличкој површини. За доказ тога служи нам ово:

Молекил воде дошав до отвора MN (слика 2), прећи ће кроз исти са познатом брзином.

$$w = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{F}{F_0}\right)^2}}$$

па ће се отуда вертикално наниже кретати једнако убрзано са почетном брзином w и у јединици времена прећи путању

$$s = w + \frac{g}{2}.$$

Кад израчунамо запремину Њутенове катаракте од пресека MN — па на ниже до дубине s, то ћемо добити да је иста запремина:

$$\mathfrak{N} = F\sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{F}{F_0}\right)^2}}$$

она иста која одговара количини воде која ће у једној секунди кроз отвор MN проћи. Дакле то је доказ, да је облик изтичућег млаза просто ротационо тело Њутенове катаракте, оне исте катаракте која одговара и уображеној хидрауличкој површини.

III.

О кретању тестастих и песковитих тела у цилидричком суду.

Пошто ми опити са пијезометром несу дали онај резултат који сам ја очекивао, то сам дошао на мисао, да напуним један цилиндарски суд са пластичком иловачом и да притискујући на једном крају иловачу, истискујем исту у виду кобасице кроз кружни отвор у дну суда, па том приликом да сазнам природу кретања иловаче у самом суду. Да би на опиту могао видети оно што се са иловачом приликом њеног истискивања — кретања — дешава, ја сам употребио разно обојадисану иловачу и то беле и црне боје, па сам онда у цилиндрички суд наслагао плоче од пластичке иловаче и то редом наизменце од црне и беле боје. Плоче су биле кружне величине пресека суда, крајње пак површине — горња и доља — биле су равне и паралелне и стојале управно на осовини цилиндра, дакле биле су паралелне и са дном суда, у ком се налазио кружни отвор кроз који ће иловача пролазити. Пошто је суд био испуњен са иловачом на поменути начин, то сам на горњу површину AB у суду затворене иловаче притискивао са једним цилиндричким клипом који је суд потпуно испуњавао, и тако притискујући на клип, принудио сам те је пластичка иловача излазила кроз CD (слика 6 и 7) у виду кобасице. Пошто сам неки део иловаче истискао из суда, ја сам затим, како кобасицу $CDEF$ тако и у суду заостало тело $ABHG$ — пошто сам исто тело из суда изгурао — пресекао по осовини кобасице и цилиндра, па за резултат опита, односно реченог уздужног профила, добијем слику 6 и 7, које нам представљају у природној величини и са природе верно представљени профил тестастог тела, који је профил постао усљед кретања тестасте масе. На истим сликама видимо јасно, да слојеви који су пре кретања били паралелни, да су исти слојеви усљед кретања добили према правцу кретања, дакле према осовини суда к отпору истога, потпуно савијени облик, који су слојеви у различитим нивоима и различито савијени; а што су слојеви ближе отвору CD, то се они тиме више приближују облику Њутенове катаракте. Нарочито је пак чудновато а и интересно то, како горњи слојеви продиру кроз долње и на који се начин наизменце и потпуно симетрички међу собом мешају на самом отвору суда. Долњи слојеви образују спољност а горњи унутрашњост кобасице. Из овога је опита увиђавно, да молекили који леже у једној и истој равни, нормалној на правцу притиска, да ти молекили у осовини цилиндра лежећи имају максималну брзину, а брзина молекила који су на перферији суда јесте минимална, што се слаже са брзним висинама по трећем хидраулском закону. — Овоме слично понаша се и ток воде у рекама и каналима, узев матицу за полазну тачку — даље, молекили што су год ближе к дну суда ти имају тако исто и тим већу брзину но они молекили који су над њима или који су даље од дна суда удаљени. Слика 6. претставља нам кретање жиђе а слика 7. кретање гушће иловаче, која је дала још и капљу JK, према томе облик уздужног профила у кретању налазеће се пластичке масе зависи још и од ступња њене житкости.

Сличан опит градио сам и са песком и то овако. У цилиндрички суд, који је на дну имао крупни отвор, пошто сам исти затворио, ја сам исти суд напунио са веома ситним и сувим песком, беле боје, зати сам отвор суда отворио и одозго у суд онолико црног сувог песка усипао, колико је кроз отвор — у дну суда — изтицало. После неколико секунада и то онда, кад сам опазио да ми кроз отвор изтиче само само црни песак — јер је прво изтицао бели песак — ја сам онда отвор затворио. Да би пак могао видети, на који се начин оба песка кретала, ја сам у суд — у за-остали песак сипао воде веома лагано и песак у суду само толико оквасио, колико је тек потребно да буде конзистентан, те тако конзистентан песак изручио сам из суда и добио један цилиндар од песка; ја сам сада исти цилиндар уздужно по осовини његовој просекао и за профил истог аксијалног профила добио слику 8., ту је у средини црн

Слика 8.

песак, који изгледа као левак и има просто облик Њутенове катаракте, ван тога левка је бео песак, који је као што је опит показао мировао. Из овога опита видимо дакле то, да одржавајући песак у суду на једном и истом нивоу, песак ће, истичући кроз отвор у хоризонталном дну суда истицати само са извесним делом, или само ће се кретати извесан део масе, а тај је на слици претстављени левак, док на против извесан део ће мировати, а тај је део између бока суда и левка, ту видимо дакле још и то да један део слојева мирује а један део слојева да је у кретању. Према овоме, нарочито овај опит са песком иде у прилог свему оном што је о слици 4. речено. Најзад овим се опитом потврђује још и то, како закон кретања уопште житких а и песковитих тела у судовима, зависи још поглавито и од узајамног молекиларног споја тела које се креће.

Сви у овој тачци саопштени опити, говоре у прилог ономе што је у тачкама I. и II. изложено.

Како за теоријску тако и за практичку хидраулику биће од веома велике користи ако се хидрауличари буду бавили са испитивањем кретања уопште житких тела у смислу горњих опита, те да резултате отуда, у најразличитијим правцима доведу до крајњих консеквенција. Са оваким опитима бавићу се и ја још и даље у колико ми стоје сретства на расположењу. Најпростија справа са којом се може произвести тело у сликама 6 и 7 представљено, јесте проста справа којом се кобасице граде.

Љубомир Клерић
ПРОФЕСОР МЕХАНИКЕ НА ВЕЛ. ШКОЛИ.