Biblioteka
PHYSIS

Za izdavača
Bora Babić, direktorka

Urednik
Mirko Aćimović

Stručna redakcija
Milan Pantić
Srboljub Simić
Milica Pavkov Hrvojević
Tijana Prodanović

© AKADEMSKA KNJIGA, NOVI SAD, 2011.

ISAK NJUTN

MATEMATIČKI PRINCIPI PRIRODNE FILOZOFIJE

Prevela s engleskog
Ljiljana Matić

AKADEMSKA KNJIGA
NOVI SAD

Naslov originala

Isaac Newton, *The Mathematical Principles of Natural Philosophy*,
Running Press, Philadelphia-London, 2005

Isaaco Newtono, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*,
Editio tertia aucta et emendata, Londini, MDCCXXVI

Инв. бр. 363

SADRŽAJ

Predgovor autora čitaocu 7
Predgovor autora za drugo izdanje 10
Predgovor autora za treće izdanje 10

Definicije 11
Aksiomi ili zakoni kretanja 22

KNJIGA I

O KRETANJU TELA 37
Odeljak I. O metodi prvih i poslednjih odnosa veličina, pomoću kojih dokazujemo propozicije koje slede 37
Odeljak II. O pronalasku centripetalnih sila 47
Odeljak III. O kretanju tela po ekscentričnim konusnim presecima 61
Odeljak IV. O pronalaženju eliptičnih, paraboličnih i hiperboličnih orbita iz date žiže 71
Odeljak V. Kako pronaći orbite kada nije data nijedna žiža? . . 77
Odeljak VI. Kako se pronalaze kretanja po datim orbitama? . . 103
Odeljak VII. U vezi sa pravolinijskim usponom i silaskom tela 110
Odeljak VIII. O pronalasku orbita po kojima kruže tela pod dejstvom bilo koje centripetalne sile 119
Odeljak IX. O kretanjima tela po pokretnim orbitama i o kretanjima apsida 124
Odeljak X. O kretanju tela po datim površinama i o recipročnom kretanju okačenih tela 134

Odeljak XI. O kretanju tela koja teže jedno drugom sa centripetalnim silama 147
Odeljak XII. O privlačnim silama sfernih tela 173
Odeljak XIII. O silama privlačenja tela koja nisu sfernog oblika 190
Odeljak XIV. O kretanju veoma malih tela koja, pod dejstvom centripetalnih sila, teže ka nekoliko delova bilo kog veoma velikog tela 200

KNJIGA II

O KRETANJU TELA 208
Odeljak I. O kretanju tela na koje deluje otpor koji je proporcionalan sa brzinom 208
Odeljak II. O kretanju tela na koja deluje otpor proporcionalan kvadratu njihovih brzina 216
Odeljak III. O kretanju tela pri otporu koji je delimično proporcionalan sa brzinama i delimično sa kvadratom tih brzina 237
Odeljak IV. O kružnom kretanju tela u otpornim sredinama .. 245
Odeljak V. O gustini i sabijanju tečnosti i o hidrostatici 251
Odeljak VI. O kretanju klatna pri otporu 263
Odeljak VII. O kretanju tečnosti i o otporu koji deluje na bačena tela 285
Odeljak VIII. O kretanju koje se prostire kroz tečnost 321
Odeljak IX. O kružnom kretanju tečnosti 335

KNJIGA III

SISTEM SVETA 347
Pravila rasuđivanja u filozofiji 348
Fenomeni ili pojave 350
Propozicije 354
Opšta sholija 481

PREDGOVOR AUTORA ČITAOCU

Dok su stari (prema autoru Papu) u istraživanjima prirodnih stvari pridavali veliki značaj mehanici, to su i noviji, odbacivši supstancijalne forme i okultne sadržaje, nastojali da prirodne pojave podrede zakonima matematike. Očito je da se u ovom traktatu matematika brižljivo usavršava u onoj meri koliko se to odnosi na filozofiju. Stari su zaista dvojako postavili mehaniku: racionalnu, koja se razvija preciznim dokazivanjima, i praktičnu. Na praktičnu se odnose sve manuelne veštine po kojima je mehanika i dobila ime. Ipak, pošto majstori imaju običaj da rade sa malom preciznošću, dešava se da se celokupna mehanika tako razlikuje od geometrije da se ono što je sasvim precizno odnosi na geometriju, a ono što je manje precizno na mehaniku. Međutim, greške nisu u veštini, već u izvođačima radova. Onaj koji radi manje precizno, manje je savršen mehaničar, i ako bi neko mogao da radi sa najvećom preciznošću, taj bi bio od svih najsavršeniji mehaničar. Jer se i crtanje pravih linija i krugova, na čemu se zasniva geometrija, tiče i mehanike. Geometrija ne podučava kako se povlače ove linije, ona to zahteva. Ona, naime, traži da nedovoljno upućen najpre sam izuči da ih precizno povlači pre nego što stupi na prag geometrije, zatim podučava kako se putem ovih operacija rešavaju problemi. Povući prave linije i nacrtati krugove jeste problem, ali ne geometrijski. Od mehanike se zahteva rešenje ovog problema, a u geometriji se uči kako da se ta rešenja koriste. I zasluga je geometrije što sa toliko malo principa, preuzetih od drugih znanja, toliko mnogo stvari pokazuje. Geometrija se, stoga, zasniva na delovanju mehanike i nije ništa drugo do onaj deo opšte mehanike koji precizno izlaže i demonstrira veštinu preciznog merenja. No, pošto se manuelne veštine naročito odnose na kretanje tela, proizilazi da se u kretanju tela geometrija obično odnosi na veličinu, a mehanika na kretanje. U tom smislu racionalna mehanika će biti nauka o

kretanju, proizvedenog iz bilo kojih sila potrebnih za bilo koje kretanje, tačno izložena i dokazana. Ovaj deo mehanike stari su obradili u oblasti pet sila koje se odnose na manuelne veštine za ručna merenja koja nisu gravitaciju (budući da ne sadrži silu proizvedenu rukama) razmatrala kao silu, već samo kao teret za pokretanje pomenutih sila. Nas, pak, koji se ne bavimo zanatima već filozofijom, i opisujemo ne manuelne već prirodne sile, najviše zanimaju stvari koje se tiču gravitacije, levitacije, elastične sile, otpora tečnosti i sličnih sila bilo privlačnih bilo odbojnih. Upravo zato ovo naše delo izlažemo kao matematičke principe filozofije. Jer, čini se da se sva teškoća filozofije nalazi u ovome – da od pojava kretanja istražimo prirodne sile, a zatim da pomoću ovih sila dokažemo ostale pojave. U tom pravcu su usmerene opšte propozicije koje smo obradili u prvoj i drugoj knjizi. U trećoj knjizi dajemo primer za to u objašnjenju sistema sveta. Onde se iz nebeskih pojava, pomoću propozicija dokazanih u prethodnim knjigama, matematički izvode sile gravitacije tela ka suncu i planetama. Zatim se po ovim silama, takođe pomoću matematičkih propozicija, izvode kretanja planeta, kometa, Meseca i mora. Kamo sreće da se i druge prirodne pojave mogu izvesti iz istih mehaničkih principa istom vrstom argumentacije. Naime, mnogo toga me navodi da posumnjam da su sve ove pojave uslovljene nekim silama pomoću kojih se čestice tela, iz još uvek nepoznatih razloga, ili uzajamno privlače i potom spajaju u pravilne oblike ili se, naprotiv, odbijaju jedni od drugih i udaljuju. Budući da su te sile još nepoznate, filozofi su do sada uzalud istraživali prirodu. Nadam se da će se ili ovim načinom rasuđivanja, ili nekim pravilnijim, ovde izloženi principi delimično rasvetliti.

Na objavljivanju ovog dela svesrdno je radio vrlo oštroumni i svestrano obrazovani erudita, Edmund Halej (Edmund Halley), koji nije samo ispravio štamparske greške i pobrinuo se za shematske prikaze, već je bio i glavni podstrekač da ovo delo i objavim. Jer, od kada je od mene dobio dokaze oblika orbita nebeskih tela, nije odustao od zahteva da ih saopštim Kraljevskom društvu, koje me je zatim bodrenjem i dobronamernim podsticajima navelo na razmišljanje o njihovom objavljivanju. Ali kada sam prionuo na posmatranje nepravilnosti kretanja Meseca i zatim započeo druga istraživanja koja se tiču zakona i merenja gravitacije i drugih sila, putanja koje treba da opisuju tela privučena datim silama, kretanja mnogobrojnih tela usled uzajamnog delovanja, kretanja tela u

otpornim sredinama pod uticajem sila, gustina i kretanja sredina, orbita kometa i sličnog, smatrao sam da objavljivanje dela treba odgoditi za neko vreme, kako bih mogao tačno ispitati ostale stvari i sve zajedno dati u javnost. Ono što se odnosi na kretanja Meseca (premda nije završeno) sam zajedno obuhvatio korolarima u 66 propozicija, da ne bih pribegao pojedinim dokazima i složenim metodama, te da se ne bih rasplinjavao više nego što tema zaslužuje, i tako prekinuo niz ostalih propozicija. Neke stvari koje sam otkrio kasnije radije sam ubacivao na manje pogodna mesta, nego da sam menjao numeracije propozicija i referenci. Usrdno molim da se ovde izloženo iskreno pročita i da se nedostaci u ovako teškoj materiji toliko ne osuđuju, koliko da se dopune novim istraživanjima čitalaca.

Kembridž, Triniti Koledž, 8. maj 1686. Is. Njutn

PREDGOVOR AUTORA ZA DRUGO IZDANJE

U ovom drugom izdanju *Principa* mnogo je pojedinosti ispravljeno i ponešto dodato. U drugom odeljku prve knjige izlaže se na jednostavniji i sveobuhvatniji način otkriće sila pomoću kojih bi se tela u datim sredinama mogla obrtati. U sedmom odeljku druge knjige preciznije se istražuje teorija otpora tečnosti i potvrđuje se novim eksperimentima. U trećoj knjizi se potpunije izvode teorija Meseca i precesija ravnodnevica iz njihovih principa, i dokazuje se teorija kometa tačnije izračunatim brojnim primerima putanja orbita.

London, 28. mart 1713. Is. Njutn

PREDGOVOR AUTORA ZA TREĆE IZDANJE

U drugoj knjizi ovog trećeg izdanja, za koje se pobrinuo dr sc. med. Henri Pemberton (Henry Pemberton), čovek veoma vičan tome, neke stvari o otporu sredina se objašnjavaju malo opširnije nego ranije, i dodaju se novi eksperimenti o otporu koji vazduh pruža teškim telima. U trećoj knjizi se iznosi i šire obrazlaže dokaz da se Mesec putem gravitacije održava u svojoj orbiti i dodaju se nova zapažanja o prečniku Jupitera, od strane J. Paunda (J. Pound). Takođe, dodato je i nekoliko zapažanja one komete, uočene od strane D. Kirka (D. Kirk), koja se pojavila u novembru 1680. u Nemačkoj, koja su nedavno došla i do nas i pomoću kojih bi moglo da se pokaže da se komete kreću po paraboličnim putanjama. I eliptička putanja Halejeve komete se preciznije izračunava nego ranije. Takođe se pokazuje da je kometa po ovoj eliptičkoj orbiti prešla put preko devet znakova Zodijaka ne manje precizno nego što se uobičajeno kreću planete po eliptičkim orbitama definisanih u astronomiji. Pridodaje se takođe orbita komete koja se pojavila 1723, koju je izračunao J. Bredli (J. Bradley), profesor astronomije na Oksfordu.

London, 12. januar 1725/26. Is. Njutn

DEFINICIJE

DEFINICIJA I

Količina materije je mera iste, a proizlazi iz njene gustine i zapremine zajedno.

Zbog toga je vazduh, dvostruke gustine u dvostrukom prostoru, četvorostruk u količini a u trostrukom prostoru, šestostruk u količini. Isto se podrazumeva za sneg i za finu prašinu ili prah koji su kondenzovani sabijanjem ili topljenjem, kao i za sva tela koja su iz bilo kog razloga kondenzovana. Na ovom mestu ne razmatram sredinu, ukoliko i postoji, a koja slobodno ispunjava međuprostor između delova tela. Od sad pa nadalje, upravo je ova veličina ono što na svakom mestu podrazumevam pod pojmom tela ili mase, a koju saznajemo pomoću težine svakog tela jer je ona proporcionalna sa težinom, kao što sam saznao iz veoma preciznih eksperimenata na klatnu koji će biti predstavljeni u daljem tekstu.

DEFINICIJA II

Količina kretanja je mera istog, a proizlazi iz brzine i količine materije zajedno.

Kretanje celine je zbir kretanja svih delova. Zbog toga je kretanje tela, sa dvostrukom količinom i sa jednakom brzinom, dvostruko, dok je sa dvostrukom brzinom, ono četvorostruko.

DEFINICIJA III

Vis insita ili urođena sila materije je svojstvo otpora kojim svako telo, toliko koliko se ono nalazi u njemu, teži da se očuva u svom trenutnom stanju, bilo da je to mirovanje ili ravnomerno pravolinijsko kretanje.

Ova sila uvek je proporcionalna sa telom čija je ona sila i uopšte se ne razlikuje od neaktivnosti mase, osim u našem načinu poimanja toga. Telo, usled neaktivnosti materije, nije bez teškoće ometeno iz svog stanja mirovanja ili kretanja. Stoga se ova *vis insita*, sveobuhvatnim imenom, može nazvati *vis inertiae* ili silom inercije. Međutim, telo ispoljava ovu silu samo kad druga sila, koja deluje na njega, teži da promeni njegovo stanje a ispoljavanje ove sile može se smatrati i kao otpor i kao impuls. Otpor je utoliko što se telo, da bi održalo trenutno stanje, suprotstavlja sili koja deluje na njega. Impuls je utoliko što telo, tako što ne popušta lako sili koja deluje na njega, teži da promeni stanje tog drugog tela. Otpor se uglavnom pripisuje telima koja miruju, a impuls telima koja se kreću. Međutim, kretanje i mirovanje, uobičajeno shvaćeni, samo se relativno razlikuju. Niti su tela, za koja se obično pretpostavlja da su u stanju mirovanja, uvek istinski u tom stanju.

DEFINICIJA IV

Primenjena sila je delovanje koje se vrši na telu kako bi se promenilo njegovo stanje, bilo da je to mirovanje ili ravnomerno pravolinijsko kretanje.

Ova sila sastoji se samo u delovanju i ne ostaje u telu kada je delovanje završeno. Telo održava svako novo stanje koje zadobija samo pomoću sopstvene *vis inertiae*. Primenjene sile drugačijeg su porekla od udarca, pritiska i centripetalne sile.

DEFINICIJA V

Centripetalna sila je ona pomoću koje su tela privučena ili prinuđena, ili koja na bilo koji drugi način teže ka tački kao prema centru.

Ove vrste je gravitacija, pomoću koje tela teže ka centru Zemlje; magnetizam, pomoću kog gvožđe teži ka magnetu; i sila, pomoću koje se planete neprekidno povlače od pravolinijskih kretanja (kome

bi inače one težile) i koja čini da one kruže po krivolinijskoj orbiti. Kamen, koji se vrti na uzici, teži da se udalji od ruke koja ga pokreće. Tim nastojanjem zateže uzicu sve jačom silom što se okreće većom brzinom, a čim se pusti, on će odleteti. Tu silu, koja je suprotna ovom nastojanju, i kojom uzica neprekidno povlači kamen ka ruci i zadržava ga u svojoj orbiti, jer je usmerena ka ruci kao centru orbite, nazivam centripetalnom silom. Isto se podrazumeva za sva tela koja kruže po bilo kojoj orbiti. Sva ona teže da se udalje od centra sopstvene orbite i gde ne postoji suprotna sila koja ih ograničava i zadržava u orbiti, a koju zbog toga zovem centripetalnom, ona bi odletela sa ravnomernim pravolinijskim kretanjem. Ako ne bi bilo sile gravitacije, bačeno telo ne bi skretalo ka zemlji, već bi se udaljavalo od nje pravom linijom, a time sa ravnomernim kretanjem, ukoliko bi se otklonio otpor vazduha. Upravo gravitacija neprekidno povlači sa pravolinijskog smera i čini da tela, više ili manje, skreću ka zemlji, prema sili sopstvene gravitacije i sopstvene brzine kretanja. Što je manja gravitacija tela, u odnosu na količinu njegove materije, i što je veća brzina kojom je telo bačeno, ono će manje skretati sa svog pravolinijskog puta i dalje će otići. Ukoliko se olovno zrno ispali sa vrha planine pomoću sile baruta sa datom brzinom i u smeru paralelnim sa horizontom, ono će leteti po zakrivljenoj liniji do rastojanja od dve milje dok ne padne na zemlju. To telo će, ukoliko se otkloni otpor vazduha, sa dvostrukom ili desetostrukom brzinom, leteti dva ili deset puta dalje. Povećanjem brzine, možemo proizvoljno povećati udaljenost do koje ono može biti bačeno i umanjiti zakrivljenosti linije, koju ono može opisivati sve dok najzad ne padne na udaljenost od 10, 30 ili 90 stepeni, a čak može ići i oko cele Zemlje pre nego što padne, da naposletku, ono ne mora uopšte da padne na Zemlju, već da ide prema nebeskom prostoru i da tako nastavi svoje kretanje *in infinitum*. Na isti način, kao što bačeno telo pomoću sile gravitacije može da kruži po orbiti i da se kreće oko cele Zemlje, tako se i Mesec, ili pomoću sile gravitacije, ukoliko poseduje gravitaciju, ili pomoću bilo koje druge sile koja ga pokreće ka Zemlji, neprekidno može povlačiti sa pravolinijskog puta prema Zemlji, koji bi inače sledio usled urođene sile i na taj način kruži po orbiti koju sad opisuje. Mesec, bez takve sile, ne bi mogao da ostane u svojoj orbiti. Ukoliko je ova sila bila preslaba, ne bi bila dovoljna da Mesec skrene sa pravolinijskog toka; ukoliko je bila prejaka, previše bi povukla Mesec iz svoje orbite prema Zemlji. Neophodno je da sila bude

prave veličine i na matematičarima je da pronađu takvu silu koja bi služila da precizno održi telo u datoj orbiti sa datom brzinom; i *vice versa*, da odrede krivolinijsku putanju po kojoj se telo, koje je bačeno sa datog mesta i sa datom brzinom, kreće i na taj način odstupa od svog prirodnog pravolinijskog puta, pomoću te sile.

Može se smatrati da postoje tri vrste veličine bilo koje centripetalne sile: apsolutna, ubrzavajuća i pokretačka.

DEFINICIJA VI

Apsolutna veličina centripetalne sile je mera iste koja je proporcionalna sa efikasnošću njenog uzroka pomoću kog se rasprostire od centra po okolnom prostoru.

Prema tome, magnetna sila je u jednom magnetu veća, a u drugom manja, u zavisnosti od njihove veličine i jačine intenziteta.

DEFINICIJA VII

Ubrzavajuća veličina centripetalne sile je mera iste proporcionalna sa brzinom koju stvara u datom vremenu.

Zbog toga je sila u istom magnetu veća na manjem rastojanju, a manja na većem rastojanju. Takođe, sila gravitacije je veća u dolinama, a manja na vrhovima izuzetno visokih planina; a još je manja (kao što ćemo kasnije pokazati) na većim rastojanjima od Zemlje. Međutim, na jednakim rastojanjima svuda je jednaka, jer (oduzimajući ili dozvoljavajući otpor vazduha) ona podjednako ubrzava sva tela koja padaju, bilo da su teška ili laka, velika ili mala.

DEFINICIJA VIII

Pokretačka veličina centripetalne sile je mera iste proporcionalna sa kretanjem koje stvara u datom vremenu.

Prema tome, veća tela su teža, a manja tela lakša. Isto telo je teže što je bliže Zemlji, a lakše na većim udaljenostima. Ova vrsta veličine je centripetalnost ili sklonost celog tela ka centru, ili, kao što mogu reći, njegova težina i ona je uvek poznata pomoću količine

jednake i suprotne sile koja je taman dovoljna da spreči padanje tela.

Ove veličine sila možemo, zbog pojednostavljenja, nazvati pokretačkim, ubrzavajućim i apsolutnim silama. Da bismo ih razlikovali, razmatraćemo ih u odnosu na tela koja teže ka centru, u odnosu na mesta na kojima se ta tela nalaze i u odnosu na centar sile kom teže ta tela. Naime, pokretačka sila odnosi se na telo kao težnja celine prema centru, koja proizlazi iz težnje pojedinih delova uzetih zajedno. Ubrzavajuća sila odnosi se na položaj tela kao određena snaga ili energija koja je rasuta od centra prema svim okolnim mestima i koja pomera tela koja se nalaze u njima. Apsolutna sila odnosi se na centar kao određena nekim uzrokom, bez kog se pokretačke sile ne mogu rasprostirati preko okolnog prostora, bilo da je taj uzrok neko centralno telo (kao što je magnet u centru magnetne sile ili Zemlja u centru gravitacione sile), ili bilo šta drugo što još uvek nije otkriveno.

Zbog toga će se ubrzavajuća sila odnositi prema pokretačkoj isto kao što se brzina odnosi prema kretanju. Količina kretanja proporcionalna je sa brzinom i količinom materije, a pokretačka sila proporcionalna je sa silom ubrzavanja i količinom materije. Zbir delovanja sile ubrzanja na pojedinačnim delovima tela jeste pokretačka sila celine. Zbog toga je, u blizini površine Zemlje, gde je ubrzavajuća sila gravitacije ili sila uzrokovana gravitacijom u svim telima jednaka, pokretačka sila gravitacije ili težina proporcionalna sa telom. Međutim, ako se popnemo do viših oblasti, gde je ubrzavajuća sila gravitacije manja, onda će i težina biti jednako umanjena, i uvek će biti proporcionalna sa telom i ubrzavajućom silom gravitacije. U tim oblastima, u kojima je ubrzavajuća sila gravitacije umanjena za jednu polovinu, težina tela, koja je dva ili tri puta manja, biće četiri ili šest puta manja.

Isto tako, pridajem privlačenjima i impulsima isti smisao kao i silama ubrzanja i pokretačkim silama. Nasumice upotrebljavam, jednu umesto druge, reči privlačenje, impuls ili stremljenje bilo koje vrste prema centru, ne razmatrajući pritom te sile fizički, već matematički. Međutim, čitalac ne treba da pomisli da ja na bilo kom mestu tim rečima definišem vrstu ili način bilo kog delovanja, ni fizičke uzroke ili razloge istih, kao što ne pripisujem ni oblik, u istinskom i fizičkom smislu, određenim centrima (koji su samo matematičke tačke), mada ću govoriti o centrima kao o privlačećim njima, ili o centrima koji poseduju sile privlačenja.

БИБЛИОТЕКА ФИЛОЗОФСКОГ ФАКУЛТЕТА НОВИ САД

SHOLIJA

Do sada sam izložio definicije pojmova koji su manje poznati, i objasnio smisao po kom bih hteo da budu shvaćeni u narednom razlaganju. Nisam definisao vreme, prostor, mesto i kretanje, pošto su svima dobro poznati. Ipak, moram primetiti da uobičajeno razumevanje ovih pojmova podrazumeva samo njihov odnos prema čulnim objektima. Zbog toga se pojavljuju određene predrasude, za čije je otklanjanje prikladno razlikovati te veličine na apsolutne i relativne, stvarne i očigledne, matematičke i obične.

I. Apsolutno, istinsko i matematičko vreme, po sebi i po svojoj sopstvenoj prirodi, teče ujednačeno bez obzira na bilo šta spoljašnje, a pod drugim imenom je poznato kao trajanje. Relativno, očigledno i obično vreme je neka opažajna i spoljašnja (bilo da je precizna ili neujednačena) mera trajanja posredstvom kretanja, a koje se uobičajeno koristi umesto istinskog vremena, kao što su sat, dan, mesec, godina.

II. Apsolutni prostor, po svojoj sopstvenoj prirodi, bez obzira na bilo šta spoljašnje, uvek ostaje istovetan i nepokretan. Relativni prostor je svojevrsna pokretna dimenzija ili mera apsolutnih prostora koji naša čula određuju prema njegovom položaju u odnosu na tela i koje se uobičajeno shvata nepokretnim prostorom, kao što su dimenzije podzemnog, vazdušnog ili nebeskog prostora koji su određeni svojim položajem u odnosu na Zemlju. Apsolutni i relativni prostor imaju isti oblik i veličinu, ali ne ostaju uvek numerički isti. Jer ako se Zemlja, na primer, pokreće, prostor našeg neba, koji relativno i u pogledu Zemlje ostaje uvek isti, u jednom momentu će biti jedan deo apsolutnog prostora po kom se nebo prostire, dok će u nekom drugom momentu biti drugi deo istog tog apsolutnog prostora, i tako će, apsolutno shvaćeno, biti neprekidno promenljivo.

III. Mesto je deo prostora koje telo zauzima i ono je u odnosu na prostor, ili apsolutno ili relativno. Kažem, nezavisno od prostora, nije ni situacija, ni spoljašnja površina tela. Mesta jednakih čvrstih tela uvek su jednaka, ali njihove površine su, zbog njihovih različitih oblika, često nejednake. Položaji, pravilno govoreći, nemaju veličinu, niti su oni sami mesta, već su svojstva mesta. Kretanje celine jednako je zbiru kretanja delova, tj. pomeranje celine sa svog mesta jednako je zbiru pomeranja delova sa njihovih

mesta, a zbog toga je mesto celine jednako zbiru mesta delova i iz tog razloga ono je potpuno unutar celog tela.

IV. Apsolutno kretanje je pomeranje tela iz jednog apsolutnog mesta u drugo, dok je relativno kretanje pomeranje tela iz jednog relativnog mesta u drugo. Prema tome, na brodu koji plovi, relativno mesto tela je onaj deo broda koje telo zauzima, ili onaj deo njegove šupljine koju telo ispunjava i koje se zbog toga pomera zajedno sa brodom. Relativno mirovanje je trajanje tela u istom delu broda ili u njegovoj šupljini. Međutim, stvarno, apsolutno mirovanje je trajanje tela u onom istom delu nepokretanog prostora u kom se sam brod, njegova šupljina i sve što on sadrži, pomera. Zbog čega će se, ukoliko Zemlja stvarno miruje, telo, koje relativno miruje na brodu, stvarno i apsolutno pomerati istom brzinom koju brod ima na Zemlji. Međutim, ukoliko se Zemlja takođe pomera, stvarno i apsolutno kretanje tela će se pojaviti, delom zbog stvarnog kretanja Zemlje u nepokretnom prostoru, delom zbog relativnog kretanja broda na Zemlji. Ukoliko se telo kreće, takođe relativno, na brodu, njegovo stvarno kretanje će se pojaviti, delom zbog stvarnog kretanja Zemlje u nepokretnom prostoru, a delom zbog relativnih kretanja, kako broda na Zemlji, tako i tela na brodu. Iz ovih relativnih kretanja proizlazi relativno kretanje tela na Zemlji. Ako je deo Zemlje, gde se nalazi brod, stvarno pomeren prema istoku sa brzinom od 10010 delova, dok je sam brod, snažnim vetrom i pod punim jedrima, nošen prema zapadu i sa brzinom od 10 delova i dok mornar na brodu hoda prema istoku sa 1 delom od navedene brzine – tada će mornar stvarno biti pomeren u nepokretnom prostoru prema istoku sa brzinom od 10001 i relativno, na Zemlji prema zapadu, sa brzinom od 9 delova.

U astronomiji se apsolutno vreme, razlikuje od relativnog pomoću jednačine ili korekcije uobičajenog vremena. Jer, prirodni dani su istinski nejednaki, iako se uobičajeno shvataju jednakim i koriste se za merenje vremena. Astronomi ispravljaju ovu nejednakost za njihova preciznija merenja nebeskih kretanja. Možda i ne postoji nešto kao što je ujednačeno kretanje pomoću kog bi se vreme moglo precizno izmeriti. Sva kretanja mogu biti ubrzana ili usporena, ali stvaran ili ujednačen tok apsolutnog vremena ne podleže nijednoj promeni. Trajanje ili postojanost postojanja stvari ostaje ista, bez obzira na to da li je kretanje brzo ili sporo ili ga uopšte nema i zbog toga se mora razlikovati od onoga što su samo čulne mere toga budući da su izvedene iz njih pomoću astronomske

jednačine. Neophodnost takve jednačine, koja se koristi za određivanje vremena pojava, pokazana je kako iz eksperimenata sata sa klatnom, tako i pomoću pomračenja Jupiterovih satelita.

Kao što je poredak delova vremena nepromenljiv, tako je nepromenljiv i poredak delova prostora. Ako pretpostavimo da su ti delovi pomereni sa svojih mesta, oni bi se, takoreći, pomerili iz njih samih. Jer, vremena i prostori jesu mesta kako njih samih tako i svih drugih stvari. Sve stvari smeštene su u vremenu prema poretku redosleda, a u prostoru prema poretku položaja. Po njihovoj suštini ili prirodi oni jesu mesta i apsurd je pripisati kretanje prvobitnim mestima stvari. Ona su, zbog toga, apsolutna mesta, a pomeranja sa tih mesta jedino su apsolutna kretanja.

Međutim, pošto delove prostora ne možemo da vidimo, ili da ih međusobno razlikujemo pomoću naših čula, onda umesto njih koristimo merenja koja su dostupna našim čulima. Iz položaja i udaljenosti stvari od bilo kog tela koji smatramo nepokretnim, mi definišemo sva mesta. Onda, u odnosu na takva mesta, mi procenjujemo sva kretanja, uzimajući tela koja su premeštena iz nekih od tih mesta u druga. I tako, umesto apsolutnih mesta i kretanja, mi koristimo relativna. U svakodnevici, to ne predstavlja smetnju. Međutim, u filozofskim raspravama moramo apstrahovati iz naših čula i razmatrati stvari njima samima, drugačijim od onog što je samo osetna mera istih. Jer može da se desi da ne postoji telo koje stvarno miruje, a prema kom bi se odnosila mesta i kretanja drugih.

Ipak, mi možemo međusobno razlikovati mirovanje i kretanje, apsolutno i relativno, pomoću njihovih svojstava, uzroka i efekata. Svojstvo mirovanja je da tela koja su stvarno u stanju mirovanja, miruju u odnosu na drugo telo. Zbog toga, kao da je moguće da, u nekim udaljenim oblastima nepokretnih zvezda, ili možda još i dalje, može postojati neko telo koje je apsolutno u stanju mirovanja. Međutim, ne možemo znati, iz međusobnih položaja tela u našoj oblasti, da li bilo koje od njih zadržava isti položaj u odnosu na to udaljeno telo. Iz toga sledi da se apsolutno stanje mirovanja ne može odrediti položajima tela u našoj oblasti.

Svojstvo je kretanja da delovi, koji zadržavaju date položaje prema svojim celinama, sudeluju u kretanjima tih celina. Svi delovi tela koja kruže, teže da se udalje od ose kretanja; i podsticaj tela koja se pomeraju napred, proizlazi iz zajedničkog podsticaja svih delova. Zbog toga, ukoliko su okolna tela pomerena, ona koja

su među njima relativno u mirovanju, sudelovaće u njihovom kretanju, usled čega se stvarno i apsolutno kretanje tela ne može odrediti pomoću njihovog premeštanja od onih za koja se samo čini da miruju jer spoljašnja tela, ne samo da moraju da izgledaju kao da miruju, već moraju stvarno da budu u stanju mirovanja. Inače, sva uključena tela, pored njihovog premeštanja od onih okolnih tela, takode, sudeluju u njihovim stvarnim kretanjima i kad ne bi bilo takvog premeštanja ona ne bi stvarno bila u stanju mirovanja, već bi samo izgledala da jesu. Okolna tela stoje u istom odnosu prema okruženom telu, kao spoljašnji deo celine prema unutrašnjem, ili kao ljuska prema jezgru. Međutim, ako se ljuska pomeri, jezgro će se, takođe, pomeriti, jer je deo celine, bez ikakvog premeštanja unutar ljuske.

Svojstvo, veoma srodno prethodnom, jeste to da, ukoliko je mesto pomereno, onda se bilo šta što je tamo smešteno, pomera zajedno sa njim. Zato i telo, koje je pomereno iz mesta koje se kreće, takođe sudeluje u kretanju svog mesta, usled čega su sva kretanja, iz mesta koje se kreće, ništa drugo nego delovi celokupnih i apsolutnih kretanja i svako celokupno kretanje je sastavljeno od kretanja tela izvan svog prvobitnog mesta, a kretanje ovog mesta izvan svog mesta i tako dalje, sve dok ne dođemo do nekog nepokretnog mesta, kao u prethodno pomenutom primeru sa mornarem. Prema tome, celokupna i apsolutna kretanja ne mogu drugačije da se odrede nego pomoću nepokretnih mesta; iz tog razloga ranije sam pripisivao apsolutna kretanja nepokretnim mestima, a relativna pokretnim. Nijedno mesto nije nepokretno osim onih koja, od beskonačnosti do beskonačnosti, sva zadržavaju isti dat položaj u odnosu na druga a zbog toga stalno moraju ostati nepomerena, i na taj način sačinjavaju nepokretan prostor.

Uzroci, prema kojima se međusobno razlikuju stvarna i relativna kretanja, jesu sile koje deluju na tela kako bi stvorila kretanje. Stvarno kretanje nije ni stvoreno ni promenjeno, već je pokrenuto nekom silom koja deluje na telo. Međutim, relativno kretanje se može i stvoriti i promeniti bez ijedne sile koja deluje na telo. Dovoljno je samo da neka sila deluje na druga tela, s kojim je prethodno telo upoređeno, i njihovim ustupanjem, taj odnos, koji se sastojao iz relativnog mirovanja ili kretanja drugog tela, može biti promenjen. Istinsko kretanje uvek trpi neku promenu od bilo koje sile koja deluje na telo koje se kreće. Međutim, relativno kretanje ne mora nužno da bude podvrgnuto bilo kakvoj promeni usled

delovanja tih sila. Ako iste sile, takođe, deluju na ta druga tela, sa kojima je izvršeno poređenje, tako da bi se relativan položaj mogao očuvati, onda će se očuvati uslov iz kog se relativno kretanje sastoji. Stoga se bilo koje relativno kretanje može promeniti dok stvarno kretanje ostaje nepromenjeno, a kad stvarno trpi određene promene, relativno kretanje se može očuvati. Iz tog razloga se stvarno kretanje nikako ne sastoji iz takvih odnosa.

Efekti, pomoću kojih razlikujemo apsolutno od relativnog kretanja, jesu sile kojima se udaljava od ose kružnog kretanja. Ne postoje takve sile u kružnom kretanju koje su čisto relativne, ali u stvarnom i apsolutnom kružnom kretanju one su veće ili manje u zavisnosti od količine kretanja. Ukoliko se posuda, koja visi na dugačkom užetu, često okretala tako da je uže jako uvijeno, i ako se posuda napuni vodom i drži u stanju mirovanja zajedno sa vodom; iznenadnim delovanjem druge sile, okreće se u suprotnom smeru i dok se uže odmotava, posuda nastavlja još neko vreme da se kreće. Površina vode će na početku biti ravna, kao što je bila pre nego što je posuda počela da se kreće. Međutim, posuda će, postepenim prenošenjem svog kretanja na vodu, učiniti da voda započne blago da kruži i da se malo po malo povlači sa sredine, a da se podiže na stranama posude, oblikujući konkavnu figuru (kao što sam sâm isprobao) i što kretanje postaje brže, to će se voda više podići, sve dok najzad, izvodeći svoja okretanja istovremeno sa posudom, ne bude u relativnom stanju mirovanja u njoj. Ovo podizanje vode pokazuje njenu težnju da odstupa od ose sopstvenog kretanja, a razotkriva se stvarno i apsolutno kružno kretanje vode, koje je ovde u direktnoj suprotnosti sa relativnim, i može se izmeriti ovom težnjom. Na početku, kada je relativno kretanje vode u posudi bilo najbrže, ono nije stvorilo nikakvu težnju za odstupanjem od ose. Voda nije pokazala naginjanje prema krajevima, niti bilo kakvo podizanje prema stranama posude, već je zadržala ravnu površinu, pa zbog toga njeno stvarno kružno kretanje još uvek nije započelo. Kasnije, kad je relativno kretanje vode opalo, njeno podizanje prema stranama posude dokazalo je njenu težnju ka odstupanju od ose i ova je težnja pokazala stvarno kružno kretanje vode koje se neprekidno povećavalo sve dok nije postiglo sopstvenu najveću veličinu, kad voda relativno miruje u posudi. Zbog toga, ova težnja ne zavisi od premeštanja vode u odnosu na okolinu tela, niti se stvarno kružno kretanje može definisati takvim premeštanjima. Postoji samo jedno stvarno kružno

kretanje bilo kog tela koje kruži i koje odgovara samo jednoj moći nastojanja da odstupi od sopstvene ose kretanja, kao njenom pravilnom i odgovarajućem efektu. Međutim, relativna kretanja su u jednom istom telu bezbrojna, sudeći prema raznim odnosima koje ima sa spoljašnjim telima i, kao i drugi odnosi, svi zajedno su lišeni bilo kog stvarnog efekta, a bilo koji, osim njih, možda bi mogli da sudeluju u tom jednom jedinom stvarnom kretanju. Prema tome, u sistemu koji pretpostavlja da naša neba, koja kruže ispod sfere nepokretnih zvezda i nose planete zajedno sa njima, pojedini delovi tih neba i planete, koje su zaista u relativnom stanju mirovanja na njihovim nebima – ipak se zapravo kreću. Jer one menjaju položaj jedne naspram drugih (što se nikad ne dešava sa telima koja zaista miruju) i nošene su zajedno sa svojim nebima, sudeluju u njihovom kretanju i kao delovi celine koja kruži teže da odstupe od ose sopstvenih kretanja.

Na taj način, relativne veličine nisu same te veličine, čija im se imena pridaju, već su one njihove osetne mere (precizne ili neprecizne), a koje se uobičajeno koriste umesto samih tih veličina. I, ukoliko bi se značenje reči određivalo njihovom upotrebom, onda bi se imenima vremena, prostora, mesta i kretanja, njihove mere na odgovarajući način razumele, a izraz bi bio krajnje neobičan i čisto matematički, ukoliko bi se podrazumevale izmerene veličine njih samih. Na taj način, natežu smisao svetih pisanja, oni koji te reči tumače kao izmerene veličine. Niti manje narušavaju čistotu matematičkih i filozofskih istina oni koji mešaju same stvarne veličine i njihove odnose sa uobičajenim merama.

Zaista je stvar velike poteškoće da se otkriju i, na kraju, da se razlikuju stvarna kretanja određenih tela od očiglednih jer delove nepokretnog prostora, gde se izvode ta kretanja, nikako ne možemo promatrati našim čulima. Ipak, stvar nije toliko beznadežna: mi imamo pojedine argumente koji nas, delimično od očiglednih kretanja upućuju na to koje su razlike stvarnih kretanja i delimično od sila, koji su uzroci i efekti stvarnih kretanja. Na primer, ukoliko dve lopte, koje se drže na datom međusobnom rastojanju pomoću užeta koje ih spaja, kruže oko njihovog zajedničkog centra gravitacije, onda pomoću zategnutosti užeta možemo otkriti težnju tih lopti da odstupe od osa njihovih kretanja i na taj način možemo izračunati količinu njihovog kružnog kretanja. Ukoliko bi bilo koja jednaka sila odjednom delovala na naizmenične strane lopti kako bi se povećalo ili umanjilo njihovo kružno kretanje,

usled većeg ili manjeg zatezanja užeta možemo pretpostaviti povećanje ili umanjenje njihovih kretanja. Iz toga bismo saznali na koju stranu bi te sile trebalo da deluju kako bi kretanje lopti moglo najviše da se poveća, tj. mogli bismo da otkrijemo njihove najudaljenije strane ili one koje, u kružnom kretanju, prate. Međutim, ako su poznate strane koje prate, a prema tome i one suprotne koje prethode, trebalo bi, takođe, da znamo i određenje njihovog kretanja. Zbog toga bismo mogli da pronađemo i količinu i određenje ovog kružnog kretanja, čak i u neizmernom vakuumu gde ne postoji ništa spoljašnje ili osetno sa čim bi se lopte mogle uporediti. Međutim, ukoliko su u tom prostoru smeštena neka udaljena tela tako da uvek zadržavaju date međusobne položaje, kao što nepokretne zvezde čine u našoj oblasti, ne bismo zaista mogli da odredimo, iz relativnih premeštanja ovih lopti među tim telima, da li kretanje pripada loptama ili telima. Ipak, ako posmatramo uže i pronađemo da je njegova zategnutost upravo ona zategnutost koja je neophodna za kretanje lopti, možemo zaključiti da se lopte kreću, a da tela miruju; a onda, na kraju, od premeštanja lopti među telima, mogli bismo pronaći određenje njihovih kretanja. Pronalaženje stvarnih kretanja iz njihovih uzroka, efekata i očiglednih razlika i, *vice versa*, pronalaženje uzroka i efekata iz kretanja, bilo stvarnog ili prividnog, opširnije će biti objašnjeno u narednoj raspravi, koja je upravo s tom svrhom i sačinjena.

AKSIOMI ILI ZAKONI KRETANJA

ZAKON I

Svako telo ostaje u svom stanju mirovanja ili ravnomernog pravolinijskog kretanja ukoliko nije prinuđeno da promeni to stanje silama koje deluju na njega.

Bačena tela nastavljaju da se kreću sve dok nisu usporena otporom vazduha ili povučena nadole silom gravitacije. Čigra, čiji delovi usled uzajamne kohezije neprestano skreću sa pravolinijskog puta, ne prekida svoju rotaciju osim ako je usporena otporom vazduha. Veća tela planeta i kometa, koja se sreću sa manjim otporom u slobodnijim prostorima, zadržavaju svoja kretanja, kako translatorna tako i kružna, tokom mnogo dužeg vremena.

ZAKON II

Promena kretanja uvek je proporcionalna pokretačkoj sili koja deluje i javlja se u smeru prave linije po kojoj ta sila deluje.

Ukoliko neka sila proizvodi kretanje, dvostruka sila će proizvesti dvostruko kretanje, trostruka sila trostruko kretanje, bilo da ta sila deluje zajedno i odjednom, ili postepeno i uzastopno. Ako se telo ranije kretalo, ovo kretanje je (pošto je uvek usmereno isto kao i sila koja ga stvara), ili dodato ili oduzeto od prethodnog kretanja (u zavisnosti od toga da li se ona direktno slažu ili su međusobno direktno suprotna) ili je ukošeno, kada su kretanja pod uglom, tako da stvaraju novo kretanje koje je sastavljeno od određenja svakog od njih.

ZAKON III

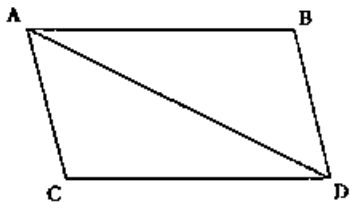
Za svaku akciju uvek postoji suprotna, jednaka reakcija. Ili, međusobne uzajamne akcije dva tela uvek su jednake i usmerene su na suprotne delove.

Bilo šta što povlači ili pritiska drugo, isto tako je povučeno ili pritisnuto od strane tog drugog. Ukoliko pritisnete kamen svojim prstom, kamen takođe pritiska prst. Ako konj vuče kamen koji je pričvršćen za uže, konj će (ukoliko mogu tako da kažem), podjednako biti povučen unazad prema kamenu. Rastegljivo uže će, istim nastojanjem da sebe popusti ili ispravi, vući konja prema kamenu isto kao i kamen prema konju i ometaće pokretanje jednog isto koliko će unaprediti pokretanje drugog.

Ukoliko jedno telo udari drugo i svojom silom promeni kretanje tog drugog, to telo će takođe (zbog podjednakog obostranog pritiska) biti podvrgnuto jednakoj promeni u svom kretanju, ali prema suprotnom delu. Promene koje su nastale ovim akcijama jesu jednake, ne u brzinama, već u kretanjima tela, ukoliko tela nisu ometana bilo kojim drugim preprekama. S obzirom na to da su kretanja podjednako promenjena, i promene u brzinama prema suprotnim delovima obrnuto su proporcionalne sa telima. Ovaj zakon takođe važi i za privlačenja kao što će biti dokazano u narednoj Sholiji.

KOROLAR I

Telo će, pomoću dve povezane sile, opisivati dijagonalu paralelograma, za isto vreme tokom kojeg bi opisivalo njegove strane pomoću tih sila da su one razdvojene.



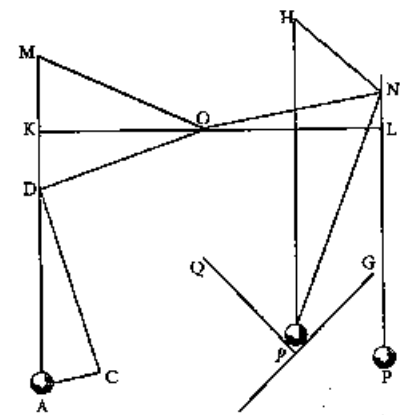
Ukoliko na telo, u datom vremenu, odvojeno deluje sila M na mestu A, ono bi trebalo da ide ravnomernim kretanjem od A do B; a ako sila N odvojeno deluje na istom mestu, ono bi trebalo da ide od A do C; kad je paralelogram ABCD celovit i uz obe sile koje deluju zajedno, telo bi u isto vreme trebalo da ide po dijagonali od A do D. Pošto sila N deluje u smeru linije AC, paralelno sa BD, ova sila (prema drugom zakonu) uopšte neće promeniti brzinu koja je stvorena drugom silom, M, pomoću koje telo ide linijom BD. Zbog toga će telo prispeti na liniju BD u istom vremenu, bez obzira na to da li sila N utiče ili ne; a zbog toga će se i pronaći negde na liniji BD na kraju tog vremena. Istim argumentom, na kraju tog vremena, pronaći će se negde na liniji CD. Usled toga, telo će se naći u tački D gde se obe linije sreću. Međutim, prema prvom zakonu, ono će se pomeriti po pravoj liniji od A do D.

KOROLAR II

Odatle je objašnjeno slaganje bilo koje direktne sile AD, izvan bilo koje druge dve kose sile AC i CD, i, nasuprot tome, razlaganje bilo koje direktne sile AD u dve kose sile AC i CD, a uz to su slaganje i razlaganje umnogome potvrđeni u mehanici.

Kao što bi nejednaki poluprečnici OM i ON, povučeni iz centra O bilo kog točka, trebalo da podnesu težine A i P pomoću kanapa MA i NP, tako su neophodne i sile tih težina da bi pokrenule točak. Preko centra O povući ćemo pravu liniju KOL, koja se normalno sreće sa kanapima u K i L, i iz centra O, OL, koja je najveća od udaljenosti OK i OL, opisivaće krug, a sreće se sa kanapom MA u D. Povlačenjem OD, AC paralela i DC postaju normalni ka njemu. Sada, pošto je nebitno da li su tačke K, L, D na kanapu fiksirane u ravni točka, težine će imati isti efekat bez obzira na to da li vise iz tačaka K i L ili iz D i L. Neka celokupna sila težine A bude predstavljena linijom AD i neka bude razdvojena na sile AC i CD, od kojih sila AC, koja povlači poluprečnik OD direktno iz centra, neće imati dejstvo da pokrene točak. Međutim, druga sila, DC, koja normalno povlači poluprečnik DO, imaće isto dejstvo kao da je normalno povukla poluprečnik OL jednakim sa OD. Imaće, dakle, isto dejstvo kao i težina P, ukoliko se ta težina odnosi prema težini A, kao sila DC prema sili DA, tj. (zbog sličnih trouglova ADC, DOK) kao OK prema OD ili OL. Zbog toga će težine A i P, koje su recipročne kao i poluprečnici OK i OL koji leže na istoj pravoj liniji, biti ekvipolentne i tako će ostati u ravnoteži, koja je dobro poznato svojstvo vage, poluge i točka. Ukoliko je bilo koja od ovih težina veća nego što je u ovom odnosu, njena sila da pomeri točak bila bi isto toliko veća.

Ukoliko težina *p*, koja je jednaka težini P, delimično visi pomoću kanapa N*p*, a delimično se podupire kosom ravni *p*G – povlačenjem *p*H, koje je normalno na horizont, i HN, koje je normalno na ravan *p*G – i ako je sila težine *p*, koja teži prema dole, predstavljena linijom *p*H, ona se može razdeliti na sile *p*N, HN. Ukoliko je postojala bilo koja ravan *p*Q, koja je normalna na kanap *p*N, koja seče drugu ravan *p*G u liniji paralelnoj sa horizontom, a težina *p* je podržana samo onim ravnima *p*Q, *p*G, ona bi pritisla te ravni normalno sa silama *p*N, HN, ravan *p*Q sa silom *p*N, a ravan *p*G sa silom HN. Na taj način, ako sklonimo ravan *p*Q, tako da težina može da zategne kanap, jer kanap, koji sad održava težinu, zamenjuje mesto ravni koja je sklonjena i biće zategnut istom silom N koja je ranije pritiskala ravan. Zbog toga će se zategnutost ovog kosog kanapa *p*N odnositi prema tom drugom normalnom kanapu PN, kao *p*N prema *p*H. Ako je težina *p* prema težini A u odnosu koji je sastavljen od recipročnih odnosa najmanjih udaljenosti kanapa PN, AM od centra točka i u direktnom odnosu *p*H prema *p*N, težine će imati ista dejstva prema pomeranju točka, a zbog toga će se i međusobno podupirati (kao što bilo ko može da pronađe eksperimentom).



Međutim, težina *p*, koja pritiska te dve ravni, može se

smatrati klinom između dve unutrašnje površine tela koje je podeljeno njime, i na taj način se mogu odrediti sile klina i malja, jer je sila, kojom težina *p* pritiska ravan *p*Q, u odnosu prema sili, kojom ta ravan, bilo sopstvenom gravitacijom ili udarcem malja, deluje u pravcu linije *p*H ka obema ravnima, kao *p*H prema *p*H, a prema sili kojom pritiska drugu ravan *p*G, kao *p*N prema NH. Zbog toga se sila zavrtnja može zaključiti iz sličnog razlaganja sila; a ona je ništa drugo nego klin na koji deluje sila poluge. Zato je upotreba ovog Korolara daleko i široko rasprostranjena, a zbog te difuzne rasprostranjenosti istina toga je daleko potvrđena. Jer iz onoga što je rečeno zavisi celokupno učenje mehanike koju su različito predstavili razni autori, iz čega se lako mogu zaključiti sile mašina, koje su sastavljene od točkova, poluga, kanapa i tegova, koji utiču direktno ili koso, kao i druge mehaničke snage, kao i sile tetiva koje pomeraju kosti životinja.

KOROLAR III

Količina kretanja, koja je dobijena iz zbira kretanja usmerenih prema istim delovima i iz razlike onih koji su usmereni prema suprotnim delovima, ne trpi promenu od međusobnih akcija tih tela.

Akcija i njena suprotna reakcija jednake su prema Zakonu III, a zbog toga, prema Zakonu II, one stvaraju u kretanjima iste promene na suprotnim delovima. Shodno tome, ako su kretanja usmerena prema istim delovima, bilo šta da se doda kretanju tela koje prethodi biće oduzeto od kretanja onog koje prati, te će zbir biti isti kao i pre. Ukoliko se tela, sa suprotnim kretanjima, sretnu, postojaće jednako oduzimanje od kretanja oba tela, te će razlika kretanja, usmerena prema suprotnim delovima, ostati ista.

Na taj način, ako je sferno telo A, sa dva dela brzine, trostruko u odnosu na sferno telo B, koje prati istu pravu liniju sa deset delova brzine, kretanje tela A će u odnosu na kretanje tela B, biti kao 6 prema 10. Pretpostavimo, onda, da su njihova kretanja od 6 delova i od 10 delova, pa će njhov zbir biti 16 delova. Zbog toga, posle sretanja tela, ukoliko A zadobije 3, 4 ili 5 delova, B će isto toliko izgubiti, zbog čega će posle odbijanja A nastaviti sa 9, 10 ili 11 delova, a B sa 7, 6 ili 5, a zbir uvek ostaje 16. Ukoliko telo A zadobije 9, 10, 11 ili 12 delova, a zbog toga nakon susreta nastavi sa 15, 16, 17 ili 18 delova, telo B, koje će izgubiti onoliko delova koliko je A dobilo, nastaviće sa 1 delom, gubeći 9, ili će stati i ostati u mirovanju, jer će izgubiti sve svoje translatorno kretanje od 10 delova, ili će se vratiti sa 1 delom, ne gubeći svoje celokupno kretanje, već (ako tako mogu da kažem) jedan deo više, ili će se vratiti sa 2 dela, jer je translatorno kretanje sa 12 delova oduzeto. I tako će zbir istosmernih kretanja 15 + 1 ili 16 + 0 i razlika suprotnih kretanja 17 – 1 i 18 – 2 uvek biti isti sa 16 delova, kao što su i bili pre susreta i odbijanja tela. Poznata su kretanja sa kojim tela nastavljaju posle odbijanja, a brzina tih tela će takođe biti poznata ako uzmemo brzinu pre u odnosu na brzinu posle odbijanja, kao što je kretanje posle prema kretanju pre. Kao što je u poslednjem slučaju, gde je kretanje tela A bilo od 6 delova pre odbijanja i 18 posle, a brzina je bila 2 dela pre odbijanja, tako će brzina posle odbijanja biti od 6 delova; kao što se 6 delova kretanja pre odbijanja odnose prema 18 delova posle, tako se i 2 dela brzine posle odbijanja odnose prema 6 delova posle.

Međutim, ako nijedno telo nije sferno ili ako se tela kreću po različitim pravim linijama i koso sudaraju, njihovo kretanje posle odbijanja je neophodno, a u tim slučajevima moramo prvo utvrditi položaj ravni, koja dodiruje tela koja se seku, u tački u kojoj se seku. Tada se kretanja svakog tela (Kor. II) moraju razdvojiti na dva, jedno koje je normalno na tu ravan i drugo koje je paralelno sa njom. Kad je ovo učinjeno, pošto tela međusobno deluju u pravcu linije koja je normalna na ovu ravan, paralelna kretanja ostaće ista posle odbijanja, kao i pre odbijanja. Normalnim kretanjima pripisaćemo jednake promene prema suprotnim delovima. Na takav način zbir kretanja koja se slažu i razlika suprotnih kretanja mogu ostati ista kao i pre. Iz takvih vrsta odbijanja ponekad se pojavi i kružno kretanje tela oko njihovih centara. Ali te slučajeve neću razmatrati u onome što sledi, jer bi bilo suviše zamorno da predstavim svaku pojedinačnost koja je u vezi sa ovim predmetom.

KOROLAR IV

Zajednički centar gravitacije dva ili više tela ne menja njihovo stanje kretanje ili mirovanja međusobnim akcijama tela i zbog toga je zajednički centar gravitacije svih tela koja međusobno deluju (izuzev spoljašnjih akcija i prepreka) ili u stanju mirovanja ili se kreće ravnomerno pravolinijski.

Ako dve tačke nastavljaju ravnomerno da se kreću po pravim linijama i ako je njihova udaljenost podeljena u datom odnosu, podeona tačka će biti ili u mirovanju ili će se kretati ravnomerno pravolinijski. Ovo će ubuduće biti prikazano u Lemi XXIII i u njenim Korolarima, gde se tačke pomeraju u istoj ravni, a na isti način se može pokazati i kada se tačke ne kreću u istoj ravni. Imajući to u vidu, ako se bilo koji broj tela ravnomerno kreće po pravim linijama, zajednički centar gravitacije bilo koja dva tela je ili u mirovanju ili nastavlja ravnomerno pravolinijski, jer je linija, koja spaja centre ta dva tela koja se kreću na taj način, podeljena na tom zajedničkom centru u datom odnosu. Na sličan način, zajednički centar ta dva tela i nekog trećeg tela biće ili u mirovanju ili će se ravnomerno kretati po pravoj liniji, pošto je u tom centru udaljenost između zajedničkog centra ta dva tela i centra onog trećeg, podeljena u datom odnosu. Na isti način, zajednički centar ova tri tela i nekog četvrtog tela je ili u mirovanju ili se ravnomerno kreće po pravim linijama, jer je udaljenost između zajedničkog centra ta tri tela i centra četvrtog takođe podeljen u datom odnosu, i tako u beskonačnost. Zbog toga, u sistemu tela, gde ne postoji nijedna obostrana međusobna akcija, niti bilo koja strana sila deluje na njih i koja se prema tome kreću ravnomerno pravolinijski, zajednički centar gravitacije svih njih je ili u mirovanju ili se kreće ravnomerno pravolinijski.

U sistemu dva tela koja obostrano međusobno deluju, pošto je udaljenost njihovih centara i zajednički centar gravitacije recipročan kao tela, relativna kretanja tih tela, bilo da se približavaju ili udaljavaju od tog centra, biće jednaka među njima. Stoga, budući da su promene koje se dešavaju na kretanjima jednake i usmerene na suprotne delove, zajednički centar ovih tela, putem njihovih obostranih međusobnih akcija, nije ni ubrzan ni usporen, niti trpi bilo kakvu promenu na njegovom stanju kretanja ili mirovanja. Međutim, u sistemu nekoliko tela, zajednički centar gravitacije bilo koja dva tela, koja obostrano međusobno deluju, ne trpi promene u svom stanju putem ove akcije, a još manje trpi zajednički centar gravitacije drugih tela u kojima se ta akcija ne dešava. Međutim, udaljenost između ta dva centra podeljena je zajedničkim centrom gravitacije svih tela na delove koji su recipročno proporcionalni sa ukupnim zbirom tih tela čiji su oni centri, a zbog toga, dok ta dva centra zadržavaju svoja stanja mirovanja ili kretanja, zajednički centar svih takođe zadržava svoje stanje. Jasno je da zajednički

centar svih tela nikad ne trpi promene u stanju svog kretanja ili mirovanja od međusobnih akcija bilo koja dva tela. Međutim, u takvom sistemu, sve međusobne akcije tela ili se dešavaju između dva tela ili su sastavljene od akcija koje smenjuju neka dva tela, i, shodno tome, ona nikad ne stvaraju promene u zajedničkom centru svih na njegovom stanju mirovanja ili kretanja, zbog čega će, pošto je taj centar, kad tela obostrano međusobno ne deluju, ili u stanju mirovanja ili se kreće napred po nekoj pravoj liniji, bez obzira na obostrane međusobne akcije, uvek očuvati svoje stanje, ili mirovanja ili ravnomernog pravolinijskog kretanja, osim ako nije pomeren iz tog stanja nekim dejstvom ili nekom snagom koja deluje spolja na ceo sistem. Zato se ovaj zakon odnosi i na sistem koji se sastoji iz više tela kao i na jedno jedino telo, u odnosu na njihova očuvanja sopstvenih stanja kretanja ili mirovanja. Translatorno kretanje, bilo jednog tela ili celog sistema tela, uvek se procenjuje iz kretanja centra gravitacije.

KOROLAR V

Međusobna kretanja tela koja su sadržana u datom prostoru ista su bez obzira na to da li prostor miruje ili se kreće ravnomerno pravolinijski bez ikakvog kružnog kretanja.

Razlike kretanja, koja nastoje ka istim delovima i zbir onih koja nastoje ka suprotnim delovima, na početku su (pod pretpostavkom) iste u oba slučaja; i iz tog zbira i razlike pojavljuju se sudari i impulsi kojima se tela međusobno sudaraju – iz tog razloga (prema Zakonu II) će efekti tih sudara biti isti u oba slučaja, a obostrana međusobna kretanja tela u jednom slučaju ostati ista sa obostranim međusobnim kretanjima tela u drugom slučaju. Jasan dokaz za ovo nalazimo u eksperimentu sa brodom gde se sva kretanja dešavaju na isti način, bez obzira na to da li brod miruje ili je nošen ravnomerno pravolinijski.

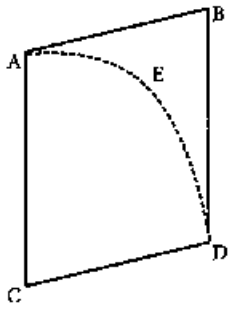
KOROLAR VI

Ukoliko su tela, koja su na bilo koji način međusobno pomerena, podstreknuta u pravcu paralelnih linija pomoću sila ubrzanja, ona će nastaviti međusobno da se kreću na isti način kao da nisu podstreknuta od takvih sila.

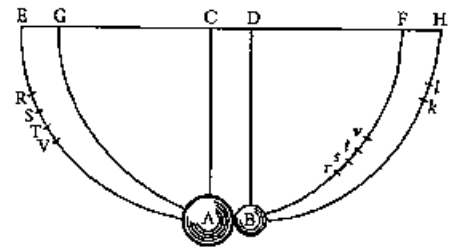
Ove sile koje deluju jednako (u odnosu na veličine tela koja bi trebalo pomeriti) i u pravcu paralelnih linija, pomeriće (prema Zakonu II) sva tela jednako (kao brzine) i zbog toga nikad neće stvoriti nijednu promenu u međusobnom položaju ili kretanju tela.

SHOLIJA

Do sada sam postavio takve principe, koji kao da su dobijeni od matematičara i koji su potvrđeni mnoštvom eksperimenata. Pomoću prva dva zakona i prva dva korolara, Galilej (Galileo Galilei) je otkrio da posmatrana tela koja padaju udvostručuju odnos vremena i da je kretanje projektila bilo po krivi parabole. Iskustvo se slaže sa oba slučaja, osim, sve dok su ova kretanja malo usporena otporom vazduha. Kad telo pada, ravnomerna sila njegove gravitacije, koja deluje jednako, utiče, u jednakim delićima vremena, jednakom silom na telo i zbog toga stvara jednaku brzinu i u celokupnom vremenu deluje celokupna sila i stvara celokupnu brzinu proporcionalnu sa vremenom. A prostori opisani proporcionalnim vremenom isti su kao i brzine i vremena zajedno, tj. u dvostrukom odnosu vremena. A kada se telo baci na gore, njegova ravnomerna gravitacija primenjuje sile i oduzima brzine proporcionalne sa vremenima i vremena podizanja do najvećih visina ista su kao i kad se brzine oduzmu, a te su visine kao i brzine i vremena zajedno, ili su u dvostrukom odnosu brzina. Ako je telo izbačeno u bilo kom pravcu, kretanje koje proizlazi od tog izbacivanja sastavljeno je sa kretanjima koja proizlaze iz njegove gravitacije. Kao kad bi telo A, samo svojim kretanjem od izbacivanja, moglo da opiše, u datom vremenu, pravu liniju AB i kad bi samo svojim kretanjem usled padanja moglo da opiše, u istom vremenu, visinu AC, upotpunjujući paralelogram ABCD i telo će se, tim sastavljenim kretanjem, na kraju vremena naći u tački D, a kriva linija AED, koju to telo opisuje, biće parabola, prema kojoj će prava linija AB biti tangenta u A i čija će ordinata BD biti kvadrat linije AB. Od istih zakona i korolara zavise i one stvari koje su pokazane, a odnose se na vremena oscilovanja klatna i koje su potvrđene svakodnevnim eksperimentima sa satovima sa klatnom. U isto vreme, zajedno sa Zakonom III, ser Kristofer Ren



(Christopher Wren), dr Volis (Johannes Wallis) i gospodin Hajgens (Christiaan Huygens), najveći geometri naših vremena, odredili su nekoliko zakona sudaranja i odbijanja teških tela i otprilike u isto vreme saopštili su svoja otkrića Kraljevskom društvu, precizno se slažući oko tih pravila. Dr Volis je, uistinu, malo ranije objavio otkriće, njega je pratio ser Kristofer Ren i na kraju gospodin Hajgens. Međutim, ser Kristofer Ren je potvrdio istinu pre Kraljevskog društva, pomoću eksperimenta na klatnima, koje je gospodin Mariot (Marriote) ubrzo potom u potpunosti koristio kao podesne u raspravi o tom predmetu. Međutim, da bismo doveli ovaj ekperiment u potpunu saglasnost sa teorijom, moramo uzeti u obzir kako otpor vazduha tako i elastičnu silu tela koja se sudaraju. Neka sferna tela A, B vise na paralelnim i jednakim kanapima AC, BD od centara C, D. Oko tih centara, sa tim intervalima, opisuju polukrugove EAF, GBH, presečene poluprečnicima CA, DB. Prenećemo telo A do bilo koje tačke R na LAP i (udaljavanjem tela B) pustićemo ga odatle. Posle jedne oscilacije pretpostavimo da se vratilo u tačku V. Onda će RV biti usporenje koje proizlazi iz otpora vazduha. Neka ST od ove RV bude četvrtina, koja je smeštena u sredinu, tako da RS i TV mogu biti jednaki, a RS može biti prema ST kao 3 prema 2, i tada će ST predstavljati, veoma blizu, usporavanje tokom opadanja od S do A. Vratićemo telo B na svoje mesto i pretpostavićemo da je telo A ostavljeno da padne od tačke S, a njegova će brzina na mestu odbijanja A, bez osetnijeg odstupanja, biti ista kao i da pada u vakuum od tačke T. Na taj način, ova brzina može se predstaviti užetom luka TA. Ova teorema, dobro poznata geometrima, podrazumeva da brzina tela na klatnu na najnižoj tački jeste uže luka koje je opisalo u svom padanju. Posle odbijanja, pretpostavimo da telo A stiže do mesta *s*, a telo B do mesta *k*. Udaljićemo telo B i naći ćemo mesto *v* iz kog bi se telo A, kad je pušteno, posle jedne oscilacije trebalo vratiti na mesto *r*, gde *st* može biti četvrtina od *rv* i tako smeštena u sredini, ostavljajući *rs* jednakim sa *tv* i neka uže luka *t*A predstavlja brzinu koju je telo A imalo na mestu A odmah nakon odbijanja. Stvarno i tačno mesto *t* biće mesto do kog bi telo



A trebalo da se podiže, ukoliko se otkloni otpor vazduha. Na isti način, ispravićemo mesto *k* do kog se telo B podiže, tako što ćemo pronaći mesto *l* do kog bi se ono trebalo podignuti u vakuumu. I zbog toga sve može biti podvrgnuto eksperimentu na isti način kao da smo stvarno smešteni u vakuumu. Kada se ove stvari urade, trebalo bi uzeti ishod (ako tako mogu da kažem) tela A, pomoću užeta luka TC (koje predstavlja njegovu brzinu), da bismo mogli imati njegovo kretanje u mestu A neposredno pre odbijanja. A onda, pomoću užeta luka *t*A, mogli bismo imati njegovo kretanje u mestu A odmah posle odbijanja. Tako bi trebalo da uzmemo ishod tela B pomoću užeta luka *Bl* kako bismo mogli da imamo njegovo kretanje odmah posle odbijanja. I na sličan način, kada se dva tela zajedno puste sa dva različita mesta, pronaći ćemo njihova kretanja, i pre i posle odbijanja; a potom možemo upoređivati međusobno ova kretanja i prikupiti efekte odbijanja. Zbog toga, pokušavajući ovo sa klatnima od deset stopa, sa nejednakim kao i jednakim telima, i čineći da se tela sudare posle padanja kroz velike prostore, kao što su oni od 8, 12 ili 16 stopa, uvek sam pronalazio, bez greške od 3 inča, da kad se tela zajedno direktno sudare, stvorene su u njihovim kretanjima jednake promene prema suprotnim delovima i, kao posledica, akcija i reakcija uvek su jednake. Kao što je telo A, koje se sudarilo sa telom B, koje miruje, sa 9 delova kretanja, gubeći 7 i nastavljujući posle odbijanja sa 2, telo B je nošeno unazad sa 7 tih delova. Ukoliko se tela sudare sa suprotnim kretanjima, A sa 12 delova kretanja, a B sa 6, tada ako A opadne sa 2 dela, B opada sa 8, sa oduzimanjem 14 delova kretanja na obe strane. Od kretanja A, kome je oduzeto 12 delova, ništa neće ostati. Oduzimajući još 2 dela, kretanje će se stvoriti od 2 dela prema suprotnom pravcu, i tako, od kretanja tela B sa 6 delova, oduzimajući 14 delova, stvoreno je kretanje sa 8 delova u suprotnom pravcu. Međutim, ako se tela kreću na isti način, A, brže, sa 14 delova kretanja, B, sporije, sa 5, posle odbijanja A nastavlja sa 5, a B sa 14 delova, čime je 9 delova premešteno iz A u B. A tako je i u drugim slučajevima. Sastajanjem i sudaranjem tela, količina kretanja, prikupljena od zbira kretanja usmerenih na isti način ili iz razlike onih koji su usmereni na suprotan način, nikad se ne menja. Greška od jednog inča ili dva, prilikom merenja, može se lako pripisati teškoći da se sve izvede sa preciznošću. Nije bilo lako pustiti istovremeno dva klatna tako da bi se dva tela međusobno sudarila na najnižem mogućem mestu AB, niti da se označe mesta

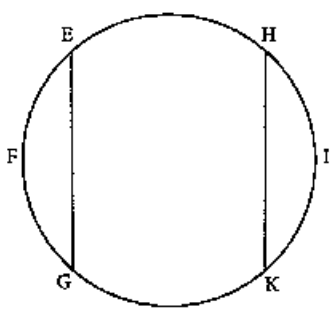
s i *k* do kojih se tela podižu posle sudaranja. Štaviše, pojedine greške se takođe mogu desiti zbog nejednake gustine u samim delovima tela na klatnima i zbog nepravilnosti sadržaja koje nastaju iz drugih uzroka.

Da bismo sprečili prigovore koji bi se možda mogli navesti protiv ovog pravila, za dokaz zbog kog je ovaj eksperiment sproveden, ovo pravilo pretpostavlja da tela nisu apsolutno čvrsta ili da su u najmanju ruku savršeno elastična (budući da se nijedno takvo telo ne može pronaći u prirodi), moram dodati da eksperimenti koje smo opisivali i koji ni na koji način ne zavise od kvaliteta čvrstoće uspevaju kako sa mekim tako i sa čvrstim telima. Ukoliko se pravilo upotrebi na tela koja nisu savršeno čvrsta, možemo samo umanjiti odbijanje u određenoj proporciji kao što zahteva količina elastične sile. Prema teoriji Rena i Hajgensa, apsolutno čvrsta tela se međusobno vraćaju istom brzinom sa kojom su se srela. Međutim, ovo se može potvrditi sa više sigurnosti za tela koja su savršeno elastična. U telima koja su nesavršeno elastična brzina povratka se umanjuje zajedno sa elastičnom silom zato što ta sila (osim kad su delovi tela ulubljeni prilikom njihovog spajanja ili ako trpe svojevrsno rastezanje kao što se dešava prilikom udarca čekićem) jeste (koliko ja mogu da primetim) izvesna i određena i čini da se tela međusobno vrate sa relativnom brzinom, koja je u datom odnosu prema toj relativnoj brzini sa kojom se sreću. Ovo sam isprobao sa loptama od vune koje su čvrsto napravljene i snažno kompresovane. Prvo, puštajući tela na klatnu i mereći njihovo odbijanje, odredio sam količinu njihove elastične sile; potom sam, sudeći prema ovoj sili, procenio odbijanje koje bi se trebalo desiti u drugim slučajevima sastajanja. I sa tim proračunima i drugi eksperimenti koji su posle sprovedeni snažno su se složili; lopte se uvek međusobno udaljavaju sa relativnom brzinom, koja je bila prema relativnoj brzini sa kojom su se srele kao 5 prema 9. Čelične lopte su se vratile skoro istom brzinom; one od plute sa nešto manjom brzinom; dok je sa loptama od stakla proporcija bila oko 15 prema 16. Na taj način je Zakon III, što se tiče sudara i odbijanja, dokazan u teoriji koja je u potpunoj saglasnosti sa iskustvom.

Što se tiče privlačenja, ukratko ću prikazati na ovaj način. Pretpostavimo da je prepreka ubačena kako bi ometala sastajanje bilo koja dva tela A, B, koja se međusobno privlače: onda, ukoliko bi bilo koje od ta dva tela, recimo A, bilo više privučeno prema dru-

gom telu B, nego to telo B prema telu A, prepreka bi jače bila podstreknuta pritiskom tela A nego pritiskom tela B i zbog toga ne bi ostala u ravnoteži. Međutim, jači pritisak će prevagnuti i učiniće da se sistem dva tela, zajedno sa preprekom, direktno kreće prema delovima na kojima se B nalazi; a u slobodnim prostorima, da nastave prema beskonačnosti kretanjem koje se neprekidno ubrzava; što je apsurd i u suprotnosti je sa Zakonom I. Prema Zakonu I, sistem mora da se očuva u svom stanju mirovanja ili ravnomernog pravolinijskog kretanja i zbog toga tela moraju podjednako da pritisnu prepreku i moraju biti podjednako međusobno privlačna. Uradio sam eksperiment sa magnetitom i gvožđem. Ako se oni, odvojeno postavljeni u odgovarajućim posudama, učine da plutaju u stajaćoj vodi, nijedan od njih neće pokrenuti onog drugog. Međutim, pošto se jednako privlače, održavaće međusobne pritiske i na kraju će mirovati u ravnoteži.

Gravitacija između Zemlje i njenih delova je obostrana. Neka se Zemlja FI preseče bilo kojom ravni EG na dva dela EGF i EGI, i njihove međusobne težine biće obostrano jednake. Ukoliko bismo nekom drugom ravni HK, koja je paralelna sa prethodnom EG, presekli najveći deo EGI na dva dela EGKH i HKI, gde je HKI jednak sa delom EFG, prvo presecanje, a očigledno je da je to središnji deo EGKH, neće imati nikakvu sklonost pomoću svoje odgovarajuće težine prema bilo kojoj strani, već će ostati tamo gde jeste, i mirovaće između obe. Međutim, krajnji deo HKI će svom svojom težinom uperiti i pritiskati središnji deo prema drugom krajnjem delu EGF i zbog toga, sila sa kojom EGI, koji je zbir delova HKI i EGKH, teži prema trećem delu EGF, jednaka je težini dela HKI, tj. težini trećeg dela EGF. Zbog toga, težine dva dela, EGI i EGF, jedne prema drugoj, jednake su, kao što sam dokazao. Uistinu, ukoliko te težine nisu jednake, celokupna Zemlja koja pluta u neotpornom *eteru* daće prednost većoj težini i izdvajajući se od nje, biće odnesena u beskonačnost.



Kao što su ta tela ekvipolentna u sudaranju i odbijanju, a čije su brzine recipročne kao njihove sile inercije, tako su u upotrebi mehaničkih instrumenata ti činioci ekvipolentni i obostrano održavaju

međusobne suprotne pritiske, čije su brzine, procenjene prema određivanju sila, recipročne kao i sile.

Te težine sa jednakom silom pomeraju krakove vage koje su tokom kretanja vage recipročne sa brzinama gornjim i donjim; tj. ako je podizanje ili spuštanje direktno, ove težine imaju jednaku silu, koja je recipročna sa udaljenostima tačaka na kojima vise sa ose vage. Međutim, ako su sklonjene sa strane ubacivanjem kosih ravni, ili nekih drugih prepreka, i učinjene da se koso podižu i spuštaju, ova tela će biti ekvipolentna, što je recipročno sa visinama njihovih podizanja i spuštanja uzetih sudeći prema normali, a tako na račun određivanja gravitacije prema dole.

Na sličan način, u čekrku ili u kombinaciji čekrka, sila ruke koja direktno povlači uže, koja se odnosi prema težini, bez obzira da li se podiže direktno ili ukoso, kao brzina normalnog podizanja težine prema brzini ruke koja povlači uže, održavaće težinu.

U satovima i drugim sličnim instrumentima, koji su napravljeni od kombinacija točkova, suprotne sile koje ubrzavaju i ometaju kretanje točkova, ukoliko su recipročne sa brzinama delova točka na koje deluju, međusobno će se održavati.

Sila zavrtnja koja pritiska telo odnosi se prema sili ruke koja drži ručku kojom je on pokrenut, kao kružna brzina ručke, u tom delu na kom deluje ruka, prema progresivnoj brzini zavrtnja prema pritisnutom telu.

Sile kojima klin pritiska ili nosi dva dela drveta koje preseca odnose se prema sili malja na klinu kao progres klina u smeru sile koja deluje na njega maljem, kao brzina kojom delovi drveta ustupaju mesto klinu u smeru linija normalnih sa stranama klina. I isti prikaz trebalo bi da bude dat za sve mašine.

Snaga i upotreba mašina sadrži se samo u tome što smanjenjem brzine možemo povećati silu, i obrnuto. Odavde kod svih odgovarajućih mašina imamo rešenje za ovaj probem: pomeriti datu težinu pomoću date snage, ili pomoću date sile savladati bilo koji dati otpor. Jer, ako su mašine toliko neprirodno skovane da su brzine pokretača i prepreke recipročne njihovim silama, pokretač će samo održavati otpor, dok će ga sa većom razlikom brzine prevazići. Tako da, ako je razlika brzina toliko velika da prevaziđe sav taj otpor koji obično nastaje ili usled trenja dodirnih tela dok klize jedno pored drugog, ili zbog vezanosti spojenih tela koja treba da se razdvoje, ili zbog težine tela koja treba da se podignu, višak sile koja preostaje, nakon što su otpori prevaziđeni, proizvešće ubrzanje

kretanja proporcionalno tome, kako u delovima mašine, tako i u telu koje pruža otpor. Međutim, razmatranje mehanike nije moj trenutni zadatak. Samo mi je bila namera da tim primerima pokažem veliki obim i neizbežnost trećeg Zakona kretanja. Jer, ako procenimo delovanje pokretača na osnovu njegove sile i brzine zajedno, i slično, reakciju prepreke zajedno iz brzina njenih nekoliko delova, i na osnovu sila otpora koje potiču od trenja, veza, težine i ubrzanja tih delova, akcija i reakcija će uvek biti jednake pri upotrebi svih vrsta mašina. Ali, kako se akcija prenosi putem posrednih instrumenata, i na kraju prenosi na telo koje pruža otpor, konačna određena akcija će uvek biti suprotna od određene reakcije.

KNJIGA I

O KRETANJU TELA

ODELJAK I

O metodi prvih i poslednjih odnosa veličina, pomoću kojih dokazujemo propozicije koje slede

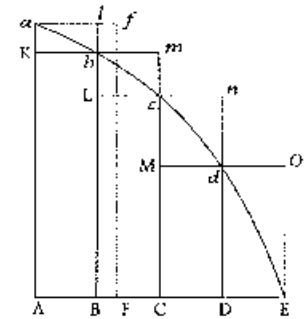
LEMA I

Veličine i odnosi veličina, koje u bilo kom konačnom vremenu neprekidno streme ka jednakosti, kad se, pre kraja tog vremena, međusobno približe, bez obzira na bilo koju datu razliku, konačno postaju jednake.

Ukoliko se ovo poriče, pretpostavimo da su one krajnje nejednake, i neka D bude njihova krajnja razlika. Zbog toga ne mogu prići bliže jednakosti osim pomoću te date razlike D, a to je u suprotnosti sa pretpostavkom.

LEMA II

Ukoliko u bilo koju figuru A*ac*E, ograničenu pravim linijama A*a* i AE i krivom *ac*E, ucrtamo bilo koji broj paralelograma A*b*, B*c*, C*d*, itd., obuhvaćeni jednakim osnovama AB, BC, CD, itd. i stranama B*b*, C*c*, D*d*, itd., koje su paralelne sa jednom stranom figure, A*a*, upotpunjeni su paralelogrami *a*K*bl*, *b*L*cm*, *c*M*dn*, itd. Zatim, ako pretpostavimo da se širina tih paralelograma umanjuje, a njihov broj uvećava do beskonačnosti, kažem da su



krajnji odnosi, koje međusobno imaju ucrtana figura AK*bl*,*c*M*d*D, opisana figura A*albmendo*E i krivolinijska figura A*abcd*E, odnosi jednakosti.

Razlika ucrtanih i opisanih figura jeste zbir paralelograma K*l*, L*m*, M*n*, D*o* (zbog jednakosti svih njihovih osnova), tj. pravougaonika koji se nalazi na jednoj njihovoj osnovi K*b* i zbira njihovih visina A*a*, tj. pravougaonik Ab*la*. Međutim, ovaj pravougaonik, zbog pretpostavljenog beskonačnog umanjenja njegove širine AB, postaje manji od bilo kog datog prostora. I zbog toga (prema Lemi I), ucrtane i opisane figure postaju međusobno krajnje jednake i još će i u mnogo većoj meri središnja krivolinijska figura biti krajnje jednaka sa bilo kojom od njih. Q.E.D.

LEMA III

Isti krajnji odnosi jesu takođe i odnosi jednakosti kada su širine paralelograma AB, BC, DC, itd. nejednake i kada se sve beskonačno umanjuju.

Pretpostavimo da je AF jednaka najvećoj širini i da se na njoj nalazi paralelogram FA*af*. Ovaj paralelogram će biti veći od razlike ucrtanih i opisanih figura. Međutim, pošto se širina AF beskonačno umanjuje, postaće manji od bilo kog datog pravougaonika. Q.E.D.

Kor. 1. Odavde, krajnji zbir tih beskonačno malih paralelograma poklapaće se u svim delovima sa krivolinijskom figurom.

Kor. 2. Još će se i u većoj meri pravolinijska figura, ograničena tetivama beskonačno malih lukova *ab*, *bc*, *cd*, itd., krajnje poklapati sa krivolinijskom figurom.

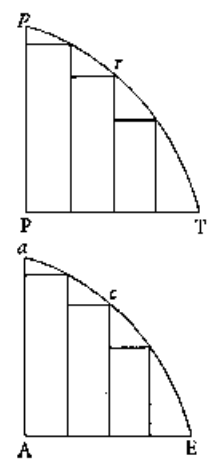
Kor. 3. Takođe, to se odnosi i na opisanu pravolinijsku figuru ograničenu tangentama istih lukova.

Kor. 4. A zbog toga ove krajnje figure (u odnosu na njihove obime E) nisu pravolinijske, već su krivolinijske granice pravolinijskih figura.

LEMA IV

Ako u dvema figurama, A*ac*E, P*pr*T, ucrtamo (kao što je gore navedeno) dva reda paralelograma, sa jednakim brojem u svakom redu, i kada se njihove širine beskonačno umanjuju, krajnji odnosi paralelograma u jednoj figuri sa paralelogramima u drugoj figuri, svaki sa svakim određenim redom, jesu jednaki. Tvrdim da su ove dve figure, A*ac*E, P*pr*T, međusobno u tom istom odnosu.

Pošto paralelogrami u jednoj figuri odgovaraju P paralelogramima u drugoj, tako i (po sastavu) zbir svih u jednoj odgovara zbiru svih u drugoj, kao i jedna figura drugoj, jer su (prema Lemi III) prethodna figura sa prethodnim zbirom i poslednja figura sa poslednjim zbirom u odnosu jednakosti. Q.E.D.



Kor. Ukoliko su dve veličine, bilo koje vrste, na bilo koji način, podeljene na jednak broj delova, a ti delovi, kada je njihov broj uvećan i njihova vrednost beskonačno umanjena, imaju dat međusobni odnos, prvi prema prvom, drugi prema drugom i tako dalje redom, a celokupne veličine međusobno će biti u tom istom datom odnosu. Ukoliko su, u figurama ove leme, paralelogrami međusobno dati kao odnosi njihovih delova, zbir delova uvek će biti jednak zbiru paralelograma i zbog toga, ako pretpostavimo da se broj paralelograma i delova povećava, a da se njihove vrednosti beskonačno umanjuju, ti zbirovi će biti u krajnjem odnosu paralelograma u jednoj figuri sa odgovarajućim paralelogramom u drugoj figuri (prema pretpostavci), tj. biće u krajnjem odnosu bilo kog dela jedne veličine sa odgovarajućim delom druge.

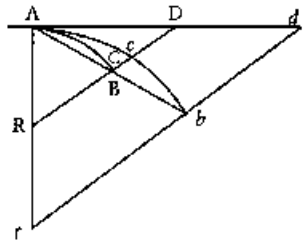
LEMA V

U sličnim figurama, sve vrste homolognih strana, bilo da su krivolinijske ili pravolinijske, jesu proporcionalne dok su površine proporcionalne kvadratima homolognih strana.

LEMA VI

Ukoliko je bilo koji luk ACB dat u određenom položaju, zategnut svojom tetivom AB, i ukoliko bilo koju tačku A, u sredini neprekidne krive, dodiruje prava linija AD, ona produžava na obe strane. Onda,

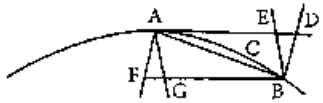
ako se tačke A i B međusobno približavaju i susreću, tvrdim da će se ugao BAD, koji je sadržan između tetive i tangente, beskonačno umanjivati i da će na kraju nestati.



Ukoliko taj ugao ne nestane, luk ACB će sadržati, zajedno sa tangentom AD, ugao jednak sa pravolinijskim uglom; i zbog toga se kriva na tački A neće nastaviti, a to je u suprotnosti sa pretpostavkom.

LEMA VII

Prema takvim istim pretpostavkama, tvrdim da je krajnji odnos luka, tetive i tangente, jednih prema drugima, u odnosu jednakosti.



Kada se tačka B približava tački A, uvek ćemo smatrati AB i AD kao produžetke do udaljenih tačaka b i d, a paralelno sa sečicom BD povlačimo *bd*. Neka luk A*cb* bude uvek sličan luku ACB. Onda će, prema prethodnoj lemi i pod pretpostavkom da se tačke A i B poklapaju, ugao *dAb* nestati, zbog čega će prave linije A*b*, A*d* (koje su uvek konačne) i središnji luk A*cb* da se poklapaju i međusobno će postati jednaki. Iz tog razloga će prave linije AB, AD, i središnji luk ACB (koji je uvek proporcionalan sa prethodnim) nestati i, konačno, zadobiće odnos jednakosti. Q.E.D.

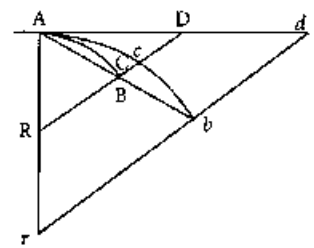
Kor. 1. Ako kroz B povučemo BF paralelno sa tangentom, uvek presecajući bilo koju pravu liniju AF koja prolazi od A do tačke F, ta će linija BF na kraju biti u odnosu jednakosti sa trenutnim lukom ACB, jer je, dopunjavajući paralelogram AFBD, ta linija uvek u odnosu jednakosti sa AD.

Kor. 2. Ako se kroz B i A povuku još neke prave linije, kao što su BE, BD, AF, AG, presecajući tangentu AD i njenu paralelu BF, krajnji odnos svih apscisa AD, AE, BF, BG, kao i tetive i luka AB, jednih prema drugima, biće odnos jednakosti.

Kor. 3. Zbog toga, u svim našim rasuđivanjima o krajnjim odnosima, možemo slobodno koristiti bilo koju takvu liniju umesto bilo koje druge.

LEMA VIII

Ukoliko prave linije AR, BR, sa lukom ACB, tetivom AB i tangentom AD, čine tri trougla RAB, RACB, RAD, a tačke A i B se približavaju i sreću, tvrdim da je krajnji oblik ovih trenutnih trouglova sličan i da je njihov krajnji odnos, odnos jednakosti.



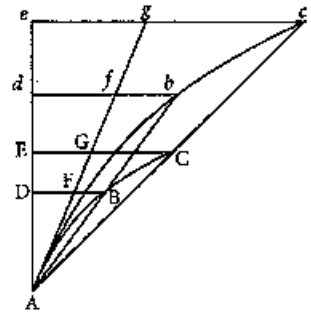
Kada se tačka B približava tački A, uvek ćemo smatrati AB, AD, AR kao produžetke do udaljenih tačaka *b*, *d* i *r*, a *rbd* kao povučenu paralelu sa RD, i neka luk A*cb* bude uvek sličan sa lukom ACB. Onda, pod pretpostavkom da se tačke A i B poklapaju, ugao *bAd* će nestati, a zbog toga će se i tri trougla *rAb*, *rAcb*, *rAd* (koji su uvek konačni) poklapati, a usled toga će postati i slični i jednaki. Stoga će i njima slični i proporcionalni trouglovi RAB, RACB, RAD konačno postati međusobno i slični i jednaki. Q.E.D.

Kor. Zbog toga, usled svog rasuđivanja o krajnjim odnosima, možemo ravnodušno koristiti bilo koji od ovih trouglova umesto bilo kog drugog.

LEMA IX

Ako se prava linija AE i zakrivljena linija ABC, obe date prema položaju, presecaju pod datim uglom A, i na tu pravu liniju, u drugom datom uglu, BD, CE su ordinatno postavljene, sreću se na krivoj B, C, a tačke B i C međusobno se približavaju i sreću u tački A – tvrdim da će površine trouglova ABD, ACE konačno međusobno odnositi kao kvadrati strana.

Kada se tačke B, C, približavaju tački A, uvek ćemo pretpostaviti da je AD produžetak do udaljenih tačaka *d* i *e*, tako da A*d*, A*e* mogu biti proporcionalne sa AD i AE i pretpostavićemo da su ordinate *db*, *ec* povučene paralelno sa ordinatama DB i EC tako da seku AB i AC koje su produžene u tačkama *b* i *c*. Neka je kriva A*bc* slična krivi ABC, i neka se povuče prava linija A*g* tako da dodiruje obe krive u tački A, i neka se preseku ordinate DB, EC, *db*, *ec* na F, G, *f*, *g*. Onda, pod pretpostavkom da dužina A*e* ostaje ista, neka



se tačke B i C sretnu u tački A; ugao *cAg* će nestati, a zakrivljene oblasti *Abd*, *Ace* će se poklapati sa pravolinijskim oblastima *Afd*, *Age*; i zbog toga će se (prema Lemi V) međusobno odnositi kao kvadrati strana *Ad* i *Ae*. Međutim, oblasti ABD i ACE uvek su proporcionalne sa tim oblastima kao što su proporcionalne sa tim stranama i strane AD i AE. I zbog toga se, na kraju, oblasti ABD i ACE međusobno odnose kao kvadrati strana AD i AE. Q.E.D.

LEMA X

Prostori, koje telo opisuje pomoću bilo koje konačne sile koja ga pokreće, bez obzira na to da li je ta sila određena i nepromenljiva, ili se neprekidno povećava ili neprekidno smanjuje, na samom početku kretanja međusobno su proporcionalni sa kvadratima vremena.

Neka su vremena predstavljena linijama AD i AE, a brzine stvorene u tim vremenima pomoću ordinata DB i EC. Prostori opisani tim brzinama biće kao i prostori ABD i ACE koji su opisani tim ordinatama, tj. na samom početku kretanja (prema Lemi IX) biće proporcionalni sa kvadratima vremena AD i AE. Q.E.D.

Kor. 1. Odatle je lako zaključiti da su odstupanja tela, koja opisuju slične delove sličnih figura u proporcionalnim vremenima, približna sa kvadratima vremena u kojima su stvorena. Ako je tako, ta odstupanja su stvorena bilo kojom jednakom silom koja se slično primenjuje na telima i merena su pomoću udaljenosti tela od onih mesta koja zauzimaju slične figure, na kojima bi se, bez delovanja tih oblika, tela pojavila u tim proporcionalnim vremenima.

Kor. 2. Međutim, odstupanja koja su stvorena pomoću proporcionalnih sila, i koja se slično primenjuju na sličnim delovima tela sličnih figura, proporcionalna su sa tim silama i kvadratima vremena.

Kor. 3. Isto se podrazumeva za bilo koji prostor koji je opisan telima koja pokreću različite sile, od kojih su svi, na samom početku kretanja, proporcionalni sa silama i kvadratima vremena.

Kor. 4. Zbog toga su sile direktno proporcionalne sa prostorima opisanih na samom početku kretanja, a obrnuto proporcionalne sa kvadratima vremena.

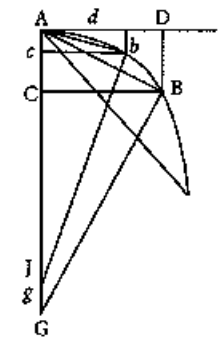
Kor. 5. A kvadrati vremena su direktno proporcionalni sa opisanim prostorima, a obrnuto proporcionalni sa silama.

SHOLIJA

Ukoliko se, u međusobnom poređenju neodređenih veličina različitih vrsta, za bilo koju kaže da je direktno ili obrnuto proporcionalna sa drugom, to znači da je prva povećana ili umanjena za isti odnos kao i druga, ili je u odnosu reciprociteta. I ukoliko se za bilo koju veličinu kaže da je direktno ili obrnuto proporcionalna sa dve ili više veličina, to znači da je prva povećana ili umanjena u odnosu koji je se sastoji iz odnosa u kojima su druge veličine, ili recipročno sa drugim, povećane ili umanjene. Ako se kaže da je A direktno proporcionalno sa B i C, a obrnuto proporcionalno sa D, to znači da je A povećano ili umanjeno u istom odnosu kao i $B \times C \times \frac{1}{D}$, tj. A i $\frac{BC}{D}$ nalaze se međusobno u datom odnosu.

LEMA XI

Prolazna sečica dodirnog ugla, na svim krivim koje u dodirnoj tački imaju konačnu zakrivljenost, na kraju je duplikat odnosa sečica odgovarajućeg luka.



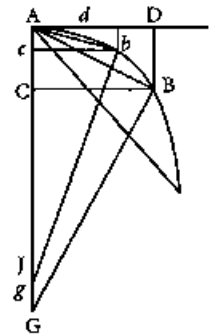
Slučaj 1. Neka je AB taj luk, AD njegova tangenta, BD je sečica dodirnog ugla normalna na tangentu, AB sečica luka. Nacrtajmo BG normalno na sečicu AB, i AG na tangentu AD, tako da se spajaju u G. Zatim pustimo da se tačke D, B, i G, približavaju tačkama *d*, *b* i *g*, i neka je J konačna tačka preseka linija BG, AG, kada tačke D, B, dođu u A. Jasno je da rastojanje GJ može biti manje od bilo kog dodeljenog. Ali (iz prirode krugova koji prolaze kroz tačke A, B, G, A, *b*, *g*) $AB^2 = AG \times BD$ i $A^2 = Ag \times bd$ i stoga je odnos AB^2 prema Ab^2 sastavljen od odnosa AG prema *Ag*, i od B*d* prema *bd*. Ali pošto GJ može biti kraće od bilo koje dodeljive dužine, odnos AG prema *Ag* može biti takav da se razlikuje od odnosa jednakosti za manje od bilo koje dodeljive

razlike. Stoga odnos AB^2 prema Ab^2 može biti takav da se razlikuje od odnosa BD prema *bd* za manje od bilo koje dodeljive razlike. Stoga je, prema Lemi I, konačan odnos AB^2 prema Ab^2 jednak konačnom odnosu BD prema *bd*. Q.E.D.

Slučaj 2. Sada, neka BD bude zakrivljeno u odnosu na AD pod bilo kojim datim uglom. Krajnji odnos BD prema *bd* će uvek biti isti, pa prema tome isti kao i odnos AB^2 prema Ab^2. Q.E.D.

Slučaj 3. Ako pretpostavimo da ugao D nije dat, već da se prava linija BD spaja u datoj tački, ili je određena bilo kojim drugim uslovom, i pored toga će uglovi D i *d*, podređeni istom zakonu, uvek stremiti blizu jednakosti i približavaće se međusobno, bez obzira na bilo koju naznačenu razliku, i zbog toga će, prema Lemi I, na kraju postati jednaki. Prema tome su linije BD i *bd* u istom međusobnom odnosu kao i ranije. Q.E.D.

Kor. 1. U vezi s tim, pošto tangente AD i A*d*, lukovi AB i A*b* i njihovi sinusi BC i *bc* postaju na kraju jednaki sa tetivama AB i A*b*, odnos njihovih kvadrata na kraju će postati jednak odnosu sečica BD i *bd*.



Kor. 2. Odnos njihovih kvadrata na kraju je jednak odnosu sinus versusa lukova, koji presecaju tetive na pola i spajaju se u datoj tački. Jer ti su sinusi versusi proporcionalni sečicama BD i *bd*.

Kor. 3. Stoga je sinus versus proporcionalan sa kvadratom vremena za koje će telo opisati luk datom brzinom.

Kor. 4. Pravolinijski trouglovi ADB i A*db* na kraju su proporcionalni sa stranama AD i A*d* na kub, a sa stranama DB i *db* kao seskviplikat $\left(\frac{DB}{db}\right)^{\frac{3}{2}}$, kao što je odnos sastavljen od strana AD prema D*b* i od strana A*d* prema *db*. Tako su, takođe, trouglovi ABC i A*bc* na kraju proporcionalni sa stranama BC i *bc* na kub. Ono što ja nazivam odnosom seskviplikata, to je subduplikat triplikata, pošto je sastavljen od prostog i subduplikatnog odnosa.

Kor. 5. Pošto su DB i *db* na kraju paralelni i proporcionalni sa kvadratom linija AD i A*d*, krajnje krivolinijske oblasti ADB i A*db* činiće (po prirodi parabole) dve trećine pravolinijskih trouglova ADB i A*db*, a segmenti AB i A*b* činiće jednu trećinu tih istih trouglova. A te oblasti i ti segmenti biće proporcionalni sa kubom tangenti AD i A*d*, kao i tetiva i lukova AB i A*b*.

SHOLIJA

Sve dosad pretpostavljali smo da dodirni ugao nije ni beskonačno veći ni beskonačno manji od dodirnih uglova krugova i njihovih tangenti, tj. da zakrivljenje u tački A nije ni beskonačno malo, ni beksonačno veliko, odnosno da interval AJ ima konačnu vrednost. Zaista, DB može se razmatrati kao AD^3: u tom slučaju nijedan krug se ne može opisati kroz tačku A, između tangente AD i krive AB, zato što bi dodirni ugao bio beskonačno manji od dodirnog ugla tog kruga. I, prema sličnom rasuđivanju, ukoliko bi DB bilo proporcionalno sa AD^4, AD^5, AD^6, AD^7, itd. imali bismo beskonačni niz dodirnih uglova, od kojih je svaki sledeći beskonačno manji od prethodnog. Ukoliko bi DB bilo proporcionalno sa AD^2, $AD^{3/2}$, $AD^{4/3}$, $AD^{5/4}$, $AD^{6/5}$, AD^7, itd. imali bismo još jedan beskonačni niz dodirnih uglova, od kojih bi prvi bio iste vrste kao i dodirni uglovi krugova, drugi bi bio beskonačno veći, a svaki sledeći beskonačno veći od prethodnog. Međutim, između bilo koja dva ovakva ugla možemo uključiti druge beskonačne nizove središnjih dodirnih uglova, od kojih bi svaki sledeći ugao bio beskonačno veći ili beskonačno manji od prethodnog. Tako, između AD^2 i AD^3 možemo uključiti nizove $AD^{13/6}$, $AD^{11/5}$, $AD^{9/4}$, $AD^{7/3}$, $AD^{5/2}$, $AD^{8/3}$, $AD^{11/4}$, $AD^{14/5}$, $AD^{17/6}$, itd. Dalje, između bilo koja dva ugla ovih nizova, možemo uključiti novi niz središnjih dodirnih uglova, koji se međusobno razlikuju po beskonačnim intervalima. Niti je priroda omeđena ikakvim granicama.

Stvari koje su prikazane u vezi sa krivim linijama i površinama koje one obuhvataju, mogu se lako primeniti na zakrivljene površine i sadržaje čvrstih tela. Leme su pretpostavljene kako bi se izbegla zamornost izvođenja zbunjujućih dokaza *ad absurdum* na osnovu metoda starih geometara. Prikazi su sažetiji pomoću metode nedeljivih. Međutim, pošto hipoteza o nedeljivosti izgleda unekoliko gruba, pa je zbog toga taj metod ocenjen kao manje geometrijski, radije odabiram da svedem prikaze koje prate propozicije na prve i poslednje sume i na odnose nastajućih i beskonačno malih veličina, tj. na granice tih suma i odnosa, pa i pretpostavljam, što je kraće moguće, prikaze tih granica. Zbog toga je izvođenje isto kao i kod metode nedeljivih, a pošto su ti principi prikazani, možemo ih koristiti sa većom sigurnošću. Zbog toga, ukoliko se desi da ubuduće smatram veličine kao stvorene iz čestica, ili ako koristim male krive linije umesto pravih linija, ne treba shvatiti

da pod tim mislim nedeljivost, već beskonačno male deljive veličine; ne sume i odnose određenih delova, već uvek granice suma i odnosa; kao i da sila takvih prikaza uvek zavisi od metoda koje su izložene u prethodnim lemama.

Možda bi se moglo prigovoriti da ne postoji krajnja proporcija beskonačno malih veličina, jer proporcija nije krajnja pre nego što veličine iščeznu, a kada iščeznu, tada je ni nema. Međutim, pomoću istog argumenta može se tvrditi da telo koje stiže na određeno mesto i tamo se zaustavlja nema krajnju brzinu: jer brzina, pre nego što telo stigne na to mesto, nije njegova krajnja brzina, a kada se zaustavi, telo ni nema brzinu. Ipak, odgovor je jednostavan: pod krajnjom brzinom podrazumeva se brzina kojom je telo pokrenuto, a ne brzina pre nego što telo stigne na određeno mesto i kretanje prestane, niti posle toga, već upravo brzina prilikom samog stizanja na određeno mesto; tj. brzina kojom telo stiže na odredište i kojom telo prestaje da se kreće. Slično tome, pod krajnjim odnosima beskonačno malih veličina treba podrazumevati odnose veličina, ne pre nego što iščeznu, niti posle toga, već pri kojim iščezavaju. Na sličan način, prvi odnos nastajućih veličina je onaj kojim one postaju. A prva ili poslednja suma je ona kojom one postaju ili prestaju da budu (ili bivaju uvećane ili umanjene). Postoji granica koju brzina na kraju kretanja može dostići, ali ne i prevazići. To jeste krajnja brzina. Slična granica postoji u svim veličinama i proporcijama koje postaju ili prestaju da budu. Pošto su takve granice izvesne i jasne, njihovo određivanje je strogo geometrijski problem. Šta god da je geometrijsko, može nam biti dozvoljeno da koristimo prilikom određivanja i prikazivanja bilo kojih drugih stvari koje su isto tako geometrijske.

Takode se može prigovoriti da, ukoliko su dati krajnji odnosi beskonačno malih veličina, i njihove krajnje veličine će biti date, pa će se tako sve veličine sastojati iz nedeljivih, što je u suprotnosti sa onim što je Euklid pokazao u knjizi X svojih *Elemenata*, a što se tiče nesamerljivih veličina. Međutim, ovaj prigovor je zasnovan na pogrešnoj pretpostavci. Oni krajnji odnosi pri kojima veličine iščezavaju nisu uistinu odnosi krajnjih veličina, već granice u kojima uvek konvergiraju odnosi veličina koji se smanjuju bez granica i kojima oni prilaze bliže nego bilo kojom datom razlikom, ali je nikad ne prelaze, niti, u suštini, to mogu da postignu, sve dok se veličine ne umanje u *in infinitum*. Sve ovo je očiglednije na ve-

ličinama koje su beskonačno velike. Ukoliko se dve veličine, sa datom razlikom, uvećaju *in infinitum*, krajnji odnos ovih veličina biće dat, tj. odnos jednakosti, ali iz toga ne sledi da će krajnje ili najveće veličine, čiji je to odnos, i same biti date. Stoga, u onome što sledi, zbog lakše razumljivosti, ukoliko pomenem veličine kao što su poslednje ili beskonačno male ili krajnje, ne treba pod time podrazumevati veličine koje su određene, već one koje se stalno umanjuju bez kraja.

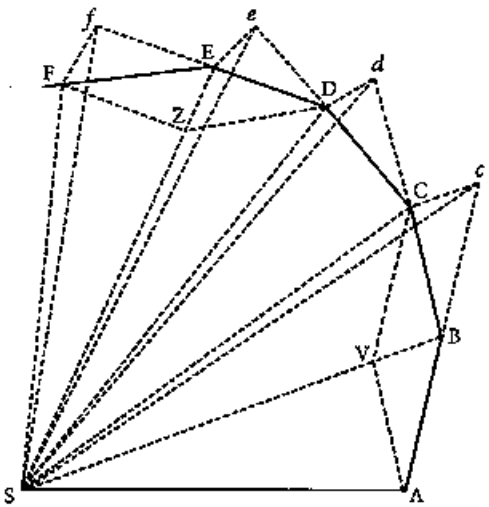
ODELJAK II

O pronalasku centripetalnih sila

PROPOZICIJA I. TEOREMA I

Površine, koje tela, koja se okreću, opisuju poluprečnicima povučenim ka nepokretnom centru sile, leže u istoj nepokretnoj ravni, i proporcionalne su sa vremenima u kojima su opisana.

Pretpostavimo da je vreme podeljeno na jednake delove, i neka u prvom delu tog vremena telo, pomoću sile inercije, opisuje pravu liniju AB. U drugom delu tog vremena, isto bi telo (prema Zakonu I), ukoliko se ne ometa, nastavilo direktno prema *c*, putem linije B*c* jednake sa AB, tako da bi se, pomoću poluprečnika AS, BS i *c*S, povučenih prema centru, mogle opisati jednake površine ASB i BS*c*. Međutim, kada se telo približi tački B, pretpostavimo da odjednom na njega deluje centripetalna sila sa velikim impulsom, usled čega telo ne nastavlja kretanje po pravoj liniji B*c*, već je primorano da se kreće po pravoj liniji BC. Ako povučemo *c*C paralelno sa BS susretajući se sa BC u tački C, na kraju drugog dela vreme-



na, telo će se (prema Kor. zakona) naći u tački C, u istoj ravni sa trouglom ASB. Spajajući SC, pošto su SB i Cc paralelne, trougao SBC biće jednak trouglu SB, a zbog toga jednak i trouglu SAB. Sličnim argumentom, ukoliko centripetalna sila neprekidno deluje na C, D, E, itd. i čini da telo, u svakom pojedinačnom deliću vremena, opisuje prave linije CD, DE, EF, itd. onda će se svi nalaziti u istoj ravni i trougao SCD biće jednak trouglu SBC, trougao SDE trouglu SCD, a SEF trouglu SDE. Zbog toga, u jednakim vremenima, jednake površine opisane su u jednoj nepokretnoj ravni: i, prema slaganju, bilo koje sume, SADS, SAFS, tih površina, u međusobnom su odnosu kao i vremena u kojima su opisana. Sada, neka se broj tih trouglova povećava, dok se njihova širina umanjuje *in infinitum*. Prema Kor. 4, Leme III njihov krajnji obim ADF biće kriva linija i zbog toga će centripetalna sila, kojom se telo neprekidno odvlači od tangente ove krive, delovati neprekidno; i, bilo koje opisane površine SADS, SAFS, koje su uvek proporcionalne sa vremenima opisivanja, biće i u ovom slučaju, takođe, proporcionalne sa tim vremenima. Q.E.D.

Kor. 1. Brzina tela koje je privučeno prema nepokretnom centru, u prostorima bez otpora, recipročna je sa dužinom normale koja pada od tog centra na pravu liniju koja dodiruje orbitu. Brzine u tačkama A, B, C, D i E proporcionalne su sa osnovama AB, BC, CD, DE i EF jednakih trouglova, a te osnove recipročne su sa normalama koje padaju na njih.

Kor. 2. Ako tetive, AB i BC, dva luka, neprekidno opisane u jednakim vremenima istim telom, u mestima bez otpora, sačinjavaju paralelogram ABCV, i ako je povučena dijagonala BV ovog paralelograma, u poziciji koju krajnje zadobija kada su ti lukovi umanjeni *in infinitum*, proći će kroz centar sile.

Kor. 3. Ako tetive, AB, BC i DE, EF, lukova, koje su opisane u jednakim vremenima i u prostorima bez otpora, sačinjavaju paralelograme ABCV i DEFZ, onda se sile, koje deluju na tačke B i E, međusobno nalaze u krajnjem odnosu dijagonala BV i EZ, kada se ti lukovi umanjuju *in infinitum*. Kretanja, BC i EF, tela, sastavljena su (prema Kor. Zakona I) iz kretanja Bc, BV i Ef, EZ. Međutim, BV i EZ, koja su jednaka sa Cc i Ff u prikazu ove Propozicije, stvorena su pomoću impulsa centripetalne sile u B i E, pa su zbog toga proporcionalna sa tim impulsima.

Kor. 4. Sile pomoću kojih su tela, u prostorima bez otpora, povučena od svojih pravolinijskih kretanja i navedena na krivolinijske orbite, u međusobnom su odnosu kao sinusi versusi lukova opisanih u jednakim vremenima. Sinusi versusi teže ka centru sile i presecaju tetive na dva dela kada su ti lukovi umanjeni *in infinitum*. Ti sinusi versus polovina su dijagonala pomenutih u Kor. 3.

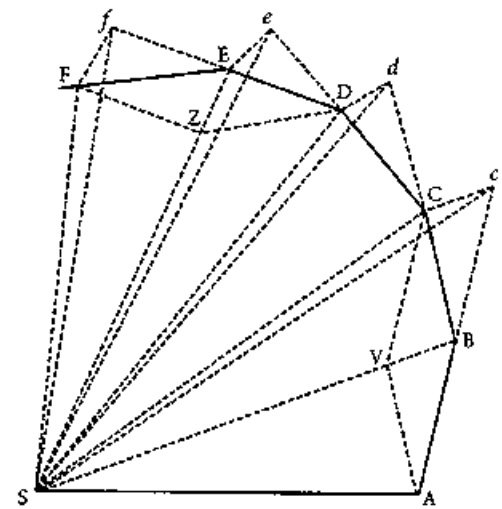
Kor. 5. Stoga se te sile odnose prema sili gravitacije kao i navedeni sinusi versus prema sinusima versus koji su normalni u odnosu na horizont onih paraboličkih lukova koje projektili opisuju u isto vreme.

Kor. 6. I sve izloženo može se primeniti (prema Kor. 5 Zakona) kada ravni, u kojima se tela kreću zajedno sa centrima sila koji su smešteni u tim ravnima, ne miruju, već se kreću ravnomerno pravolinijski.

PROPOZICIJA II. TEOREMA II

Svako telo koje se kreće po bilo kojoj krivoj liniji, opisanoj u ravni, i koje je duž pravca poluprečnika privučeno prema tački koja je, ili nepokretna ili se kreće napred ravnomerno pravolinijski, opisuje oko te tačke površine koje su proporcionalne sa vremenima, i to je telo pod dejstvom centripetalne sile koja je usmerena ka toj tački.

Slučaj I. Svako telo koje se kreće po krivoj liniji, odstupa (prema Zakonu I) sa pravolinijskog puta pomoću delovanja neke sile na njega. I ta sila, kojom telo odstupa od svoje pravolinijske putanje i koje opisuje, u jednakim vremenima jednake veoma male trouglove SAB, SBC, SCD, itd. oko nepokretne tačke S (prema Prop. XL, Knjige I, Elem. i prema Zakonu II) deluje u tački B, u pravcu linije koja je paralelna sa *c*C, tj. u pravcu linije BS, i u tački C, u pravcu linije koja je paralelna sa *d*D, tj. u pravcu linije



CS, itd.; i zbog toga uvek deluje u pravcu linija koje teže ka nepokretnoj tački S. Q.E.D.

Slučaj 2. Prema Kor. 5 i zakonima, nevažno je da li su površine na kojima telo opisuje krivolinijsku figuru nepokretne ili se kreću zajedno sa telom – opisana figura i njena tačka S nastavljaju napred ravnomerno pravolinijski.

Kor. 1. U neotpornim prostorima ili u sredinama, ukoliko površine nisu proporcionalne sa vremenima, sile nisu usmerene na tačku u kojoj se poluprečnici dodiruju već odatle skreću *direktno*, ili ka delovima prema kojima je usmereno kretanje, ako je opis površina ubrzan, a *retrogradno*, ako je opis usporen.

Kor. 2. Čak i u otporima sredina, ukoliko je opis površina ubrzan, pravci sila skreću od tačke u kojoj se poluprečnici sreću prema delovima kojima teži kretanje.

SHOLIJA

Na telo može delovati centripetalna sila koja se sastoji iz nekoliko sila. U tom slučaju, propozicija podrazumeva da sila koja je rezultat svih teži ka tački S. Međutim, ako bilo koja sila neprekidno deluje u pravcu linija koje su normalne na opisanu površinu, ta će sila uticati da telo skrene sa ravni svog kretanja, ali pritom neće ni povećati ni smanjiti veličinu opisane površine, pa se zbog toga može zanemariti prilikom slaganja sila.

PROPOZICIJA III. TEOREMA III

Svako telo, koje je duž poluprečnika povučeno prema centru drugog tela, ma kako da se kreće, opisuje površine oko tog centra proporcionalno sa vremenima i na njih deluje sila koja se sastoji iz centripetalne sile koja teži ka tom drugom telu i iz potpune sile ubrzanja koja deluje na to drugo telo.

Neka L predstavlja jedno telo, a T drugo (prema Kor. 6 Zakona). Ako su oba tela podstreknuta u pravcu paralelnih linija, pomoću nove sile koja je jednaka ali suprotna onoj koja deluje na drugo telo T, prvo telo L će nastaviti da opisuje oko drugog tela T iste oblasti kao i ranije. Međutim, sila, koja je delovala na drugo telo T, sada će biti uništena jednakom ali suprotnom silom. Zbog toga će (prema Zakonu I) to drugo telo, pošto je prepušteno sa-

mom sebi, ili mirovati, ili će se kretati ravnomerno pravolinijski, a prvo telo L, na koje deluje razlika sila, tj. sila koja je preostala, nastaviće da opisuje oko drugog tela T površine koje su proporcionalne sa vremenima. I zbog toga je (prema Teoremi II) razlika sila usmerena ka drugom telu T kao prema svom centru. Q.E.D.

Kor. 1. Otada, ako jedno telo L, duž pravca poluprečnika privučeno drugom telu T, opisuje površine koje su proporcionalne sa vremenima, i ako iz celokupne sile, koja deluje na prvo telo L (bez obzira na to da li je ta sila jednostavna, ili je, sudeći prema Kor. 2 Zakona, sastavljena iz nekoliko sila, mi oduzimamo (prema istoj Kor.) celokupnu silu ubrzanja koja deluje na drugo telo. Celokupna preostala sila, koja deluje na prvo telo, težiće ka drugom telu T, kao prema centru.

Kor. 2. Ukoliko su te površine skoro proporcionalne sa vremenima, onda će preostala sila težiti veoma blizu drugom telu T.

Kor. 3. I *vice versa*, ako preostala sila teži da bude veoma blizu drugom telu T, ta će površina biti skoro proporcionalna sa vremenima.

Kor. 4. Ako telo L, duž pravca poluprečnika povučenim ka drugom telu T, opisuje površine koje su, u poređenju sa vremenima, veoma nejednake, i ako to drugo telo T ili miruje ili se kreće ravnomerno pravolinijski, onda ili nema uopšte delovanja centripetalne sile, koja teži ka drugom telu T, ili je izmešana i sastavljena iz veoma snažnih delovanja drugih sila, a celokupna sila, koja se sastoji iz svih tih sila, ukoliko ih ima više, usmerena je ka drugom (pokretnom ili nepokretnom) centru. Isto dobijamo kada se drugo telo pokrene ma kakvim kretanjem pod uslovom da je uzeta u obzir centripetalna sila, koja preostaje posle oduzimanja celokupne sile koja deluje na to drugo telo T.

SHOLIJA

Pošto ujednačen opis površina ukazuje na to da je centar uzet u odnosu na silu koja najviše deluje na telo, i kojom je telo povučeno sa svog pravolinijskog kretanja i zadržano u svojoj orbiti – zašto nam ne bi bilo dozvoljeno, u narednom razlaganju, da koristimo ujednačene opise površina kao indikaciju centra oko kog se sve kružno kretanje izvodi u slobodnim prostorima?

PROPOZICIJA IV. TEOREMA IV

Centripetalne sile tela, koje ujednačenim kretanjima opisuju različite krugove, teže ka centrima samih tih krugova i proporcionalna su sa kvadratima lukova opisanih u istim vremenima primenjenih na poluprečnike krugova.

Te sile teže ka centrima krugova (prema Prop. II i Kor. 2, Prop. I) i u međusobnom su odnosu kao sinusi versusi veoma malih lukova opisanih u istim vremenima (prema Kor. 4. Prop. I), tj. proporcionalni su sa kvadratima tih lukova primenjenih na prečnike krugova (prema Lemi VII). Zbog toga, pošto su ti lukovi poput lukova opisanih u bilo kom istom vremenu, a prečnici su proporcionalni sa poluprečnicima, sile će se međusobno odnositi kao i kvadrati bilo kojih lukova opisanih u istom vremenu i primenjenih na poluprečnike krugova. Q.E.D.

Kor. 1. Stoga, pošto su ti lukovi proporcionalni sa brzinama tela, centripetalne sile su direktno proporcionalne sa kvadratima brzina i obrnuto proporcionalne sa poluprečnicima krugova.

Kor. 2. Pošto su periodična vremena direktno proporcionalna sa poluprečnicima, a obrnuto proporcionalna sa brzinama, centripetalne sile su direktno proporcionalne sa poluprečnicima, a obrnuto proporcionalne sa kvadratima periodičnih vremena.

Kor. 3. Ako su periodična vremena ista, pa su zbog toga brzine proporcionalne sa poluprečnicima, centripetalne sile će takođe biti proporcionalne sa poluprečnicima i obrnuto.

Kor. 4. Ako su periodična vremena i brzine proporcionalne sa kvadratnim korenom poluprečnika, centripetalne sile će biti međusobno jednake i obrnuto.

Kor. 5. Ako su periodična vremena proporcionalna sa poluprečnicima, pa su zbog toga brzine jednake, onda će centripetalne sile biti obrnuto proporcionalne sa poluprečnicima i obrnuto.

Kor. 6. Ako se periodična vremena nalaze u polukubnom odnosu sa poluprečnicima, pa su zbog toga brzine recipročne sa kvadratnim korenom poluprečnika, onda će centripetalne sile biti obrnuto proporcionalne kvadratima poluprečnika i obrnuto.

Kor. 7. Univerzalno, ako su periodična vremena proporcionalna sa bilo kojim n-tim stepenom poluprečnika R, tj. R^n, pa je zbog toga brzina obrnuto proporcionalna sa stepenom R^{n-1}, onda će centripetalne sile biti obrnuto proporcionalne sa stepenom R^{2n-1}, i obrnuto.

Kor. 8. Isto važi i za vremena, brzine i sile pomoću kojih tela opisuju slične delove sličnih figura koje imaju svoje centre u sličnim položajima sa tim figurama, kao što sledi iz prethodnih prikaza kada se primene na ove slučajeve.

Kor. 9. Na sličan način, iz istih dokaza, sledi da je luk, kog telo koje se ravnomerno kreće po krugu posredstvom date centripetalne sile, opisuje u bilo kom vremenu, geometrijska sredina prečnika kruga i razdaljine na koju bi se spustilo isto telo koje pada pod uticajem iste sile u istom vremenu.

SHOLIJA

Slučaj iz Korolara 6 upotrebljava se na nebeskim telima (kao što su nezavisno jedan od drugog primetili ser Kristofer Ren, dr Huk [R. Hook] i dr Halej [E. Halley]), i zbog toga, u onome što sledi, nameravam da podrobnije izložim stvari koje se odnose na centripetalne sile koje opadaju proporcionalno sa kvadratom rastojanja od centra.

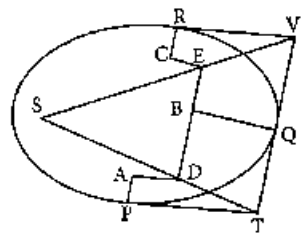
Štaviše, posredstvom prethodnih propozicija i njihovih korolara, možemo otkriti uzajamni odnos centripetalne sile sa bilo kojom drugom poznatom silom, kao što je sila gravitacije. Jer, ako se telo pod dejstvom svoje gravitacije okreće po krugu koji je koncentričan u odnosu na Zemlju, onda je ta gravitacija centripetalna sila tog tela. Nju možemo odrediti (prema Kor. 9. ove propozicije) iz padanja teških tela, vremena jedne celokupne revolucije, i veličine luka koji je opisan u bilo kom datom vremenu. Pomoću takve propozicije, Hajgens je, u svojoj odličnoj knjizi *De Horologio Oscillatorio*, uporedio silu gravitacije sa centrifugalnim silama tela koja kruže.

Prethodna propozicija može da se prikaže i na sledeći način. Pretpostavimo da je u bilo kom krugu upisan mnogougaonik sa bilo kojim brojem strana. Ukoliko je telo, koje se kreće datom brzinom po stranama mnogougaonika, odbijeno od kruga u nekoliko ugaonih tačaka, sila, koja prilikom svakog odbijanja deluje na krug, biće proporcionalna sa brzinom; zbog toga će zbir sila, u datom vremenu, biti proporcionalna sa brzinom i brojem odbijanja zajedno, tj. (ukoliko je dat broj strana mnogougaonika) proporcionalna sa dužinom koja je opisana u datom vremenu, i uvećana ili umanjena shodno odnosu te dužine i poluprečnika kruga, tj. biće proporcionalna sa kvadratom te dužine primenjene na poluprečniku. Iz

ovoga sledi da će se mnogougaonik, pri smanjivanju broja strana *in infinitum*, poklapati sa krugom kao kvadrat luka, koji je opisan u datom vremenu, primenjen na poluprečniku. To je centrifugalna sila kojom telo pritiska krug, a kojoj je jednaka suprotna sila pomoću koje krug neprekidno odbija telo prema centru.

PROPOZICIJA V. PROBLEM I

Potrebno je pronaći centar ka kom su usmerene sile pomoću kojih telo opisuje datu figuru čija je brzina, u bilo kom mestu, data, i pomoću koje telo opisuje tu figuru.



Neka tri prave linije PT, TQV i VR dodiruju opisanu figuru u tačkama P, Q, R, i neka se seku u tačkama T i V. Na tangentama se pojavljuju normale PA, QB i RC koje su obrnuto proporcionalne sa brzinama tela u tačkama P, Q i R iz kojih su nastale normale, tako da se PA može odnositi prema QB kao brzina u Q prema brzini u P, a QB prema RC kao brzina u R prema brzini u Q. Kroz krajeve A, B i C normala povući ćemo AD, DBE i EC, pod pravim uglovima, koji se seku u tačkama D i E. Stvorene su prave linije TD i VE, koje se seku u tački S, i dobijen je centar.

Normale koje se spuštaju iz centra S na tangente PT i QT obrnuto su proporcionalne sa brzinama tela u tačkama P i Q (prema Kor. 1. Prop. I), a zbog toga su, usled strukture, direktno proporcionalne sa normalama AP i BQ, tj. sa normalama koje se spuštaju od tačke D na tangente. Otuda je lako zaključiti da se tačke S, D i T nalaze na jednoj pravoj liniji. Sličnim argumentom, nalazimo da su i tačke S, E i V, takođe, na jednoj pravoj liniji, a zbog toga se centar S nalazi u tački u kojoj se seku prave linije TD i VE.

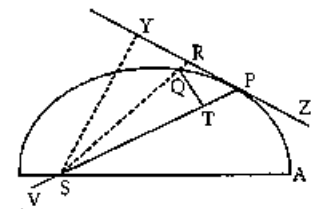
PROPOZICIJA VI. TEOREMA V

Ukoliko se telo, u prostoru bez otpora, okreće oko nepokretnog centra po bilo kojoj orbiti, i ukoliko u najmanjem vremenskom periodu opisuje luk koji je upravo tad nastao, i ukoliko pretpostavimo da

povučeni sinus versus tog luka preseca tetivu na sredini, stvorenu prolazeći kroz centar sile – onda će centripetalna sila u sredini luka biti direktno proporcionalna sa sinus versusom i obrnuto proporcionalna sa kvadratom vremena.

Sinus versus u datom vremenu proporcionalan je sa silom (prema Kor. 4. Prop. I). Ukoliko se vreme povećava za bilo koji stepen i ukoliko se luk povećava za isti taj stepen, sinus versus će biti dvostruko povećan (prema Kor. 2. i 3. Leme XI), pa je zbog toga sinus versus proporcionalan sa silom i kvadratom vremena. Oduzimajući sa obe strane dvostruki stepen vremena, sila će biti direktno proporcionalna sa sinus versusom, a obrnuto proporcionalna sa kvadratom vremena. Q.E.D.

Isto to se lako može pokazati i pomoću Kor. 4. Leme X.



Kor. 1. Ako telo P, koje se okreće oko centra S, opisuje krivu liniju APQ koja dodiruje pravu liniju ZPR u bilo kojoj tački P, i ako iz bilo koje druge tačke Q te krive, povučemo pravu liniju QR paralelno sa rastojanjem SP, koja se seče sa tangentom u tački R, i ako se QT povuče normalno na rastojanje SP, centripetalna sila će biti obrnuto proporcionalna sa zapreminom $\frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$, ako uzmemo da je zapremina takve veličine koju bi telo zadobilo kada se poklapaju tačke P i Q. Prava linija QR jednaka je sinus versusu dvostrukog luka QP, čija je sredina P. Dvostruka površina trougla SQP, ili SP × QT, proporcionalna je sa vremenom u kom je opisan taj dvostruki luk, te se stoga može koristiti kao eksponent vremena.

Kor. 2. Sličnim rasuđivanjem, centripetalna sila je obrnuto proporcionalna sa zapreminom $\frac{SY^2 \times QP^2}{QR}$ ako je SY normala spuštena iz centra sile na PR tangentu orbite. Pravougaonici SY × QP i SP × QT su jednaki.

Kor. 3. Ako uzmemo da je orbita krug, ili da dodiruje ili seče krug koncentrično, tj. da sadrži zajedno sa krugom najmanji ugao dodira ili odeljka, imajući isto zakrivljenje i isti poluprečnik zakrivljenja u tački P, i ako je PV tetiva ovog kruga, povučena iz tela preko centra sile, onda će centripetalna sila biti obrnuto proporcionalna sa $SY^2 \times PV$, jer PV je $\frac{QP^2}{QR}$.

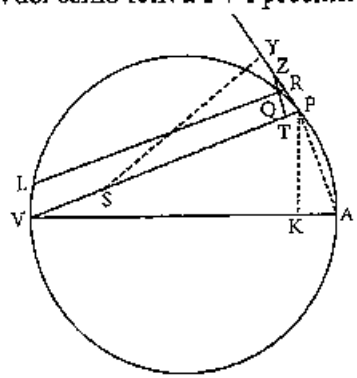
Kor. 4. Pri istim pretpostavkama, centripetalna sila direktno je proporcionalna sa kvadratom brzine, a obrnuto proporcionalna sa tetivom. Brzina je obrnuto proporcionalna sa normalom SY, prema Kor. 1. Prop. I.

Kor. 5. Na taj način, ako je data bilo koja krivolinijska figura APQ, i unutar nje tačka S prema kojoj je neprekidno usmerena centripetalna sila, može se pronaći zakon centripetalne sile, po kome će se telo P neprekidno skretati sa pravolinijskog smera, i pošto se zadržava u obimu te figure, opisivaće isto pomoću stalne revolucije. To jest, dobićemo, izračunavanjem, ili zapremine $\frac{SP^2 \times QT^4}{QR}$ ili $SY^2 \times PV$, obrnuto proporcionalne sa tom silom. U narednim problemima iznećemo primere takvog određivanja centripetalne sile.

PROPOZICIJA VII. PROBLEM II

Ako telo rotira po obimu kruga, trebalo bi pronaći zakon centripetalne sile koja je usmerena prema bilo kojoj datoj tački.

Neka je VQPA obim kruga. S je data tačka prema kojoj teži sila kao prema centru. P je telo koje se kreće po obimu. Q je sledeće mesto do kog će se telo pomeriti, a PRZ je tangenta kruga na prethodnom mestu L. Kroz tačku S povući ćemo tetivu PV i prečnik kruga VA. Spojićemo AP i povući QT normalno na SP, čiji se nastavci mogu seći sa tangentom PR u tački Z. Na kraju, kroz tačku Q povući ćemo LR paralelno sa SP, koja preseca krug u tački L i tangentu PZ u tački R. I, pošto su trouglovi ZQR, ZTP i VPA slični, imaćemo RP^2, tj. QRL je prema QT^2 kao AV^2 prema PV^2. Zbog toga je $\frac{QRL^2 \times PV^2}{AV^2}$ jednako sa QT^2. Pomnožimo li te jednakosti sa $\frac{SP^2}{QR}$, i pošto se tačke P i Q poklapaju, umesto RL pisaćemo PV, a onda ćemo dobiti da je $\frac{SP^2 \times PV^3}{AV^2} = \frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$. Zbog toga (prema Kor. 1. i 5. Prop. VI) centripetalna sila je obrnuto proporcionalna sa $\frac{SP^2 \times PV^3}{AV^2}$, tj. (pošto je dato AV^2), biće obrnuto proporcionalna sa proizvodom kvadrata rastojanja ili visine SP i tetive PV na kub. Q.E.I.

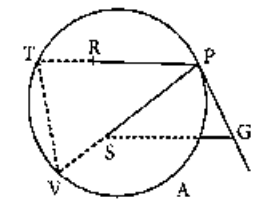


Isto to na drugi način.

Na nastavak tangente PR spustićemo normalu SY. Tada ćemo (zbog sličnih trouglova SYP i VPA) imati da je AV prema PV kao SP prema SY, a zbog toga je $\frac{SP \times PV}{AV} = SY$, a $\frac{SP^2 \times PV^2}{AV^2} = SY^2 \times PV$. Stoga je (prema Kor. 3. i 5. Prop. VI) centripetalna sila obrnuto proporcionalna sa $\frac{SP^2 \times PV^2}{AV^2}$, tj. (pošto je AV dato), obrnuto proporcionalna sa $SP^2 \times PV^3$. Q.E.I.

Kor. 1. Prema tome, ako je data tačka S, prema kojoj uvek teži centripetalna sila, smeštena na obimu kruga, recimo u tački V, centripetalna sila biće obrnuto proporcionalna sa kvadratno-kubnim (tj. sa petim stepenom rastojanja) rastojanjem SP.

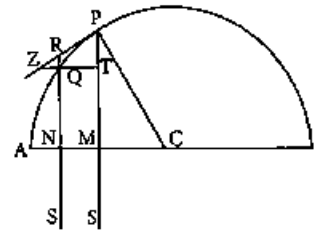
Kor. 2. Sila, pomoću koje se telo P u krugu APTV okreće oko centra sile S, odnosi se prema drugoj sili, pomoću koje isto to telo P može da se okreće u istom krugu i u istom delu vremena oko bilo kog drugog centra sile R, kao $RP^2 \times SP$ prema pravoj liniji SG na kub, iz koje je iz prvog centra sile S povučena paralela sa rastojanjem PR tela sa drugim centrom sile R i koja seče tangentu PG orbite u tački G. Iz postavke ove Propozicije sledi da se prva sila odnosi na drugu, kao $RP^2 \times PT^3$ prema $SP^2 \times PV^3$, tj. kao $SP \times RP^2$ prema $\frac{SP^3 \times PV^3}{PT^3}$, ili (usled sličnosti trouglova PSG i TPV) kao prema SG^3.



Kor. 3. Sila, pomoću koje se telo P po bilo kojoj orbiti okreće oko centra sile S, odnosi se prema sili pomoću koje isto to telo može da se okreće po istoj orbiti i u istom delu vremena oko bilo kog drugog centra sile R, kao što se $SP \times RP^2$, sadržanih u okviru udaljenosti tela od prvog centra sile S i kvadrata udaljenosti od drugog centra sile R, odnosi prema pravoj liniji SG na kub, koja je povučena iz prvog centra sile S, paralelno sa rastojanjem RP tela od drugog centra sile R, koja seče tangentu PG orbite u tački G. Sila je, u ovoj orbiti, u bilo kojoj tački P ista kao i u krugu sa istom zakrivljenošću.

PROPOZICIJA VIII. PROBLEM III

Ukoliko se telo kreće po polukrugu PQA, trebalo bi da se pronađe zakon centripetalne sile koja teži ka tački S, toliko udaljenoj da se sve linije PS, RS koje se povlače prema njoj mogu smatrati paralelnim.



Neka se iz tačke C, koja je centar polukruga, povuče poluprečnik CA, koji seče paralele pod pravim uglom u tačkama M i N, spajajući CP. Zbog sličnih trouglova CPM, PZT i RZQ imaćemo da je CP^2 prema PM^2 kao PR^2 prema QT^2; a zbog prirode kruga, PR^2 jednako je sa pravougaonikom QR × (RN + QN) ili, kada se tačke P i Q poklapaju, jednako je sa pravougaonikom QR × 2PM. Zbog toga je CP^2 prema PM^2 kao QR × 2PM prema QT^2; a $\frac{QT^2}{QR} = \frac{2PM^3}{CP^2}$ i $\frac{QT^2 \times SP^2}{QR} = \frac{2PM^3 \times SP^2}{CP^2}$. Zbog toga je (prema Kor. 1. i 5. Prop. VI) centripetalna sila obrnuto proporcionalna sa $\frac{2PM^3 \times SP^2}{CP^2}$, tj. (ako zanemarimo dati odnos $\frac{2SP^2}{CP^2}$) obrnuto je proporcionalna sa PM^3. Q.E.I.

Slično se, takođe, može zaključiti i iz prethodne Propozicije.

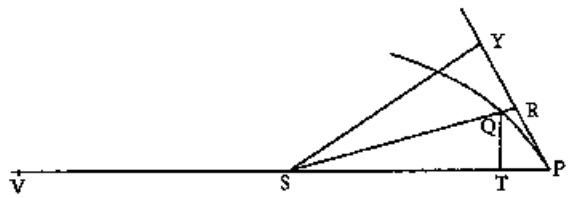
SHOLIJA

Sličnim rasuđivanjem telo će se kretati po elipsi, čak i po hiperboli, ili paraboli, pomoću centripetalne sile koja je obrnuto proporcionalna sa ordinatom na kub koja je usmerena ka beskonačno udaljenom centru sile.

PROPOZICIJA IX. PROBLEM IV

Ukoliko se telo kreće po spirali PQS, presecajući sve poluprečnike SP, SQ, itd. pod datim uglom, trebalo bi da se nađe zakon centripetalne sile koja teži ka centru te spirale.

Pretpostavimo da je dat beskonačno mali ugao PSQ. Onda će, zbog toga što su dati svi drugi uglovi, figura SPRQT biti data *in specie*. Zbog toga je, takođe, dat odnos $\frac{QT}{QR}$, $\frac{QT^2}{QR}$ proporcionalan sa QT, tj. (pošto je je figura data *in specie*), proporcionalan je sa SP. Međutim, ako se ugao PSQ promeni na bilo koji način, prava linija QR, koja zateže dodirni ugao QPR (prema Lemi XI) promeniće se proporcionalno kvadratu PR ili QT. Zbog toga će odnos $\frac{QT^2}{QR}$ ostati isti kao i ranije, tj. propor-



cionalan sa SP. Odnos $\frac{QT^2 \times SP^2}{QR}$ biće proporcionalan sa SP^3, i zbog toga će (prema Kor. 1. i 5. Prop. VI) centripetalna sila biti obrnuto proporcionalna kubu rastojanja SP. Q.E.I.

Isto to na drugi način.

Normala SY, koja pada na tangentu, i tetiva PV kruga, koncentrično presecajući spiralu, nalaze se u datim odnosima sa rastojanjem SP; i zbog toga je SP^3 proporcionalno sa $SY^2 \times PV$, tj. (prema Kor. 3. i 5. Prop. VI) obrnuto je proporcionalno sa centripetalnom silom.

LEMA XII

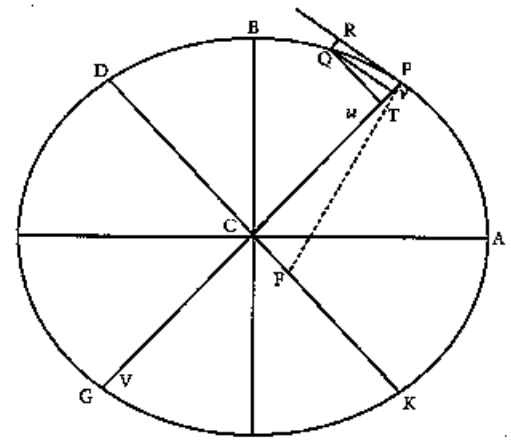
Svi paralelogrami koji su opisani oko bilo kojih konjugovanih prečnika datih elipsa ili hiperbola, međusobno su jednaki.

Ovo je prikazano u učenju o konusnim presecima.

PROPOZICIJA X. PROBLEM V

Ukoliko telo kruži po elipsi, trebalo bi da se pronađe zakon centripetalne sile koja teži ka centru elipse.

Pretpostavimo da su CA i CB poluose elipse; GP i DK konjugovani prečnici. PF i QT normale tih prečnika. Qν ordinata prečnika GP. Ako se popuni paralelogram QνPR, onda će se (prema svojstvima konusnih preseka) pravougaonik PνG odnositi prema $Q\nu^2$ kao PC^2 prema CD^2, a (usled sličnih trouglova QνT, PCF) $Q\nu^2$ će se odnositi prema QT^2 kao PC^2 prema PF^2, i prema slaganju, odnos PνG prema QT^2 sastoji se iz odnosa PC^2 prema CD^2, i od odnosa PC^2 prema PF^2, tj. νG se prema $\frac{QT^2}{P\nu}$ odnosi kao PC^2 prema $\frac{CD^2 \times PF^2}{PC^2}$. Neka



QR stoji umesto Pv, i (prema Lemi XII) BC × CA umesto CD × PF. Takođe (kada se tačke P i Q poklapaju) neka 2PC stoji umesto vG i množenjem krajnjih i središnjih vrednosti zajedno, imaćemo da je $\frac{QT^2 \times PC^2}{QR}$ jednako sa $\frac{2BC^2 \times CA^2}{PC}$. Zbog toga je (prema Kor. 5. Prop. VI) centripetalna sila obrnuto proporcionalna sa $\frac{2BC^2 \times CA^2}{PC}$, tj. (pošto je $2BC^2 \times CA^2$ dato) centripetalna sila je obrnuto proporcionalna sa $\frac{1}{PC}$, tj. direktno je proporcionalna sa rastojanjem PC. Q.E.I.

Isto to na drugi način.

Na pravoj liniji PG sa druge strane tačke T, uzmimo tačku *u* tako da Tu može biti jednako sa Tv. Onda uzmimo *u*V tako da se prema vG odnosi kao DC^2 prema PC^2. Pošto se Qu^2 odnosi prema PuG kao DC^2 prema PC^2 (prema svojstvima konusnih preseka), imaćemo da je $Qv^2 = Pv \times uV$. Dodavanjem pravougaonika uPv na obe strane, kvadrat tetive luka PQ biće jednak sa pravougaonikom VPv, i zbog toga će krug, koji dodiruje konusni presek u tački P i koji prolazi kroz tačku Q, takođe proći i kroz tačku V. Sada, neka se tačke P i Q poklapaju, i tada će odnos *u*V prema vG, koji je isti sa odnosom DC^2 prema PC^2, postati odnos PV prema PG, ili odnos PV prema 2PC. Zbog toga će PV biti jednako sa $\frac{2DC^2}{PC}$. Usled toga će sila pomoću koje telo P kruži po elipsi biti obrnuto proporcionalna sa $\frac{2DC^2}{PC} \times PF^2$ (prema Kor. 3. Prop. VI), tj. (pošto je $2DC^2 \times PF^2$ dato) sila će biti direktno proporcionalna sa PC. Q.E.I.

Kor. 1. Zbog toga je sila proporcionalna sa rastojanjem tela do centra elipse, i, *vice versa*, ako je sila proporcionalna sa rastojanjem, onda će se telo kretati po elipsi čiji se centar poklapa sa centrom sile, ili pak po krugu u koji se elipsa može pretvoriti.

Kor. 2. Periodična vremena revolucija, po bilo kojim elipsama oko istog centra, biće jednaka. Ta vremena će u sličnim elipsama biti jednaka (prema Kor. 3. i 8. Prop. IV). Međutim, u elipsama koje imaju zajedničku veću osu, ta vremena su direktno proporcionalna sa celokupnom površinom elipsi, a obrnuto proporcionalna sa delovima površina opisanih u istom vremenu, tj. direktno proporcionalna sa manjim osama i obrnuto proporcionalna sa brzinama tela u njihovim temenima, tj. direktno proporcionalna sa tim manjim osama, a obrnuto proporcionalna sa ordinatama povučenim kroz istu tačku zajedničkih osa. Zbog toga su (usled jednakosti između direktno proporcionalnih i obrnuto proporcionalnih odnosa) u odnosu jednakosti.

SHOLIJA

Ukoliko se elipsa, pošto joj je centar beskonačno pomeren, pretvori u parabolu, telo će se kretati po ovoj paraboli, a sila će, pošto sada teži ka beskonačno udaljenom centru, postati ujednačena. To jeste Galilejeva teorema. I ako se parabolični presek konusa (putem promene inklinacije ravni preseka u odnosu na konus) pretvori u hiperbolu, telo će se kretati po obimu ove hiperbole, a njegova centripetalna sila će se promeniti u centrifugalnu silu. Slično tome važi i za krug ili elipsu – ako su sile usmerene ka centru figure koja je smeštena na apscisi, te će sile, putem povećanja ili smanjenja ordinata u bilo kom datom odnosu, ili čak putem promene ugla inklinacije ordinata u odnosu na apscisu, uvek biti povećane ili smanjene proporcionalno sa rastojanjem od centra. Pritom, periodična vremena ostaju jednaka. Takođe su, u bilo kojim figurama, ako su ordinate povećane ili smanjene u bilo kom datom odnosu, ili je njihova inklinacija na bilo koji način promenjena, a periodična vremena ostaju ista, sile, koje su usmerene ka bilo kom centru smeštenom na apscisi, u nekoliko ordinata povećane ili umanjene proporcionalno sa rastojanjem od centra.

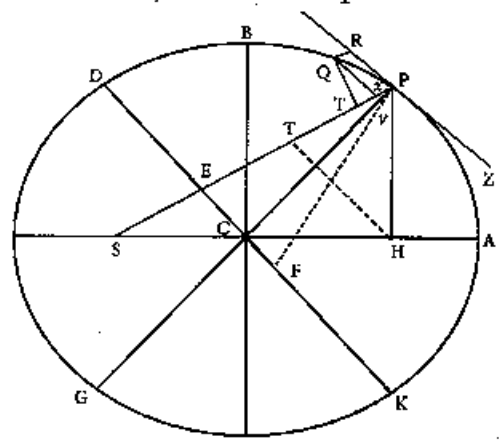
ODELJAK III

O kretanju tela po ekscentričnim konusnim presecima

PROPOZICIJA XI. PROBLEM VI

Ukoliko telo kruži po elipsi, neophodno je pronaći zakon centripetalne sile koja teži ka žiži elipse.

Neka S bude žiža elipse. Povući ćemo SP tako da preseca prečnik DK elipse u tački E i ordinatu Qv u tački *x* i upotpuniću paralelogram Q*x*PR. Očigledno je da je EP jednaka sa većom poluosom AC. Povlačenjem prave HI iz druge žiže H elipse



paralelno sa EC, ES i EI će biti jednake, jer su i CS i CH jednake, tako da je EP polovina zbira od PS i PI, tj. (zbog paralela HI i PR, i jednakih uglova IPR i HPZ) od PS i PH, koje uzete zajedno jesu jednake sa osom 2AC. Ako na SP povučemo normalu QT, a L postavimo za osnovni žižni parametar elipse ($\frac{2BC^2}{AC}$), L × QR prema L × Pv odnosiće se kao QR prema Pv, tj. kao PE ili AC prema PC, a L × Pv prema GvP kao L prema Gv, GvP prema Qv^2 kao PC^2 prema CD^2 i (prema Kor. 2. Lema VII) kada se tačke Q i P poklapaju, Qv^2 je prema Qx^2 u odnosu jednakosti, dok se Qx^2 ili Qv^2 prema QT^2 odnosi kao EP^2 prema PF^2, tj. kao CA^2 prema PF^2, ili (prema Lemi XII) kao CD^2 prema CB^2. Sastavljanjem svih tih odnosa zajedno dobijamo da se L × QR prema QT^2 odnosi kao AC × L × PC^2 × CD^2, ili kao 2CB^2 × PC^2 × CD^2 prema PC × Gv × CD^2 × CB^2, ili kao 2PC prema Gv. Pošto se tačke Q i P poklapaju, 2PC i Gv su jednaki. Zbog toga će i njima proporcionalne veličine L × QR i QT^2 takođe biti jednake. Svođenjem tih jednakosti na $\frac{SP^2}{QR}$, L × SP^2 postaće jednako sa $\frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$. I zbog svega toga će (prema Kor. 1. i 5. Prop. VI) centripetalna sila biti obrnuto proporcionalna sa L × SP^2, tj. obrnuto proporcionalna kvadratu rastojanja SP. Q.E.I.

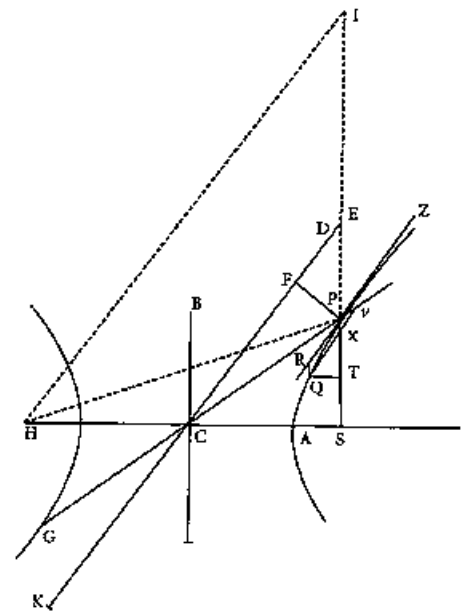
Isto to na drugi način.

Pošto sila, pomoću koje telo P može da kruži po elipsi, teži ka centru te elipse, ona je (prema Kor. 1. Prop. X) proporcionalna sa rastojanjem CP tela od centra C elipse. Neka je CE povučeno paralelno sa tangentom PR elipse; sila, pomoću koje telo P može da kruži po oko bilo koje druge tačke S na elipsi, biće proporcionalna sa $\frac{PE^2}{SP^3}$ (prema Kor. 3. Prop. VII), a CE i PS će se seći u tački E, tj. ako je tačka S žiža elipse, i ako je data dužina PE, sila će biti obrnuto proporcionalna sa SP^2. Q.E.I.

U vezi sa parabolom i hiperbolom mogli bismo postupiti sa istom sažetošću sa kojom smo razmotrili Problem V. Međutim, zbog važnosti Problema V i onoga što sledi, potvrdiću ostale slučajeve pojedinačnim dokazivanjima.

PROPOZICIJA XII. PROBLEM VII

Pretpostavimo da se telo kreće po hiperboli. Neophodno je pronaći zakon centripetalne sile koja teži ka žiži te figure.



Neka su CA i CB poluose hiperbole. PG i KD dva konjugovana prečnika. PF normala prečnika KD, a Qv ordinata prečnika GP. Povući ćemo SP tako da preseca prečnik DK u tački E i ordinatu Qv u x i upotpunićemo paralelogram QRPx. Očigledno je da je EP jednako sa polupoprečnom osom AC, a povlačenjem prave HI, iz druge žiže H hiperbole, paralelno sa EC, i pošto su CS i CH jednake, ES i EI će takođe biti jednake, tako da je EP polovina razlike od PS i PI, tj. (zbog paralela IH i PR i jednakih uglova IPR i HPZ) od PS i PH, razlike koja je jednaka sa celom osom 2AC. Ako na SP povučemo normalu QT, a L postavimo za osnovni žižni parametar hiperbole (tj. za $\frac{2BC^2}{AC}$), L × QR prema L × Pv odnosiće se kao QR prema Pv, ili Px prema Pv, tj. (zbog sličnih trouglova Pxv i PEC) kao PE prema PC, ili AC prema PC. A L × Pv će se odnositi prema Gv × Pv kao L prema Gv, i (zbog svojstava konusnih preseka) pravougaonik GvP se prema Qv^2 odnosi kao PC^2 prema CD^2 i (prema Kor. 2, Leme VII) kada se tačke Q i P poklapaju, Qv^2 je prema Qx^2 u odnosu jednakosti, a Qx^2 ili Qv^2 se prema QT^2 odnosi kao EP^2 prema PF^2, tj. kao CA^2 prema PF^2, ili (prema Lemi XII) kao CD^2 prema CB^2. Sastavljanjem svih tih odnosa zajedno dobijamo da se L × QR prema QT^2 odnosi kao AC × L × PC^2 × CD^2, ili kao 2CB^2 × PC^2 × CD^2 prema PC × Gv × CD^2 × CB^2, ili kao 2PC prema Gv. Pošto se tačke Q i P poklapaju, 2PC i Gv su jednaki. Zbog toga će i njima proporcionalne veličine L × QR i QT^2 takođe biti jednake. Svođenjem tih jednakosti na $\frac{SP^2}{QR}$, L × SP^2 postaće jednako sa $\frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$. I zbog svega toga će (prema Kor. 1. i 5. Prop. VI) centripetalna sila biti obrnuto proporcionalna sa L × SP^2, tj. obrnuto proporcionalna kvadratu rastojanja SP. Q.E.I.

Isto to na drugi način.

Pronađena je sila koja je usmerena od centra C hiperbole. Ona je proporcionalna sa rastojanjem CP. Međutim, od tada (prema Kor. 3. Prop VII), sila koja teži ka žiži S biće proporcionalna sa $\frac{PE^2}{SP^2}$, tj. pošto je PE data, sila će biti obrnuto proporcionalna sa SP^2. Q.E.I.

Na sličan način pokazaćemo da će se telo, čija je sila pretvorena iz centripetalne u centrifugalnu, kretati po konjugovanoj hiperboli.

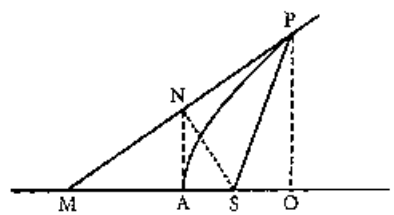
LEMA XIII

Žižni parametar parabole koji pripada bilo kom vrhu, jednak je sa četvorostrukim rastojanjem tog vrha do žiže figure.

Ovo je prikazano u učenju o konusnim presecima.

LEMA XIV

Normala, koja se spušta iz žiže parabole na njenu tangentu, jeste geometrijska sredina rastojanja žiže od dodirne tačke i od temena figure.



Neka AP bude parabola, S njena žiža, A teme, P dodirna tačka, PO ordinata osnovnog prečnika, PM tangenta koja seče osnovni prečnik u tački M, a SN normala puštena sa žiže na tangentu. Kada spojimo AN, prave linije AN i OP će biti paralelne, pošto su jednake prave MS i SP, MN i NP, MA i AO; trougao SAN će imati prav ugao u tački A i biće sličan sa jednakim trouglovima SNM i SNP. Zbog toga se PS odnosi prema SN kao SN prema SA. Q.E.D.

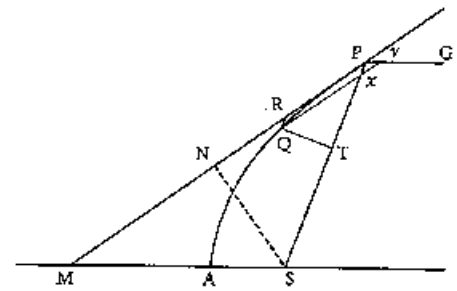
Kor. 1. PS^2 se prema SN^2 odnosi kao PS prema SA.

Kor. 2. I pošto je prava SA data, SN^2 će biti proporcionalna sa PS.

Kor. 3. Sretanjem bilo koje tangente PM sa pravom linijom SN, povučene iz žiže, normala na tangenti pada na pravu liniju AN koja dodiruje parabolu na temenu.

PROPOZICIJA XIII. PROBLEM VIII

Ukoliko se telo kreće po obimu parabole, neophodno je pronaći centripetalnu silu koja teži ka žiži te figure.



Zadržavajući postavku prethodne leme, neka P bude telo na obimu parabole, i iz mesta Q, koje je sledeće do kog će stići to telo, povući ćemo pravu QR paralelno sa SP i QT normalno na SP, kao i Qv paralelno sa tangentom, koja seče prečnik PG u tački v, i rastojanje SP u tački x. Sada, usled sličnih trouglova Pxv i SPM, i jednakih strana SP i SM jednog trougla, strane Px ili QR i Pv drugog trougla, takođe će biti jednake. Međutim (prema konusnim presecima), kvadrat ordinate Qv jednak je sa pravougaonikom ispod žižnog parametra i sa odsečkom Pv prečnika, tj. (prema Lemi XIII) jednak je sa kvadratom 4PS × Pv, ili 4PS × QR i pošto se tačke P i Q poklapaju, odnos Qv prema Qx (prema Kor. 2. Leme VII) postaje odnos jednakosti. I zbog toga, u ovom slučaju, Qx^2 postaje jednak sa pravougaonikom 4PS × QR. Međutim (usled sličnih trouglova QxT i SPN), Qx^2 se prema QT^2 odnosi kao PS^2 prema SN^2, tj. (prema Kor. 1. Leme XIV), kao PS prema SA, tj. kao 4PS × QR prema 4SA × QR, i zbog toga su (prema Prop. IX, Knjiga V, Elem.), QT^2 i 4SA × QR jednaki. Ako pomnožimo te jednakosti sa $\frac{SP^2}{QR}$, $\frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$ postaće jednako sa SP^2 × 4SA. Zbog toga je (prema Kor. 1. i 5. Prop VI) centripetalna sila obrnuto proporcionalna sa SP^2 × 4SA, tj. pošto je 4SA dato, obrnuto je proporcionalna sa kvadratom rastojanja SP. Q.E.D.

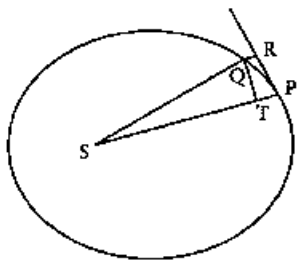
Kor. 1. Iz tri poslednje propozicije sledi: ako bilo koje telo P ide iz mesta P bilo kojom brzinom u pravcu bilo koje prave linije PR, i ako u isto vreme na njega deluje centripetalna sila koja je obrnuto proporcionalna sa kvadratom rastojanja mesta od centra, to telo će se kretati u jednom od konusnih preseka, sa svojom žižom u centru sile, i obrnuto. Pošto su žiža, dodirna tačka i pozicija tangente dati, može se opisati konusni presek, koji će u toj tački imati dato zakrivljenje. Međutim, zakrivljenje je dato iz centripetalne sile i iz poznate brzine tela i dve orbite, koje se međusobno dodiruju, ne mogu se opisati pomoću iste centripetalne sile i iste brzine.

Kor. 2. Ukoliko je brzina, kojom telo ide iz mesta P, takva da se, u bilo kom beskonačno malom momentu vremena, segment PR može opisati na taj način, i ako je centripetalna sila takva da može u istom vremenu pomeriti isto telo kroz prostor QR, onda će se telo kretati po jednom konusnom preseku, čiji je osnovni žižni parametar veličina $\frac{QT^2}{QR}$ u svom krajnjem stanju, i sa segmentima PR i QR koji su umanjeni *in infinitum*. U ovim korolarima smatrao sam krug elipsom i isključio sam slučaj u kom telo pada pravolinijski prema centru.

PROPOZICIJA XIV. TEOREMA VI

Ukoliko nekoliko tela kruži oko jednog zajedničkog centra, a centripetalna sila je obrnuto proporcionalna sa kvadratom rastojanja do centra, tvrdim da su osnovni žižni parametri, njihovih orbita proporcionalni sa kvadratom površina, koje tela, koja su privučena u pravcu centra, istovremeno opisuju.

Žižni parametar L je, (prema Kor. 2. Prop. XIII), jednak sa veličinom $\frac{QT^2}{QR}$, u svom krajnjem stanju, kada se tačke P i Q poklapaju. Međutim, segment QR u datom vremenu proporcionalan je sa stvorenom centripetalnom silom; tj. (prema pretpostavci) obrnuto je srazmeran sa SP^2. Zbog toga je $\frac{QT^2}{QR}$ proporcionalno sa $QT^2 \times SP^2$; tj. žižni parametar L je proporcionalan sa kvadratom površine QT × SP. Q.E.D.



Kor. Prema tome, celokupna površina elipse, sa pravougaonikom pod osama, koji joj je proporcionalan, proporcionalna je sa proizvodom kvadratnog korena žižnog parametra, i periodičnim vremenom, jer celokupna površina jeste površina QT × SP opisana u datom vremenu, pomnožena sa periodičnim vremenom.

PROPOZICIJA XV. TEOREMA VII

Prema istim pretpostavkama, tvrdim da su periodična vremena u elipsama proporcionalna sa seskviplikatom njihovih velikih osa.

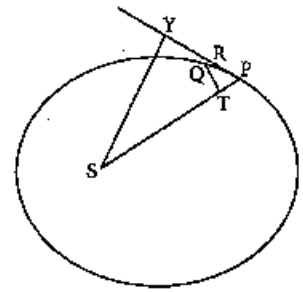
Pošto je mala osa geometrijska sredina veće ose i žižnog parametra, onda je pravougaonik pod osama proporcionalan sa proizvodom kvadratnog korena iz žižnog parametra i seskviplikatom veće ose. Međutim, taj pravougaonik je (prema Kor. 3. Prop. XIV) proporcionalan sa proizvodom kvadratnog korena iz žižnog parametra i periodičnog vremena. Umanjujući sa obe strane kvadratni koren iz žižnog parametra ostaće seskviplikat veće ose, koji je proporcionalan sa periodičnim vemenom.

Kor. Zbog toga su periodična vremena u elipsama jednaka sa periodičnim vremenima u krugovima čiji su prečnici jednaki sa većim osama elipsa.

PROPOZICIJA XVI. TEOREMA VIII

Prema istim pretpostavkama, ako ka telima povučemo prave linije koje dodiruju orbite, i ako pustimo da padnu normale na tangente iz zajedničkog centra, tvrdim da su brzine tih tela direktno proporcionalne sa kvadratnim korenom iz osnovnih žižnih parametara, i obrnuto proporcionalne sa normalama.

Ako iz žiže S povučemo normalu SY na tangentu PR, brzina tela P biće obrnuto proporcionalna sa kvadratnim korenom veličine $\frac{SY^2}{L}$. Ta brzina je proporcionalna sa beskonačno malim lukom PQ, opisanim u datom momentu vremena, tj. (prema Lemi VII), sa tangentom PR, tj. (usled uzajamnog odnosa PR prema QT i SP prema SY) proporcionalna je sa $\frac{SP \times QT}{SY}$ ili obrnuto proporcionalna sa SY, a direktno sa SP × QT. Međutim, SP × QT proporcionalna je sa površinom opisanom u datom vremenu, koja je (prema Prop. XIV), proporcionalna sa kvadratnim korenom žižnog parametra. Q.E.D.



Kor. 1. Osnovni žižni parametri proporcionalni su sa proizvodom kvadrata normala i kvadrata brzina.

Kor. 2. Brzine tela, u svom najvećem i najmanjem rastojanju od zajedničke žiže, obrnuto su proporcionalne sa rastojanjem do žiže, a direktno proporcionalne sa kvadratnim korenom iz osnovnih žižnih parametara, jer su te normale sada rastojanja.

Kor. 3. Zbog toga, pri kretanju tela u konusnom preseku, njegova brzina na najvećem i najmanjem rastojanju od žiže, odnosi se prema brzini kretanja po krugu, na istom rastojanju od centra, kao što se kvadratni koren iz osnovnih parametara odnosi prema dvostrukom tom rastojanju.

Kor. 4. Brzine tela koja kruže po elipsama, pri njihovim srednjim rastojanjima od zajedničke žiže, iste su kao i brzine tela koja kruže po krugovima i na istim rastojanjima; tj. (prema Kor. 6. Prop. IV) obrnuto su proporcionalne sa kvadratnim korenom rastojanja. Normale su sada manje poluose, a one su geometrijske sredine između srednjeg rastojanja i žižnih parametara. Neka je ovaj odnos inverzno proporcionalan kvadratnom korenu direktnog odnosa žižnih parametara i imaćemo kvadratni koren inverznog odnosa rastojanja.

Kor. 5. U istoj figuri, pa čak i u različitim figurama, čiji su osnovni žižni parametri jednaki, brzina tela obrnuto je proporcionalna sa normalom koja pada iz žiže na tangentu.

Kor. 6. U paraboli, brzina je obrnuto proporcionalna sa kvadratnim korenom rastojanja tela od žiže figure. Odnos je više promenljiv u elipsi, a manje u hiperboli. Normala koja (prema Kor. 2 Leme XIV) pada iz žiže na tangentu parabole proporcionalna je sa kvadratnim korenom rastojanja. U hiperboli, normala je manje promenljiva, a u elipsi više.

Kor. 7. U paraboli, brzina tela koje se nalazi na bilo kom rastojanju od žiže, odnosi se prema brzini tela koje kruži po krugu, na istom rastojanju od centra, kao što se $\sqrt{2}$ odnosi prema 1. U elipsi je taj odnos manji, a u hiperboli veći. Brzina na vrhu parabole (prema Kor. 2 ove Prop.) nalazi se u tom odnosu, a (prema Kor. 6. ove Prop. i Prop. IV) isti odnos važi za sva rastojanja. Prema tome, u paraboli je, takođe, brzina svuda jednaka brzini tela koje kruži po krugu na polovini rastojanja. U elipsi je manja, a u hiperboli veća.

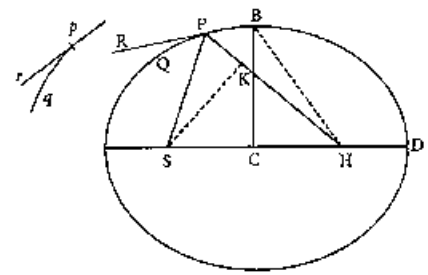
Kor. 8. Brzina tela koje kruži po bilo kom konusnom preseku odnosi se prema brzini tela koje kruži po krugu, na rastojanju koje je polovina od osnovnih žižnih parametara preseka, kao što se to rastojanje odnosi prema normali koja pada iz žiže na tangentu preseka. Ovo je posledica Kor. 5.

Kor. 9. Pošto se (prema Kor. 6, Prop. IV) brzina tela koje kruži po ovom krugu nalazi prema brzini drugog tela koje kruži po bilo kom drugom krugu u obrnutom odnosu sa kvadratnim korenom rastojanja, *ex aequo*, brzina tela koje kruži po konusnom preseku

odnosiće se prema brzini tela koje kruži po krugu na istom rastojanju, kao što se geometrijska sredina tog zajedničkog rastojanja i polovine osnovnog žižnog parametra odnosi prema normali koja pada iz zajedničke žiže na tangentu preseka.

PROPOZICIJA XVII. PROBLEM IX

Pretpostavimo da je centripetalna sila obrnuto proporcionalna sa kvadratima rastojanja mesta od centra, i da je poznata apsolutna veličina ta sile. Neophodno je odrediti liniju koju će telo opisati, a koja proizlazi iz datog mesta sa datom brzinom u pravcu date prave linije.



Neka je centripetalna sila, koja teži ka tački S, takva da čini da telo p kruži po bilo kojoj datoj orbiti pq. Pretpostavimo da je poznata brzina tela u mestu p. Potom, pretpostavimo da se iz mesta P kreće telo P sa datom brzinom u smeru linije PR. Međutim, centripetalna sila smesta pomera telo sa prave PR na konusni presek PQ, koji seče pravu liniju PR u tački P. Isto tako, pretpostavimo da prava linija pr seče orbitu pq u tački p i ukoliko pretpostavimo da normale padaju iz tačke S na te tangente, osnovni žižni parametar konusnog preseka će se (prema Kor. 1, Prop. XVI) prema osnovnom žižnom parametru te orbite nalaziti u odnosu kvadrata proizvoda brzina i normala, pa je zbog toga taj parametar dat. Neka taj žižni parametar bude L, a žiža S konusnog preseka, takođe, neka bude data. Neka ugao RPH bude dopuna uglu RPS do dve prave i linija PH, na kojoj je smeštena žiža H, data je prema poziciji. Pustićemo normalu SK da padne na PH i dobićemo konjugovanu poluosu BC. Tad ćemo imati $SP^2 - 2KPH + PH^2 = SH^2 = 4CH^2 = 4BH^2 - 4BC^2 = (SP + PH)^2 - L \times (SP + PH) = SP^2 + 2SPH + PH^2 - L \times (SP + PH)$. Ako na obe strane dodamo $2KPH - SP^2 - PH^2 + L \times (SP + PH)$, onda ćemo imati da je $L \times (SP + PH) = 2SPH + 2KPH$, ili SP + PH se odnosi prema PH, kao 2SP + 2KP prema L. Prema tome, PH je dato i prema dužini i prema poziciji. To jest, ako je brzina tela u tački P takva da je žižni parametar L manji od 2SP + 2KP, PH će ležati na istoj strani tangente sa linijom

SP i zbog toga će figura biti elipsa, koja je, takođe, data iz datih žiža S i H i osnovnih osa SP + PH. Medutim, ako je brzina tela toliko velika, tako da žižni parametar L postaje jednak sa 2SP + 2KP, dužina PH će biti beskonačna, zbog čega će figura biti parabola, čija je osa SH paralelna sa linijom PK, pa je, prema tome, data. Međutim, ako se telo kreće iz svog mesta P sa još većom brzinom, dužinu PH treba pronaći na drugoj strani tangente; i tada, kada tangenta prolazi između žiža, figura će biti hiperbola čija je osnovna osa jednaka sa razlikom linija SP i PH, a prema tome, ona je data. Ako telo, u ovim slučajevima, kruži po konusnom preseku, prema propozicijama XI, XII i XIII dokazano je da će centripetalna sila biti obrnuto proporcionalna sa kvadratom rastojanja tela od centra sile S, te smo stoga dobro odredili liniju PQ, koju bi telo, koje dolazi iz datog mesta P sa datom brzinom, opisivalo pomoću takve sile. Q.E.F.

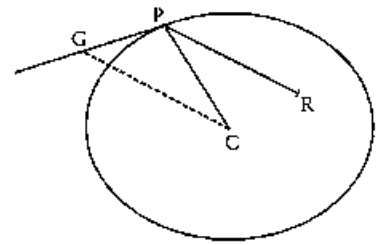
Kor. 1. Prema tome, u svakom konusnom preseku, iz temena D dati su žižni parametar L i žiža S, a druga žiža H je data pomoću odnosa DH prema DS, koji je isti kao i odnos žižnog parametra prema razlici žižnog parametra i 4DS. U ovom slučaju, SP + PH prema PH kao 2SP + 2KP prema L, postaje DS + DH prema DH kao 4DS prema L, iz čega sledi da se DS prema DH odnosi kao 4DS – L prema L.

Kor. 2. Ako je data brzina tela u temenu D, orbita se može lako pronaći. Naime, ako je odnos njenog žižnog parametra prema dvostrukom rastojanju DS jednak sa kvadratom odnosa date brzine prema brzini tela koje kruži po krugu na rastojanju DS (prema Kor. 3 Prop. XVI), određujemo odnos DH prema DS, kao odnos koji je jednak sa odnosom žižnog parametra prema razlici između žižnog parametra i 4DS.

Kor. 3. Takođe, ako se telo kreće u bilo kom konusnom preseku, i ako je prinudeno da izađe iz svoje orbite pomoću nekog impulsa, možemo otkriti orbitu po kojoj će telo posle nastaviti svoje kretanje. Ako sastavimo prethodno kretanje tela sa ovim kretanjem, koje bi stvorilo sâm impuls, imaćemo kretanje kojim će telo skrenuti sa datog mesta impulsa u pravcu prave linije date prema poziciji.

Kor. 4. I ako se to telo neprekidno remeti delovanjem neke strane sile, možemo približno znati njegov pravac, tako što ćemo odrediti promene koje ta sila proizvodi na pojedinim tačkama, tako što ćemo proceniti neprekidne promene koje će pretrpeti na središnjim mestima iz analogije koja se pojavljuje u progresivnom nizu.

SHOLIJA



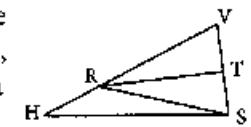
Ako se telo P pomoću centripetalne sile, koja teži ka bilo kojoj tački R, kreće po obimu bilo kog datog konusnog preseka čiji je centar C, neophodno je pronaći zakon centripetalne sile. Povući ćemo pravu CG paralelno sa poluprečnikom RP, koja seče tangentu PG orbite u tački G. Tada će potrebna sila biti proporcionalna sa $\frac{CG^2}{RP^3}$ (prema Kor. 1., Shol. Prop. X, i Kor. 3. Prop VII).

ODELJAK IV

O pronalaženju eliptičnih, paraboličnih i hiperboličnih orbita iz date žiže

LEMA XV

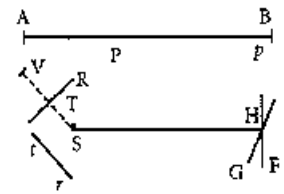
Ako iz dve žiže S i H, bilo koje elipse ili parabole, povučemo do bilo koje treće tačke prave linije SV i HV, od kojih je prava HV jednaka sa osnovnom osom figure, tj. sa osom na kojoj se nalaze žiže, a druga prava SV prepolovljena je u tački T normalom TR koja pada na nju, ta će normala negde dodirnuti konusni presek, i, *vice versa*, ako je dodirne, HV će biti jednaka sa osnovnom osom figure.



Neka normala TR seče pravu liniju HV koja se nastavlja, ako je to potrebno, u tački R spajajući tako SR. Pošto su TS i TV jednake, prave linije SR i VR, kao i uglovi TRS i TRV, će, takođe, biti jednaki. Zbog toga će se, tačka R nalaziti u konusnom preseku i normala TR će dodirivati taj presek, i obrnuto. Q.E.D.

PROPOZICIJA XVIII. PROBLEM X

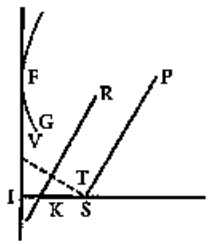
Iz date žiže i datih osnovnih osa, opisaćemo eliptične i hiperbolične putanje koje će proći kroz date tačke i dodirnuti pravu liniju datu prema poziciji.



Neka S bude zajednička žiža figure, AB dužina osnovne ose bilo koje putanje, P tačka kroz koju prolazi putanja, a TR prava linija koju bi trebalo da dodirne. Oko centra P, sa intervalom AB – SP, ako je orbita elipsa, i sa intervalom AB + SP, ako je orbita hiperbola, opisaćemo krug HG. Na tangentu TR pustićemo normlau ST, koja će nastaviti sve do tačke V, kako bi TV bilo jednako sa ST i oko tačke V, koja je centar sa rastojanjem AB, opisuje krug FH. Na taj način, bez obzira na to da li su date dve tačke P i *p*, ili dve tangente TR i *tr*, ili tačka P i tangenta TR, opisaćemo dva kruga. Neka H bude njihov zajednički presek, a iz žiža S i H, sa datom osom, opisaćemo putanju. Tvrdim, stvar je rešena. Pošto je PH + SP u elipsi, i PH – SP u hiperboli jednako sa osom, opisana putanja će proći kroz tačku P, i (prema prethodnoj Lemi) dodirnuće pravu liniju TR. Istim argumentom, ona će ili proći kroz dve tačke P i *p* ili će dodirnuti dve prave linije TR i *tr*. Q.E.F.

PROPOZICIJA XIX. PROBLEM XI

Oko date žiže opisaćemo paraboličnu putanju, koja će proći kroz date tačke i dodirnuće pravu liniju datu prema poziciji.

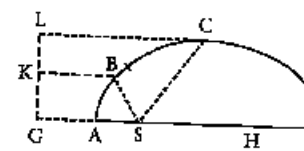


Neka S bude žiža, P tačka, a TR tangenta putanje koja se opisuje. Oko tačke P, kao centra, sa intervalom PS, opisaćemo krug FG. Iz žiže ćemo na tangentu pustiti normalu ST, koja će nastaviti sve do tačke V, kako bi TV bilo jednako sa ST. Na isti način opisaće se i neki drugi krug *fg*, ako je data neka druga tačka *p*, ili ako je data neka druga tangenta *tr*, pronaći će se neka druga tačka *v*. Ako su date dve tačke P i *p*, povući ćemo pravu liniju IF koja će dodirnuti dva kruga FG i *fg*, ili ako su date dve tangente TR i *tr*, proći će kroz dve tačke V i *v*, ili će dodirnuti krug FG i proći kroz tačku V, ako je data tačka P i tangenta TR. Na pravu FI pustićemo normalu SI koja će je prepoloviti u tački K, a sa osom SK i temenom K opisaće se parabola. Tvrdim, stvar je rešena. Ova parabola će (pošto je SK jednako sa IK, a SP jednako sa FP) proći kroz tačku P, i pošto je (prema Kor. 3 Leme XIV) ST jednako sa TV, a STR je prav ugao, dodirnuće pravu liniju TR. Q.E.F.

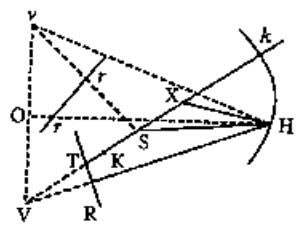
PROPOZICIJA XX. PROBLEM XII

Oko date žiže opisaćemo bilo koju putanju datu *in specie*, koja će proći kroz date tačke i dodirnuće pravu liniju datu prema poziciji.

Slučaj 1. Oko žiže S potrebno je opisati putanju ABC koja prolazi kroz dve tačke B i C. Pošto je putanja data *in specie*, odnos osnovne ose prema rastojanju od žiže će biti poznat. U tom odnosu uzmimo KB prema BS i LC prema CS. Oko centara B i C, sa intervalima BK i CL opisaćemo dva kruga i na pravoj liniji KL, koja ih dodiruje u tačkama K i L, spustićemo normalu SG koja je preseca u tačkama A i *a*, tako da se GA može odnositi prema AS, i G*a* prema *a*S, kao KB prema BS i uz pomoć ose A*a* i vrhova A i *a* opisaćemo putanju. Tvrdim, stvar je rešena. Neka H bude druga žiža opisane figure i pošto se GA odnosi prema AS kao G*a* prema *a*S, onda ćemo deljenjem dobiti da su G*a* – GA, ili A*a*, prema *a*S – AS, ili SH, u istom odnosu, i zbog toga će biti u odnosu u kojem osnovna osa figure koja se opisuje ima prema rastojanju od svojih žiža. Prema tome, opisana figura je istog oblika kao i figura koja će biti opisana. Pošto su KB prema BS i LC prema CS u istom odnosu, ova će figura proći kroz tačke B i C, kao što je jasno iz učenja o konusnim presecima.

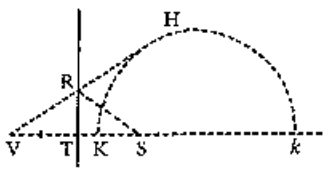


Slučaj 2. Oko žiže S potrebno je opisati putanju koja će negde dodirnuti dve prave linije TR i *tr*. Iz žiže ćemo na te tangente spustiti normale ST i *St* koje će nastaviti sve do tačaka V i *v*, tako da TV i *tv* mogu da budu jednaki sa TS i *t*S. Prepolovićemo pravu V*v* u tački O, podignućemo beskonačnu normalu OH, i preseći ćemo pravu liniju VS koja se beskonačno nastavlja prema K i *k*, tako da se VK prema KS i V*k* prema *k*S, odnose kao osnovna osa putanje koja treba da se opiše prema rastojanju njenih žiža. Na prečniku K*k* opisaćemo krug presecajući OH u tački H pomoću žiža S i H, i osnovne ose koja je jednaka sa VH, opisaćemo putanju. Tvrdim, stvar je rešena. Ako prepolovimo K*k* u tački X, i ako spojimo HX, HS, HV i H*v*, jer se VK prema KS odnosi kao V*k* prema *k*S, prema slaganju, kao VK + V*k* prema KS + *k*S; a prema deljenju, kao V*k* – VK



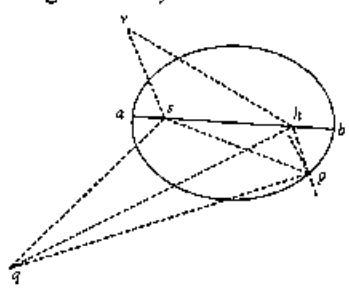
prema *k*S – KS, tj. kao 2VX prema 2KX, i 2KX prema 2SX, a stoga kao VX prema HX i HX prema SX, trouglovi VXH i HXS biće slični. Prema tome, VH će se prema SH odnositi kao VX prema XH, pa zbog toga kao VK prema KS. Osnovna osa opisane putanje VH odnosi se prema rastojanju žiže SH isto kao što se osnovna osa putanje koja treba da se opiše odnosi prema rastojanju svojih žiža, te su zbog toga istog oblika. Pošto su VH i *v*H jednaki sa osnovnom osom, a VS i *v*S su normalno prepolovljene pravim linijama TR, *tr*, jasno je (prema Lemi XV) da te prave linije dodiruju opisanu putanju. Q.E.F.

Slučaj 3. Oko žiže S potrebno je opisati putanju koja će dodirnuti pravu liniju TR u datoj tački R. Na pravu TR spustićemo



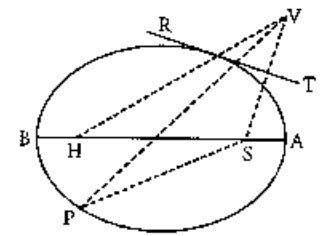
normalu ST, koja se nastavlja sve do tačke V, tako da TV može da bude jednako sa ST. Spojićemo VR i preseći ćemo, u tačkama K i *k*, pravu liniju VS koja se produžava u beskonačnost, tako da se VK može odnositi prema SK, i V*k* prema S*k*, kao što se osnovna osa elipse, koja će biti opisana, odnosi prema rastojanju svojih žiža. Na prečniku K*k*, koji opisuje krug, preseći ćemo pravu liniju VR koja se nastavlja do tačke H. Tada ćemo, sa žižama S i H, i osnovnom osom koja je jednaka sa VH, opisati putanju. Tvrdim, stvar je rešena. VH se prema SH odnosi isto kao VK prema SK, i prema tome, kao što se osnovna osa putanje, koja treba da se opiše, odnosi prema rastojanju svojih žiža (kao što sledi iz onoga što smo pokazali u Slučaju 2). Zbog toga, opisana putanja je istog oblika sa onom koja treba da se opiše. Međutim, to da će prava linija TR, pomoću koje je prepolovljen ugao VRS, dodirnuti putanju u tački R, jasno je iz svojstava konusnih preseka. Q.E.F.

Slučaj 4. Oko žiže S potrebno je opisati putanju APB koja će dodirnuti pravu liniju TR i proći kroz bilo koju datu tačku P bez tangente, i koja će biti slična sa figurom *apb*, koja je opisana pomo-



ću osnovne ose *ab* i žiža *s* i *h*. Na tangentu TR spustićemo normalu ST koja produžava do tačke V, tako da TV može da bude jednako sa ST. Kada su uglovi *hsq* i *shq* jednaki, oko tačke *q* kao centra, i sa intervalom koji će se odnositi prema *ab* kao što se SP odnosi prema VS, opi-

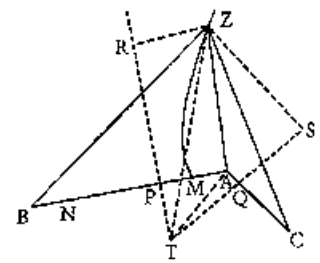
saćemo krug koji seče figuru *apb* u tački *p*, spojićemo *sp* i povući ćemo SH tako da se može odnositi prema *sh* kao SP prema *sp* i pomoću koje je ugao PSH jednak sa uglom *psh*, a ugao VSH jednak sa uglom *psq*. Onda, sa žižama S i H, i osnovnom osom AB, koja je jednaka sa rastojanjem VH, opisujemo konusni presek. Tvrdim, stvar je rešena. Jer, ako se *sv* povuče tako da se prema *sp* odnosi kao što se *sh* odnosi prema *sq*, i ako je tako ugao *vsp* jednak sa uglom *hsq*, a ugao *vsh* jednak sa uglom *psq*, trouglovi *svh* i *spq* će biti slični, i zbog toga će se *vh* prema *pq* odnositi kao *sh* prema *sq*, tj. (usled jednakih trouglova VSP i *hsq*) kao VS prema SP, ili kao *ab* prema *pq*. Iz toga sledi da su *vh* i *ab* jednaki. Međutim, usled sličnih trouglova VSH i *vsh*, VH se prema SH odnosi kao *vh* prema *sh*, tj. osa opisanog konusnog preseka odnosi se prema rastojanju svojih žiža kao što se osa *ab* odnosi prema rastojanju svojih žiža *sh*, i zbog toga je figura sada opisana slična sa figurom *aph*. Ali, pošto je trougao PSH sličan sa trouglom *psh*, ova figura prolazi kroz tačku P, a pošto je VH jednaka sa svojom osom, a VS je normalno prepolovljena pomoću prave linije TR, navedena figura dodiruje pravu liniju TR. Q.E.F.



LEMA XVI

Iz tri date tačke povući ćemo, prema četvrtoj tački koja nije data, tri prave linije čija je razlika data, ili je nema uopšte.

Slučaj 1. Neka date tačke budu A, B i C, a Z neka bude četvrta tačka koju treba pronaći. Usled date razlike između linija AZ i BZ, položaj tačke Z biće na hiperboli čije su žiže A i B, i čija je osnovna osa data razlika. Neka osa bude MN. Ako se PM prema MA odnosi kao MN prema AB, i kada podignemo normalu PR i spustimo ZR normalno na PR, onda će se, iz same prirode hiperbole, ZR odnositi prema AZ kao MN prema AB. I sličnim argumentom, položaj tačke Z biće na drugoj hiperboli, čije su žiže A i C, i čija je osnovna osa razlika između AZ i CZ, i prava QS može se povući normalno na AC. Ako iz bilo koje tačke Z ove



hiperbole spustimo normalu ZS, ta normala će se prema AZ odnositi kao razlika između AZ i CZ prema AC. Prema tome, odnosi ZR i ZS prema AZ su dati, kao i međusobni odnosi ZR i ZS. Zbog toga, ako se prave linije RP i SQ seku u tački T, a TZ i TA su povučene, figura TRZS biće data *in specie*, a prava linija TZ, na kojoj je smeštena tačka Z, biće data prema svojoj poziciji. Takođe, biće data i prava linija TA i ugao ATZ, a pošto su dati odnosi AZ i TZ prema ZS, njihov međusobni odnos je isto dat, onda će, na sličan način, biti dat i trougao ATZ, čiji je vrh u tački Z. Q.E.I.

Slučaj 2. Ako su dve od tri linije, na primer AZ i BZ, jednake, povući ćemo pravu liniju TZ tako da preseca pravu liniju AB na pola. Onda možemo pronaći trougao ATZ kao i u prethodnom slučaju. Q.E.I.

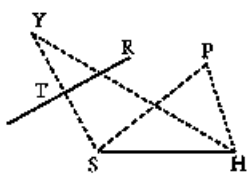
Slučaj 3. Ako su sve tri linije jednake, onda će tačka Z biti smeštena u centru kruga koji prolazi kroz tačke A, B i C. Q.E.I.

Ova problematična lema je na sličan način rešena u Apolonijevoj (Appollonius) knjizi *De Tactions*, koju je obnovio Vieta (F. Vieta).

PROPOZICIJA XXI. PROBLEM XIII

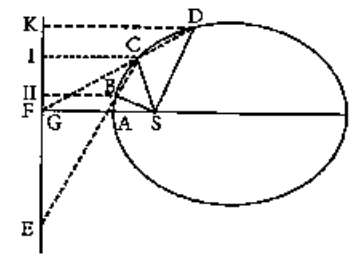
Oko date žiže opisaćemo putanju koja će proći kroz date tačke i dodirnuće prave linije koje su date prema poziciji.

Neka su dati žiža S, tačka P i tangenta TR, i pretpostavimo da se druga žiža H može pronaći. Spustićemo normalu ST na tangentu, koja se nastavlja sve do tačke Y, tako da TY može biti jednako sa ST, a YH biće jednako sa osnovnom osom. Ako spojimo SP i HP, SP će biti razlika između HP i osnovne ose. Na taj način, ako su više tangenti TR date, ili više tačaka P, uvek ćemo odrediti što je više linija YH ili PH, koje su povučene iz navedenih tačaka Y ili P, do žiže H, koja će ili biti jednaka sa osama, ili će se razlikovati od osa datom dužinom SP i zbog toga će one ili biti međusobno jednake ili će imati date razlike, odatle je (prema prethodnoj Lemi) data ta druga žiža H. Pošto su pronađene žiže i dužina ose (koja je ili YH, ili PH + SP, ako je putanja elipsa, ili PH – SP, ako je putanja hiperbola), data je i putanja. Q.E.I.



SHOLIJA

Kada je putanja hiperbola, ne smatram njenu konjugovanu hiperbolu pod ovom putanjom. Jer, telo koje se neprekidno kreće ne može nikada preći iz jedne hiperbole u njenu konjugovanu hiperbolu.



Slučaj se rešava lakše kada su date tri tačke. Neka B, C i D budu te date tačke. Spojićemo BC i CD i produžićemo ih do E i F, tako da se EB može odnositi prema EC kao što se SB odnosi prema SC, a FC prema FD kao SC prema SD. Ako na povučenu i produženu EF spustimo normale SG i BH, i u GS koja se beskonačno produžava imamo da se GA odnosi prema AS i G*a* prema *a*S kao HB prema BS, onda će A biti vrh, a A*a* osnovna osa putanje koja će u slučaju kada je GA veća, jednaka ili manja od AS, biti ili elipsa, ili parabola, ili hiperbola. Tačka *a* u prvom slučaju leži na istoj strani linije GF kao i tačka A. U drugom slučaju, ta se tačka udaljava do beskonačnosti, a u trećem slučaju, tačka leži na drugoj strani linije GF. Ako na liniju GF spustimo normale CI i DK, IC će se prema HB odnositi kao EC prema EB, tj. kao SC prema SB i permutacijom, IC će se prema SC odnositi kao HB prema SB, ili kao GA prema SA. Sličnim argumentom, možemo dokazati da se KD prema SD nalazi u istom odnosu. Zbog toga su tačke B, C i D, koje leže na konusnom preseku opisanom oko žiže S, na takav način da su sve prave linije povučene iz žiže S do tih nekoliko tačaka preseka i normala koja pada iz istih tih tačaka na pravoj liniji GF, u istom datom odnosu.

Izvrstan geometar M. de la Hire (M. de la Hire) je, u svom delu *Conics*, knjiga VIII, Prop. XXV, na isti način rešio ovaj problem, ali mnogo kasnije.

ODELJAK V

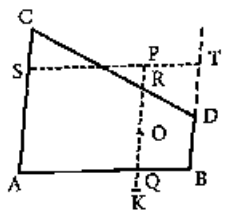
Kako pronaći orbite kada nije data nijedna žiža?

LEMA XVII

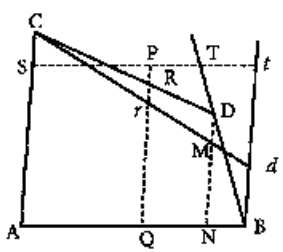
Ako iz bilo koje tačke P datog konusnog preseka, do četiri produžene strane AB, CD, AC i DB, bilo kog trapezoida upisanog u tom preseku, povučemo četiri

prave linije PQ, PR, PS i PT u datim uglovima, svaku liniju prema svakoj strani, pravougaonik PQ × PR na suprotnim stranama AB i CD nalaziće se prema pravougaoniku PS × PT koji se nalazi na drugim dvema suprotnim stranama AC i BD, u datom odnosu.

Slučaj 1. Na prvom mestu, pretpostavimo da su linije povučene prema jednom paru suprotnih strana paralelne sa bilo kojim drugim stranama. PQ i PR paralelne su sa stranom AC, a PS i PT sa stranom AB. Povrh toga, ako je jedan par suprotnih strana, AB i BD, međusobno paralelan, onda će prava linija, koja seče te paralelne strane na pola, biti jedan od prečnika konusnog preseka, a kao takva prepoloviće i RQ. Neka O bude tačka u kojoj je RQ prepolovljena, onda će PO biti ordinata tome prečniku. Produžićemo PO do tačke K, tako da OK može biti jednako sa PO, a OK će biti ordinata na drugoj strani tog prečnika. Pošto se, zbog toga, tačke A, B, P i K nalaze u konusnom preseku, a PK seče AB u datom uglu, pravougaonik PQK će biti (prema Apolonijevim *Konusnim presecima*, Knjiga III, Prop. XVII, XIX, XXI i XXIII) u datom odnosu sa pravougaonikom AQB. Međutim, QK i PR su jednake, pošto su razlike između jednakih linija OK, OP i linija OQ, OR. Tada su i pravougaonici PQK i PQ × PR jednaki, a zbog toga je pravougaonik PQ × PR u datom odnosu prema AB, tj. prema pravougaoniku PS × PT.

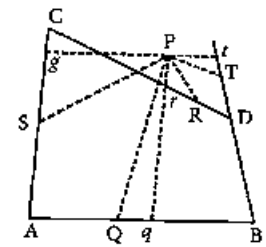


Slučaj 2. Potom, pretpostavimo da suprotne strane AC i BD trapezoida nisu paralelne. Povući ćemo B*d* paralelno sa AC, tako da seče pravu liniju ST u tački *t*, a konusni presek u tački *d*. Spojićemo C*d*, presecajući PQ u tački *r*, i povući ćemo DM paralelno sa PQ, presecajući C*d* u tački M, a AB u tački N. Onda će se (usled sličnih trouglova BT*t* i DBIN) B*t* ili PQ odnositi prema T*t* kao što se DN odnosi prema NB. Pa se tako R*r* prema AQ ili PS odnosi kao DM prema AN. Množenjem tih proporcija, kao što se pravougaonik PQ × R*r* odnosi prema pravougaoniku PS × T*t*, tako će se pravougaonik NDM odnositi prema pravougaoniku ANB, i kao što se (prema Slučaju 1) pravougaonik PQ × P*r* odnosi prema



PS × P*t*, a deljenjem ih proporcija, kao što se pravougaonik PQ × PR odnosi prema PS × PT. Q.E.D.

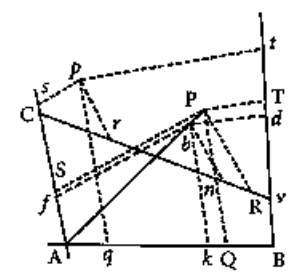
Slučaj 3. Na kraju, pretpostavimo da četiri linije PQ, PR, PS i PT nisu paralelne sa stranama AC i AB, ali su, ipak, zakošene prema njima. Na njihovom mestu povući ćemo P*q* i P*r* paralelno sa AC i P*s* i P*t* paralelno sa AB. Pošto su dati uglovi trouglova PQ*q*, PR*r*, PS*s* i PT*t*, odnosi PQ prema P*q*, PR prema P*r*, PS prema P*s*, PT prema P*t*, takođe će biti dati, pa su zbog toga dati i odnosi PQ × PR prema P*q* × P*r* i PS × PT prema P*s* × P*t*. Iz onoga što smo ranije pokazali, dat je odnos P*q* × P*r* prema P*s* × P*t*, pa je zato dat i odnos PQ × PR prema PS × PT. Q.E.D.



LEMA XVIII

Prema istoj pretpostavci, ako se pravougaonik PQ × PR, onih linija koje su povučene prema dvema suprotnim stranama trapezoida, nalazi u datom odnosu sa pravougaonikom PS × PT, onih linija koje su povučene prema drugim dvema stranama, tačka P, iz koje su povučene te linije, nalaziće se u konusnom preseku koji je opisan oko trapezoida.

Zamislimo da je konusni presek opisan prolazeći kroz tačke A, B, C i D i kroz bilo koju od beskonačnog broja tačaka P, recimo kroz tačku *p*. Tvrdim da će se tačka P uvek nalaziti na ovom preseku. Ako se to poriče, spojićemo AP presecajući konusni presek na nekom drugom mestu, ako je to moguće, ne u tački P, već u tački *b*. Ako iz tih tačaka *p* i *b* povučemo prave linije *pq*, *pr*, *ps*, *pt* i *bk*, *bn*, *bf*, *bd*, onda će se *pq* × *pr* prema *ps* × *pt*, kao i (prema pretpostavci) PQ × PR prema PS × PT, odnositi (prema Lemi XVII) kao *bk* × *bn* prema *bf* × *bd*. Usled sličnih trapezoida *bkAf* i PQAS, PQ će se prema PS odnositi kao *bk* prema *bf*. Podelom članova prethodne proporcije sa odgovarajućim članovima ove proporcije, dobijamo da se *bn* prema *bd* odnosi kao PR prema PT. Prema tome, trapezoidi jednakih uglova D*nbd* i DRPT

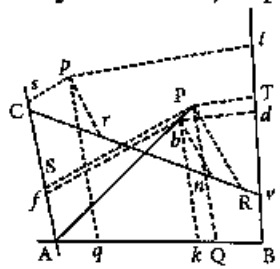


su slični, pa će se zbog toga njihove dijagonale, D*b* i DP, poklapati. Iz toga sledi da će se tačka *b*, koja se nalazi na preseku pravih linija AP i DP, poklopiti sa tačkom P. Tačka P, gde god da se nalazi, padaće na određenom konusnom preseku. Q.E.D.

Kor. Ako su tri linije PQ, PR i PS povučene iz zajedničke tačke P ka linijama AB, CD i AC, datih prema poziciji, svaka prema svakoj, i pod datim uglovima, i ako je pravougaonik PQ × PR, na bilo koje dve povučene linije, u datom odnosu sa kvadratom treće linije PS, tačka P, iz koje su povučene prave linije, biće smeštena na konusnom preseku koji dodiruje linije AB i CD, u tačkama A i C, i obrnuto. Pošto pozicije tri prave linije AB, CD i AC ostaju nepromenjene, neka linija BD prilazi ka liniji AC i poklapa se sa linijom AC; onda, neka se linija PT, na isti način, poklapa sa linijom PS, pa će pravougaonik PS × PT postati PS^2, a prave linije AB i CD, koje su ranije sekle krivu u tačkama A, B, C i D više se neće presecati, već će samo dodirivati krivu u tim poklapajućim tačkama.

SHOLIJA

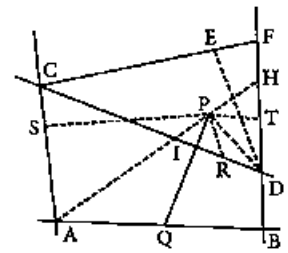
U ovoj lemi, naziv konusni presek treba razumeti u širem smislu, podrazumevajući pritom i pravolinijski presek kroz vrh konusa, kao i kružni presek koji je paralelan sa osnovom. Ako se tačka *p* nalazi na pravoj liniji, u kojoj su spojene tačke A i D, ili C i B, konusni presek će se promeniti u dve prave linije, od kojih je jedna linija na koju pada ta tačka *p*, a druga je ona prava linija koja spaja preostale dve od četiri tačke. Ako su dva suprotna ugla trapezoida zajedno jednaka kao dva prava ugla, i ako su četiri prave linije PQ, PR, PS i PT povučene da strana pod pravim uglovima, ili bilo kojim drugim jednakim uglovima, a pravougaonik PQ × PR, pod povučenim linijama PQ i PR, jednak sa pravougaonikom PS × PT, pod preostalim linijama PS i PT, onda će konusni presek biti krug. Ista stvar će se dogoditi, ako su četiri linije povučene pod bilo kojim uglovima, a pravougaonik se PQ × PR, pod jednim parom povučenih linija, prema pravougaoniku PS × PT, pod preostalim povučenim linijama, odnosi kao pravougaonik pod sinusima uglova S i T, na kojima su povučene dve poslednje linije PS i PT, prema pravougaoniku, pod sinusima uglova Q i R, u kojima su povučene prve dve linije PQ i PR. U svim drugim slučajevima, položaj tačke



P biće jedna od tri figure koje obično nazivamo konusnim presecima. Međutim, trapezoid ABCD možemo zameniti četvorostranom figurom čije se dve suprotne strane međusobno seku kao dijagonale. Možemo pretpostaviti da se jedna ili dve od četiri tačke A, B, C i D može pomeriti do beskonačnog rastojanja, pa će tako strane figure, koje se spajaju u tim tačkama, biti paralelne. U tom će slučaju konusni presek proći kroz ostale tačke, i nastaviće, kao i paralele, *in infinitum*.

LEMA XIX

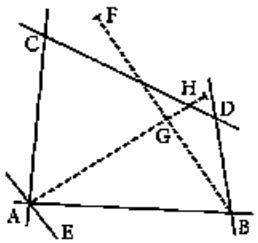
Pronaći tačku P iz koje su povučene četiri prave linije PQ, PR, PS i PT ka drugim pravim linijama AB, CD, AC i BD, međusobno datih prema poziciji, i pod datim uglovima, onda će se pravougaonik PQ × PR, pod bilo kojim dvema linijama povučenim, nalaziti u datom odnosu prema pravougaoniku PS × PT, pod preostalim povučenim linijama.



Pretpostavimo da linije AB i CD, ka kojima su povučene dve prave linije PQ i PR, koje sadrže jedan od pravougaonika, seku dve druge linije, date prema poziciji, u tačkama A, B, C i D. Iz jedne od njih, recimo tačke A, povući ćemo bilo koju pravu liniju AH, na kojoj ćemo pronaći tačku P. Neka ta prava linija seče suprotne strane BD i CD u tačkama H i I i pošto su dati svi uglovi figure, biće poznati i odnosi PQ prema PA i PA prema PS, kao i PQ prema PS. Deljenjem ovog odnosa sa datim odnosom PQ × PR prema PS × PT, biće dat i odnos PR prema PT i dodavajući date odnose PI prema PR i PT prema PH, odnos PI prema PH, a zbog toga i tačka P, biće dati. Q.E.I.

Kor. 1. Takođe, može se povući i tangenta ka bilo kojoj tački D, čiji je položaj, položaj svih tačaka P. Jer, tetiva PD, gde se dodiruju tačke P i D, tj. gde je AH povučeno kroz tačku D, postaje tangenta. U tom će slučaju krajnji odnosi nastalih linija IP i PH biti pronađeni kao i ranije. Zbog toga, ako povučemo CF paralelno sa AD, dodirujući BD u tački F, i presecajući je u tački E u istom krajnjem odnosu, onda će DE biti tangenta pošto su CF i nastala linija IH paralelne i slično se seku u tačkama E i P.

Kor. 2. Prema tome, položaj svih tačaka P može se odrediti. Kroz bilo koju tačku A, B, C, D, recimo A, povući ćemo AE koja dodiruje položaj, a kroz bilo koju drugu tačku B, paralelno sa tangentom, povući ćemo BF koja seče položaj u tački F i pomoću ove Leme pronaći ćemo tačku F. Presećanjem BF na pola, u tački G, i povlačenjem beskonačne linije AG, dobićemo poziciju prečnika kome su BG i FG ordinate. Neka AG seče položaj u tački H, i neka AH bude prečnik odnosno *latus transversum*, prema kome će se žižni parametar odnositi kao što se BG^2 odnosi prema AGH, GH. Ako AG nigde ne seče položaj i pošto je linija AH beskonačna, položaj će biti parabola i žižni parametar koji odgovara prečniku AG biće $\frac{BG^2}{AG}$. Međutim, ako je negde seče, položaj će biti hiperbola, i tad će se tačke A i H nalaziti na istoj strani tačke G, a elipsa će biti, ako se tačka G nalazi između tačaka A i H, osim, možda, ako je ugao AGB prav, i ako je istovremeno BG^2 jednako sa pravougaonikom AGH, u tom će slučaju položaj biti krug.



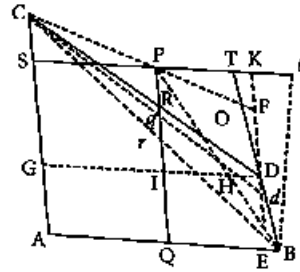
Tako je u ovom Korolaru dato rešenje za poznat problem u vezi sa četiri linije, koji je prvi istraživao Euklid, a nastavio Apolonije. Ovo ne predstavlja analitički proračun, već geometrijsku strukturu, kakvu su zahtevali stari.

LEMA XX

Ako dve suprotne ugaone tačke A i P bilo kog paralelograma ASPQ dodiruju bilo koji konusni presek u tačkama A i P, i ako strane AQ i AS, jednog od tih uglova, koje se beskonačno nastavljaju, seku isti konusni presek u tačkama B i C, i ako iz tačaka skupa B i C, ka bilo kojoj petoj tački D konusnog preseka, povučemo dve prave linije BD i CD tako da seku dve druge strane PS i PQ paralelograma, koje se beskonačno nastavljaju, u tačkama T i R, onda će delovi PR i PT uvek biti u datom odnosu. I, *vice versa*, ako se ti delovi nalaze u datom odnosu, položaj tačke D biće konusni presek koji prolazi kroz četiri tačke A, B, C i P.

Slučaj 1. Spojićemo BP i CP, i iz tačke D povući ćemo dve prave linije DG i DE, od kojih je prva DG paralelna sa AB i seče PB,

PQ i CA u tačkama H, I i G, a druga, DE, neka bude paralelna sa AC, i neka seče PC, PS i AB u tačkama F, K i E. Prema Lemi XVII pravougaonik DE × DF biće prema pravougaoniku DG × DH u datom odnosu. Međutim, PQ se prema DE (ili IQ) odnosi kao PB prema HB, pa zbog toga kao PT prema DH.



Pomoću permutacije PQ se prema PT odnosi kao DE prema DH. Na isti način, PR se prema DF odnosi kao RC prema DC i zbog toga kao PS (ili IG) prema DG, a pomoću permutacije PR se prema PS odnosi kao DF prema DG i množenjem tih proporcija, pravougaonik PQ × PR odnosiće se prema pravougaoniku PS × PT kao što se pravougaonik DE × DF odnosi prema pravougaoniku DG × DH, pa su prema tome u datom odnosu. Pošto su dati PQ i PS, takođe je dat i odnos PR prema PT. Q.E.D.

Slučaj 2. Ako pretpostavimo da su PR i PT u datom međusobnom odnosu, onda će sličnim rasuđivanjem slediti da je i odnos pravougaonika DE × DF prema pravougaoniku DG × DH dat. Na taj način će se tačka D (prema Lemi XVIII) nalaziti na konusnom preseku koji prolazi kroz tačke A, B, C i P. Q.E.D.

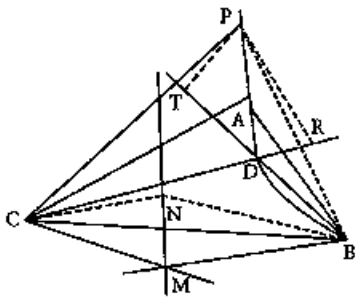
Kor. 1. Ako povučemo BC tako da seče PQ u tački *r*, i na PT uzmemo P*t* prema P*r* u istom odnosu koji PT ima prema PR, onda će B*t* dodirnuti konusni presek u tački B. Pretpostavimo da se tačka D spoji sa tačkom B, tako da tetiva BD nestane, BT će postati tangenta, a CD i BT će se poklopiti sa CB i B*t*.

Kor. 2. I, *vice versa*, ako je B*t* tangenta, a linije BD i CD se seku u bilo kojoj tački D konusnog preseka, PR će se prema PT odnositi kao P*r* prema P*t*. I, nasuprot tome, ako se PR prema PT odnosi kao P*r* prema P*t*, onda će se BD i CD seći u nekoj tački D konusnog preseka.

Kor. 3. Jedan konusni presek ne može seći drugi konusni presek u više od četiri tačke. Ako je moguće, neka dva konusna preseka prolaze kroz pet tačaka A, B, C, P i O i neka ih prava linija BD seče u tačkama D i *d*, i neka prava linija C*d* seče pravu liniju PQ u tački *q*. Zbog toga se PR prema PT odnosi kao P*q* prema PT. Prema tome, PR i P*q* su međusobno jednake, što je suprotno pretpostavci.

LEMA XXI

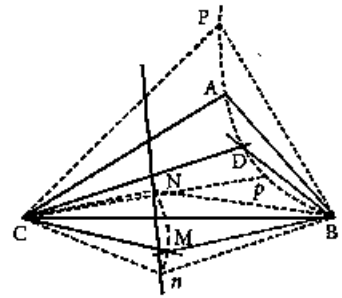
Ako dve pokretne i beskonačne prave linije BM i CM, koje su povučene kroz date tačke B i C (koje su polovi), pomoću tačke njihovog preseka M opisuju treću pravu liniju MN, datu prema poziciji, i ako su povučene dve druge prave linije BD i CD, koje zajedno sa prethodnim linijama i u tim datim tačkama B i C, daju uglove MBD i MCD – tvrdim da će te dve prave linije BD i CD pomoću njihove tačke preseka D opisivati konusni presek koji prolazi kroz tačke B i C. I, *vice versa*, ako prave linije BD i CD pomoću njihove tačke preseka D opisuju konusni presek koji prolazi kroz date tačke B, C i A, i ako je ugao DBM uvek jednak sa datim uglom ABC, kao što je ugao DCM uvek jednak sa datim uglom ACB – onda će se tačka M nalaziti na pravoj liniji datoj prema poziciji, kao svome položaju.



Neka je na pravoj liniji MN data tačka N, a kada pokretna tačka M padne na nepokretnu tačku N, neka pokretna tačka D padne na nepokretnu tačku P. Spojićemo CN, BN, CP i BP, i iz tačke P povući ćemo prave linije PT i PR koje seku BD i CD u tačkama T i R, i pomoću kojih je ugao BTP jednak sa datim uglom BNM, a ugao CPR jednak sa datim uglom CNM. Pošto su (prema pretpostavci) uglovi MBD I NBP jednaki, kao i uglovi MCD i NCP, ako sklonimo uglove NBD i NCD koji su zajednički, preostaće uglovi NBM i PBT i NCM i PCR koji su jednaki. Zbog toga su trouglovi NBM i PBT slini, kao i trouglovi NCM i PCR. Stoga se PT prema NM odnosi kao PB prema NB, a PR prema NM kao PC prema NC. Međutim, tačke B, C, N i P su pokretne, a zbog toga PT i PR imaju dat odnos prema NM, kao i dat međusobni odnos. Zato će se (prema Lemi XX) tačka D, u kojoj se pokretne prave linije BT i CR neprekidno poklapaju, nalaziti na konusnom preseku, prolazeći kroz tačke B, C i P. Q.E.D.

I, *vice versa*, ako se pokretna tačka D nalazi na konusnom preseku, prolazeći kroz date tačke B, C i A i ako je ugao DBM uvek

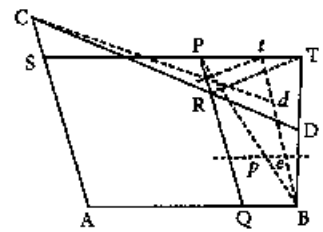
jednak datom uglu ABC, a ugao DCM uvek jednak datom uglu ACB, i kada tačka D uspešno padne na bilo koju od dve pokretne tačke *p* i P konusnog preseka, pokretna tačka M uspešno će pasti na dve nepokretne tačke *n* i N. Kroz ove tačke *n* i N povući ćemo pravu liniju *n*N. Ta linija *n*N biće stalni položaj te pokretne tačke M. Ako je moguće, neka tačka M bude smeštena na bilo koju krivu liniju. Zbog toga će se tačka D nalaziti na konusnom preseku, prolazeći kroz pet tačaka B, C, A, *p* i P, dok je tačka M stalno smeštena na krivoj liniji. Iz onoga što je pokazano ranije, tačka D će, takođe, biti smeštena na konusnom preseku, prolazeći kroz pet tačaka B, C, A, *p* i P, kada je tačka M stalno smeštena na pravoj liniji. Dva konusna preseka će proći kroz istih tih pet tačaka, što je protivno Kor. 3. Leme XX. Prema tome, apsurdno je pretpostaviti da se tačka M nalazi na krivoj liniji. Q.E.D.



PROPOZICIJA XXII. PROBLEM XIV

Opisati putanju koja će proći kroz pet datih tačaka.

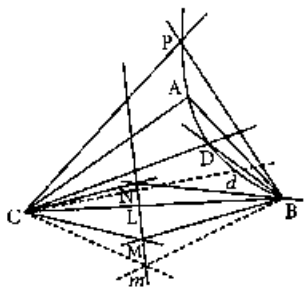
Neka pet datih tačaka budu A, B, C, P i D. Iz bilo koje od njih, recimo iz A, prema bilo kojim drugim dvema tačkama, recimo B i C, koje se mogu nazvati polovima, povući ćemo prave linije AB i AC i paralelno sa tim linijama povući ćemo linije TPS i PRQ kroz četvrtu tačku P. Onda ćemo iz dva pola, B i C, povući kroz petu tačku D dve beskonačne linije BDT i CRD koje seku poslednje povučene linije TPS i PRQ (prva sa prvom, a poslednja sa poslednjom) u tačkama T i R. Nakon toga, povući ćemo pravu liniju *tr* paralelnu sa TR, koja odseca sa pravih linija PT i PR bilo koji presek P*t* i P*r*, proporcionalne sa PT i PR. Ako kroz njihove krajeve, *t* i *r*, i polove B i C, povučemo prave linije B*t* i C*r*, koje se seku u tački *d*, ta tačka *d* nalaziće se na potrebnoj putanji. Tačka *d* se (prema Lemi XX) nalazi na konusnom preseku, prolazeći kroz četiri tačke A, B, C i P. Ako linije R*r* i T*t* nestaju, tačka *d* će se poklo-



piti sa tačkom D. Zbog toga konusni presek prolazi kroz pet tačaka A, B, C, P i D. Q.E.D.

Isto to na drugi način.

Od datih tačaka spojićemo bilo koje tri, recimo A, B i C i na dve tačke B i C, koje su polovi i pomoću kojih uglovi ABC i ACB date veličine kruže, stavićemo strane BA i CA, prvo na tačku D, a potom na tačku P i označićemo tačke M i N, u koje se druge strane BL i CL međusobno seku u oba slučaja. Povući ćemo beskonačnu pravu liniju MN i pustićemo da ti pokretni uglovi kruže oko njihovih polova B i C, na takav način da se presek strana BL i CL ili BM i CM, za koji se sad pretpostavlja da je u tački *m*, može uvek naći na toj beskonačnoj pravoj liniji MN. Presek strana BA i CA ili BD i CD, za koji se sad pretpostavlja da je u tački *d*, opisivaće potrebnu putanju, PAD*d*B. Tačka *d* će se (prema Lemi XXI) nalaziti na konusnom preseku, koji prolazi kroz tačke B i C i kada se tačka *m* poklapa sa tačkama L, M i N, tačka *d* će se (prema postavci) poklapati sa tačkama A, D i P. Zbog toga će konusni presek biti opisan tako što prolazi kroz pet tačaka A, B, C, P i D. Q.E.F.

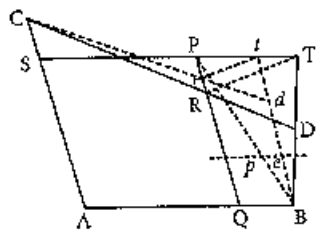


Kor. 1. Prava linija se lako može povući tako da bude tangenta putanji u bilo kojoj tački B. Neka se tačka *d* poklapa sa tačkom B, onda će prava linija B*d* postati potrebna tangenta.

Kor. 2. Odatle, takođe, mogu biti pronađeni centri, prečnici, i žižni parametri putanja, kao u Kor. 2. Leme XIX.

SHOLIJA

Prva od ovih postavki postaće unekoliko jednostavnija ako spojimo BP i ako na tu liniju, koja se produžava ako je to neophodno, položimo B*p*, koja se prema BP odnosi kao PR prema P*t* i ako kroz *p* povučemo neograničenu pravu liniju *pe* koja je paralelna sa SPT, a potom na toj liniji *pe*, pri čemu je *pe* uvek jednako sa P*r*, povučemo prave linije B*e* i C*r*, kako bi se sekle u tački *d*. Pošto

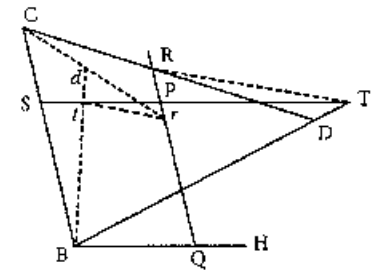


su P*r* prema P*t*, PR prema PT, *p*B prema PB i *pe* prema P*t* u istom odnosu, *pe* i P*r* će uvek biti jednaki. Na ovakav način najlakše je pronaći tačke putanje, osim ako biste radije opisali krivu mehanički, kao što je to slučaj u drugoj postavci.

PROPOZICIJA XXIII. PROBLEM XV

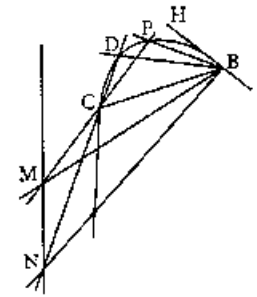
Opisati putanju koja će proći kroz četiri date tačke i dodirnuti pravu liniju datu prema poziciji.

Slučaj 1. Pretpostavimo da je HB data tangenta, B dodirna tačka, a C, D i P tri preostale date tačke. Spojićemo BC i povući ćemo PS paralelno sa BH, a PQ paralelno sa BC. Tada ćemo upotpuniti paralelogram BSPQ. Zatim ćemo povući BD koja seče SP u tački **T** i CD koja seče PQ u tački R. Na kraju, povući ćemo liniju *tr* paralelno sa TR, koja odseca od PQ i PS segmente P*r* i P*t* koji su proporcionalni sa PR i PT. Ako povučemo C*r* i B*t* njihova tačka preseka *d* uvek će se (prema Lemi XX) nalaziti na putanji koja se opisuje.

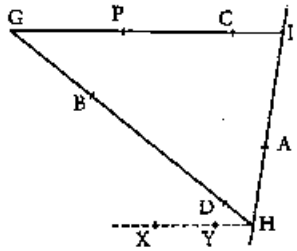


Isto to na drugi način.

Neka ugao CBH date veličine kruži oko pola B, kao što pravolinijski poluprečnik DC, produžen sa obe strane, kruži oko pola C. Označićemo tačke M i N, na kojima strana BC ugla seče poluprečnik, dok BH, druga strana tog ugla, seče isti poluprečnik u tačkama P i D. Potom ćemo povući neograničenu liniju MN i neka se poluprečnik CP ili CD i strana BC tog ugla neprekidno sreću u ovoj liniji. Onda će tačka preseka druge strane BH sa poluprečnikom opisivati potrebnu putanju.



Ako se, u postavci prethodnog Problema, tačka A približava tački B, linije CA i CB će se poklapati, a linija AB će, na kraju, postati tangenta BH. Zbog toga će tako zadata postavka biti ista sa postavkom koju sada opisujemo. Presek strane BH sa poluprečnikom opisaće konusni presek koji prolazi kroz tačke C, D i P i koji dodiruje liniju BH u tački B. Q.E.F.

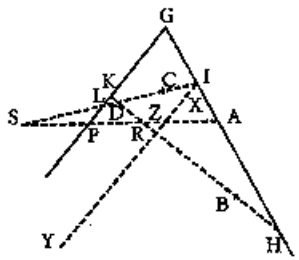


Slučaj 2. Pretpostavimo da se date četiri tačke B, C, D i P nalaze bez tangente HI. Spojićemo bilo koje dve tačke linijama BD i CP, koje se seku u tački G i presecaju tangente u tačkama H i L. Preseći ćemo tangentu u tački A na takav način da se HA može odnositi prema IA kao pravougaonik pod geometrijskom sredinom CG i GP i kao geometrijska sredina BH i HD prema pravougaoniku pod geometrijskom sredinom GD i GB i geometrijska sredina PI i IC, a tačka A će uvek biti dodirna tačka. Ako HX, koja je paralelna sa pravom linijom PI, seče putanju u bilo kojim tačkama X i Y, tačka A će biti (prema svojstvima konusnog preseka) na taj način smeštena, da će HA^2 prema AI^2 biti u odnosu koji je sastavljen od odnosa pravougaonika XHY prema pravougaoniku BHD, ili pravougaonika CGP prema pravougaoniku DGB, kao i odnosa pravougaonika BHD prema pravougaoniku PIC. Pošto je dodirna tačka A pronađena, putanja će biti opisana kao u Slučaju I. Međutim, tačka A može biti ili između tačaka H i I ili bez tih tačaka, usled čega se mogu opisati dve putanje. Q.E.F.

PROPOZICIJA XXIV. PROBLEM XVI

Opisati putanju koja će proći kroz tri date tačke i koja će dodirnuti dve date prave linije.

Pretpostavimo da su HI i KL date tangente, a B, C i D date tačke. Kroz bilo koje dve od tih tačaka, recimo B i D, povući ćemo neograničenu pravu liniju BD koja seče tangente u tačkama H i K. Na isti način ćemo, kroz bilo koje druge dve od tih talaka, recimo C i D, povući neograničenu pravu liniju CD koja seče tangente u tačkama I i L. Preseći ćemo povučene linije u tačkama R i S, tako da se HR može odnositi prema KR kao što se geometrijska sredina BH i HD odnosi prema geometrijskoj sredini BK i KD, a IS prema LS kao geometrijska sredina CI i ID prema geometrijskoj sredini CL i LD. Međutim, ukoliko želimo, možemo preseći linije ili unutar ili između tačaka K i H i I i L, ili bez njih. Onda ćemo povući RS presecajući tangente u tačkama A i P i tačke



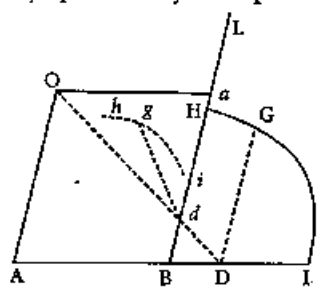
A i P će biti tačke dodira. Ako su tačke A i P pretpostavljene tačke dodira, smeštene bilo gde drugde na tangentama i ako kroz bilo koju tačku H, I, K ili L, recimo I, koja je smeštena na bilo kojoj tangenti HI, povučemo pravu liniju IY paralelno sa drugom tangentom KL, koja seče krivu u tačkama X i Y, onda ćemo na toj pravoj liniji imati IZ koja je jednaka geometrijskoj sredini IX i IY, a pravougaonik XIY ili IY^2 će se (prema svojstvima konusnog preseka) odnositi prema LP^2 kao što se pravougaonik CID odnosi prema pravougaoniku CLD, tj. (prema postavci) kao SI prema SL^2, pa se zbog toga IZ prema LP odnosi kao SI prema SL. Zato se tačke S, P i Z nalaze na jednoj pravoj liniji. Dalje, pošto se tangente seku u tački G, pravougaonik XIY ili IZ^2 će se (prema svojstvima konusnog preseka) odnositi prema IA^2 kao GP^2 prema GA^2 i zbog toga će se IZ prema IA odnositi kao GP prema GA. Prema tome, tačke P, Z i A nalaze se na jednoj pravoj liniji, pa se tako i tačke S, P i A nalaze na jednoj pravoj liniji. Zato se tačke dodira A i P nalaze na pravoj liniji RS. Kada se ove tačke pronađu, može se opisati putanja kao i u prvom slučaju prethodnog Problema. Q.E.F.

U ovoj propoziciji, kao i u Slučaju 2 prethodne propozicije, postavke su iste, bilo da prava linija XY seče putanju u tačkama X i Y, ili ne, niti te postavke zavise od tih preseka. Međutim, pokazane postavke u vezi su sa pravom linijom koja seče putanju, a postavke u kojima je ona ne seče, takođe su poznate. Zbog toga ću, zarad sažetosti, izostaviti njihova dalja dokazivanja.

LEMA XXII

Transformacija figura u druge figure iste vrste.

Pretpostavimo da će se bilo koja figura HGI transformisati. Povući ćemo, po želji, dve paralelne linije AO i BL, koje seku bilo koju treću liniju AB, datu prema poziciji, u tačkama A i B i iz bilo koje tačke G figure, povući ćemo bilo koju pravu liniju GD paralelnu sa OA, sve dok ne dodirne pravu liniju AB. Onda ćemo iz bilo koje date tačke O, na liniji OA, povući pravu liniju OD do tačke D, koja seče BL u tački *d* i iz tačke preseka podići ćemo pravu liniju *dg* koja zaklapa bilo koji dat ugao sa pravom linijom BL i koja ima takav odnos prema O*d* kao



što se DG odnosi prema OD i neka *g* bude tačka na novoj figuri *hgi*, koja odgovara tački G. I na takav način će nekoliko tačaka prve figure dati isti broj odgovarajućih tačaka nove figure. Ako zbog toga shvatimo da se tačka G naprestanim kretanjem premešta kroz sve tačke prve figure, tačka *g* će se na isti način naprestanim kretanjem premeštati kroz sve tačke nove figure i opisivaće istu. Razlike radi, nazvaćemo DG prvom ordinatom, *dg* novom ordinatom, AD prvom apscisom, *ad* novom apscisom, O polom, OD poluprečnikom preseka, OA prvom ordinatom poluprečnika, a O*a* (pomoću koje je upotpunjen paralelogram OAB*a*) novom ordinatom poluprečnika.

Onda, tvrdim da ako je tačka G smeštena na pravoj liniji datoj prema poziciji, tačka *g* će takođe biti smeštena na pravoj liniji datoj prema poziciji. Ako je tačka G smeštena na konusnom preseku, tačka *g* će, isto tako, biti smeštena na konusnom preseku. Ovde podrazumevam da je krug jedan od konusnih preseka. Dalje, ako je tačka G smeštena na liniji trećeg analitičkog reda, tačka *g* će takođe biti smeštena na liniji trećeg reda. To se dalje odnosi i na krive linije viših poredaka. Dve linije, na kojima su smeštene tačke G i *g*, uvek će biti istog analitičkog reda. Kao što se *ad* odnosi prema OA, tako se i O*d* odnosi prema OD, *dg* prema DG i AB prema AD. Zbog toga je AD jednaka sa $\frac{OA \times AB}{ad}$, a DG jednaka sa $\frac{OA \times dg}{ad}$. Ako je tačka G smeštena na pravoj liniji, u bilo kojoj od jednačina kojima su izraženi odnosi između apscise AD i ordinate GD, te neodređene linije AD i DG ne rastu više od prvog stepena, a zapisujući jednačinu $\frac{OA \times AB}{ad}$ umesto AD i $\frac{OA \times dg}{ad}$ umesto DG, nova jednačina će biti stvorena, u kojoj nova apscisa *ad* i nova ordinata *dg* rastu samo do prvog stepena i koje zbog toga moraju ukazivati na pravu liniju. Ako su AD i DG (ili bilo koja od njih) podignute do drugog stepena u prvoj jednačini, na isti način će *ad* i *dg* biti podignute do drugog stepena u drugoj jednačini. Isto tako i do viših stepena. Neodređene linije *ad* i *dg* u drugoj jednačini i AD i DG u prvoj, uvek će biti podignute za iste broj stepena, a zbog toga su linije na kojima su smeštene tačke G i *g* uvek istog analitičkog reda.

Dalje tvrdim da ako bilo koja prava linija dodiruje krivu liniju u prvoj figuri, ista prava linija, transformisana na isti način sa krivom linijom u novu figuru, dodirivaće tu krivu liniju u novoj figuri, i *vice versa*. Ako bi bilo koje dve tačke krive na prvoj figuri trebalo da prilaze međusobno sve dok se ne poklope, iste te tačke transformisane će međusobno prilaziti sve dok se ne poklope u novoj figuri.

Zbog toga će prave linije, sa kojima su spojene te tačke, zajedno postati tangente krivih u obema figurama. Možda sam mogao dokazima ovih tvrdnji dati više geometrijski oblik. Međutim, težim ka sažetosti.

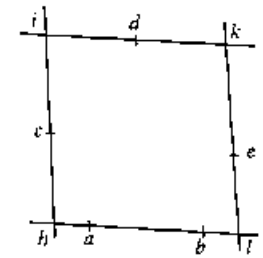
Ako se jedna pravolinijska figura transformiše u drugu, dovoljno je da prebacimo tačke preseka pravih linija, od kojih se sastoji prva figura i da kroz te preseke povučemo prave linije u novoj figuri. Međutim, ako transformišemo krivolinijsku figuru, moramo prebaciti tačke, tangente i ostale prave linije, pomoću kojih je krivolinijska figura definisana. Ova Lema je korisna u rešavanju mnogo težih problema. Na takav način možemo transformisati predložene figure, ako su komplikovane, u neke druge koje su jednostavnije. Zbog toga, bilo koje prave linije koje se spajaju u jednoj tački transformisane su u paralele, tako što se za poluprečnik prve ordinate uzima bilo koja prava linija koja prolazi kroz tačku preseka linija koje se spajaju i zato što se njihova tačka preseka na ovaj način udaljava *in infinitum*, a paralelne linije su takve da teže ka tački koja je beskonačno udaljena. I pošto je problem rešen u novoj figuri, ako pomoću obrnutih operacija transformišemo novu figuru u prvu, imaćemo i to potrebno rešenje.

Ova Lema je, takođe, korisna pri rešavanju težih problema. Koliko god da se pojavljuju dva konusna preseka, čijim se presecanjem može rešiti problem, bilo koji od njih se može transformisati, ako je u pitanju hiperbola ili parabola, u elipsu, a ta se elipsa, onda, može lako transformisati u krug. Isto se tako i prava linija i konusni presek, prilikom postavki lakših problema, mogu transformisati u pravu liniju i krug.

PROPOZICIJA XXV. PROBLEM XVII

Opisati putanju koja će proći kroz dve date tačke i dodirnuti tri prave linije date prema poziciji.

Preko tačke preseka bilo koje dve tangente, jedne sa drugom i preko tačke preseka treće tangente sa pravom linijom koja prolazi kroz dve date tačke, povući ćemo neograničenu pravu liniju. Uzimajući ovu liniju za poluprečnik prve ordinate, transformisaćemo figuru, prema prethodnoj Lemi, u novu figuru. U toj će figuri dve



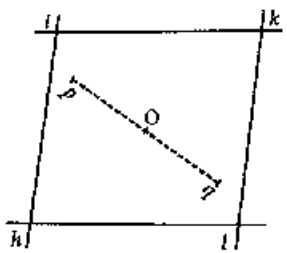
tangente postati međusobno paralelne, a treća tangenta će biti paralelna sa pravom linijom koja prolazi kroz dve date tačke. Pretpostavimo da su *hi* i *kl* te dve paralelne tangente, da je *ik* treća tangenta, a *hl* prava linija paralelna sa njom, koja prolazi kroz tačke *a* i *b*, kroz koje će morati da prođe konusni presek u novoj figuri. Dovršavajući paralelogram, *hikl*, neka prave linije *hi*, *ik* i *kl* seku u tačkama *c*, *d* i *e*, tako da se *hc* može odnostiti prema kvadratnom korenu pravougaonika *ahb*, *ic* prema *id*, i *ke* prema *kd*, kao zbir pravih linija *hi* i *kl* prema zbiru tri linije, od kojih je prva prava linija *ik*, a ostale dve su kvadratni koren pravougaonika *ahb* i *alb*, tada će tačke *c*, *d* i *e* biti tačke dodira. Prema svojstvima konusnih preseka, u istom su odnosu hc^2 prema pravougaoniku *ahb*, i ic^2 prema id^2, i ke^2 prema kd^2, i el^2 prema pravougaoniku *alb*. Zbog toga su *hc* prema kvadratnom korenu iz *ahb*, i *ic* prema *id*, i *el* prema kvadratnom korenu iz *alb* proporcionalni sa kvadratnim korenom tog odnosa, i slaganjem, u datom odnosu zbira svih brojilaca $hi + kl$ prema zbiru svih imenilaca $\sqrt{ahb} + ik + \sqrt{alb}$. Prema tome, iz tog datog odnosa dobijamo tačke dodira *c*, *d* i *e* u novoj figuri. Pomoću obrnutih operacija iz prethodne Leme, neka te tačke budu transformisane u prvu figuru, pa će putanja biti opisana pomoću Problema XIV. Q.E.F

Međutim, pošto se tačke *a* i *b* nalaze između tačaka *k* i *l*, ili izvan njih, tačke *c*, *d* i *e* će se nalaziti ili između tačaka *h*, *i*, *k* i *l* ili izvan njih. Ako se jedna od tačaka *a* ili *b* nalazi između tačaka *h* i *l*, a druga izvan tih tačaka, Problem je nemoguć.

PROPOZICIJA XXVI. PROBLEM XVIII

Opisati putanju koja će proći kroz datu tačku i dodirnuti četiri prave linije date prema poziciji.

Iz zajedničkih preseka bilo koje dve tangente prema zajedničkom preseku druge dve, povući ćemo neograničeno pravu liniju.



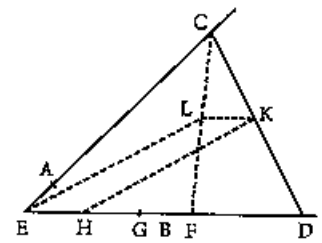
Uzimajući tu liniju za poluprečnik prve ordinate, transformisaćemo figuru (prema Lemi XXII) u novu figuru, a dva para tangenti, od kojih se svaka prvobitno poklapala sa poluprečnikom prve ordinate, postaće paralelna. Neka *hi* i *kl*, *ik* i *hl* budu ti parovi paralela koji će upotpuniti paralelogram *hikl*. I neka

tačka *p* bude tačka u ovoj novoj figuri, a koja odgovara datoj tački iz prve figure. Kroz centar O figure, povući ćemo *pq*: pošto je O*q* jednako sa O*p*, *q* će biti druga tačka kroz koju će konusni presek morati da prođe u novoj figuri. Ako se ova tačka prebaci, pomoću obrnutih operacija iz Leme XXII, u novu figuru, tada ćemo imati dve tačke kroz koje će putanja biti opisana. Kroz te tačke putanja se može opisati i pomoću Prop. XVII.

LEMA XXIII

Ako se dve prave linije, recimo AC i BD, date prema poziciji i koje se završavaju u datim tačkama A i B, nalaze u datom međusobnom odnosu, i ako je prava linija CD, pomoću koje su spojene date neodređene tačke C i D i koja je presečena u tački K, takođe, u datom odnosu – tvrdim da će se tačka K nalaziti na pravoj liniji datoj prema poziciji.

Neka se prave linije AC i BD seku u tački E, a na BE uzmimo da se BG odnosi prema AE kao BD prema AC i neka FD uvek bude jednako sa datom linijom EG. Pomoću postavke dobijamo da će se EC odnositi prema GD, tj. prema EF, kao AC prema BD, pa su zato u datom odnosu. Prema tome, trougao EFC će zadržati svoj oblik. Neka je CF presečena u tački L tako da se CL prema CF može odnositi kao CK prema CD.



Pošto je to dat odnos, trougao EFL će zadržati svoj oblik, pa će tačka L biti smeštena na pravoj liniji EL, datoj prema poziciji. Ako spojimo LK, trouglovi CLK i CFD će biti slični. Pošto je FD data linija, a odnos LK prema FD je dat odnos, LK će takođe biti data. Ako uzmemo da su EH i LK jednake, ELKH će uvek biti paralelogram. Zbog toga će se tačka K uvek nalaziti na strani HK (datoj prema poziciji) tog paralelograma. Q.E.D.

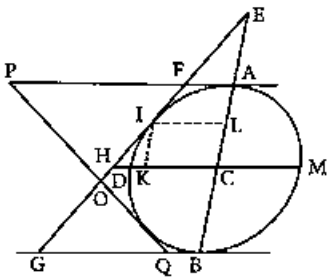
Kor. Pošto je oblik figure EFLC sačuvan, tri prave linije EF, EL i EC, tj. GD, HK i EC, imaće dat međusoban odnos.

LEMA XXIV

Ako tri prave linije, od kojih su dve paralelne, i koje su date prema poziciji, dodiruju bilo koji konusni presek,

tvrdim da je poluprečnik preseka, koji je paralelan sa tim dvema tangentama, geometrijska sredina segmenata one dve tangente koje se nalaze između tačaka dodira i treće tangente.

Neka AF i GB budu dve paralele koje dodiruju konusni presek ADB u tačkama A i B, a EF treća prava linija koja dodiruje konusni presek u tački I i koja seče prve dve tangente u tačkama F i G i neka CD bude poluprečnik figure koji je paralelan sa tim tangentama. Tvrdim da su AF, CD i BG stalno proporcionalne.



Ako konjugovani prečnici AB i DM seku tangentu FG u tačkama E i H i ako se međusobno seku u tački C i ako je paralelogram IKCL upotpunjen, onda će se, iz prirode konusnih preseka, EC odnositi prema CA, kao CA prema CL. Deljenjem dobijamo da se EC – CA prema CA – CL, ili EA prema AL, kao i slaganjem, da se EA prema EA + AL, ili EL, odnose kao EC prema EC + CA ili EB; prema tome, AF će se prema LI (zbog sličnosti trouglova EAF, ELI, ECH, EBG) odnositi kao CH prema BG. Na sličan način, iz prirode konusnih preseka, LI (ili CK) će se prema CD odnositi kao CD prema CH i zbog toga (*ex aequo perturbate*), AF se prema CD odnosi kao CD prema BG. Q.E.D.

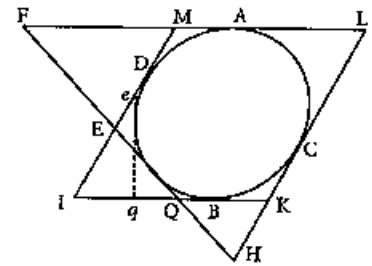
Kor. 1. Ako dve tangente FG i PQ seku dve paralelne tangente AF i BG u tačkama F, G, P i Q, i ako se međusobno seku u tački O, onda će se (*ex aequo perturbate*) AF prema BQ odnositi kao AP prema BG, a posle deljenja, kao FP prema GQ, pa zbog toga kao FO prema OG.

Kor. 2. Odatle sledi da će se tačka preseka dve prave linije PG i FQ, povučene kroz tačke P i G, F i Q, nalaziti na pravoj liniji ACB, koja prolazi kroz centar figure i kroz tačke dodira, A i B.

LEMA XXV

Ako četiri neograničeno produžene strane paralelograma dodiruju bilo koji konusni presek, i ako su presečene petom tangentom, uzimajući u obzir one segmente bilo koje dve podudarne strane koje se završavaju na suprotnim uglovima paralelograma,

tvrdim da se bilo koji segment odnosi prema strani iz koje je odsečen, kao što se deo druge podudarne strane, koja je zahvaćena između tačaka dodira i treće strane, odnosi prema drugom segmentu.



Neka četiri strane ML, IK, KL i MI paralelograma MLIK dodiruju konusni presek u tačkama A, B, C i D i neka peta tangenta FQ seče te strane u tačkama F, Q, H i E. Razmatrajući segmente ME i KQ strana MI i KI, ili segmente KH i MF strana KL i ML, tvrdim da se ME prema MI odnosi kao BK prema KQ, a KH prema KL kao AM prema MF. Prema Kor. 1. prethodne Leme, ME se prema EI odnosi kao BK (ili AM) prema BQ i, prema slaganju, ME se prema MI odnosi kao BK prema KQ. Q.E.D.

Takođe, KH se prema HL odnosi kao AM (ili BK) prema AF i, prema diviziji, KH se prema KL odnosi kao AM prema MF. Q.E.D.

Kor. 1. Ako je dat paralelogram IKLM opisan oko datog konusnog preseka, takođe će biti dati i pravougaonik KQ × ME, kao i njemu jednak pravougaonik KH × MF. Ti su pravougaonici jednaki zbog sličnih trouglova KQH i MFE.

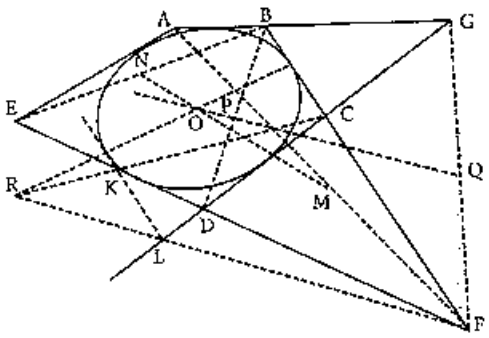
Kor. 2. Ako povučemo šestu tangentu *eq* koja seče tangente KI i MI u tačkama *q* i *e*, pravougaonik KQ × ME biće jednak pravougaoniku K*q* × M*e*, a KQ će se prema M*e* odnositi kao K*q* prema ME, tj. deljenjem, kao Q*q* prema E*e*.

Kor. 3. Takođe, ako su E*q* i *e*Q spojene i presečene na pola, a prava linija je povučena kroz tačke tog preseka, ta će prava linija proći kroz cenar konusnog preseka. Pošto se Q*q* prema E*e* odnosi kao KQ prema M*e*, ista prava linija će proći kroz sredinu svih linija E*q*, *e*Q i MK (prema Lemi XXIII), a središnja tačka prave linije MK je centar preseka.

PROPOZICIJA XXVII. PROBLEM XIX

Opisati putanju koja može dodirnuti pet pravih linija datih prema poziciji.

Pretpostavimo da su ABG, BCF, GCD, FDE i EA tangente date prema poziciji. Prepolovićemo, u tačkama M i N, dijagonale AF i BE



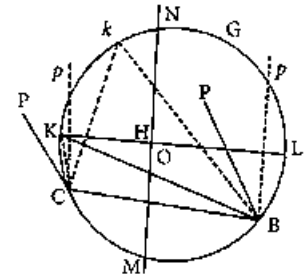
četvorostrane figure ABPE, koja je sadržana pod bilo koje četiri tangente. Prema Kor. 3 Leme XXV prava linija MN koja je povučena kroz tačke preseka proći će kroz centar putanje. Opet, ako prepolovimo, u tačkama P i Q, dijagonale (ako ih tako mogu nazvati) BD i GF četvorostrane figure BGDF koja je sadržana pod bilo koje druge četiri tangente, prava linija PQ koja je povučena kroz tačke preseka proći će kroz centar putanje. Zbog toga će centar biti dat na preseku linija PQ i MN. Pretpostavimo da je on u tački O. Paralelno sa bilo kojom tangentom BC povući ćemo KL tako da se centar O može nalaziti na sredini rastojanja između paralela. Linija KL dodirnuće putanju koja treba da se opiše. Neka ona preseca bilo koje druge dve tangente GCD i FDE u tačkama L i K. Kroz tačke C i K, F i L, u kojima se tangente koje nisu paralelne, CL i FK, seku sa paralelnim tangentama CF i KL, povući ćemo CK i FL koje se seku u tački R. Prava linija OR koja je povučena i produžena, seći će paralelne tangente CF i KL u tačkama dodira. Ovo sledi iz Kor. 2 Leme XXIV. Istom metodom mogu se pronaći ostale tačke dodira, i tada bi se putanja mogla opisati pomoću Problema XIV. Q.E.F.

SHOLIJA

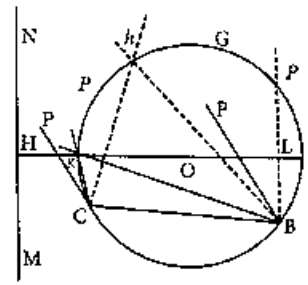
Pod prethodnim propozicijama podrazumevaju se oni problemi u kojima su dati ili centri ili asimptote putanja. Kada su date tačke, tangente i centar, isto toliko tačaka i tangenti date su na jednakom rastojanju sa druge strane centra. Asimptota se može smatrati tangentom, a njen beskonačno udaljen kraj (ako tako možemo reći) jeste tačka dodira. Ako zamislimo da je tačka dodira bilo koje tangente udaljena *in infinitum*, tangenta će se pretvoriti u asimptotu, a postavke prethodnih problema promeniće se u postavke onih problema sa datom asimptotom.

Pošto je putanja opisana, možemo na ovaj način pronaći njene ose i žiže. Prema postavci i figuri iz Leme XXI, neka strane BP i CP, pokretnih uglova PBN i PCN, pomoću čijih preseka je opisana

putanja, budu međusobno paralelne. Zadržavajući taj položaj, neka kruže oko njihovih polova B i C na toj figuri. U međuvremenu, neka druge strane CN i BN, tih uglova, presecanjem u tačkama K ili *k*, opisuju krug BKGC. Neka O bude centar tog kruga. Iz tog centra, na pravu MN, na kojoj se seku strane CN i BN prilikom opisivanja putanje, spustićemo normalu OH koja seče krug u tačkama K i L. I kada se te druge strane CK i BK seku u tački K koja je najbliža pravoj, prve strane CP i BP biće paralelne sa većom osom, a normalne na manju, a suprotno će se desiti ako se te strane seku u najudaljenijoj tački L. Ako je centar putanje dat i ose će biti date, a kada su i one date, lako se mogu pronaći žiže.



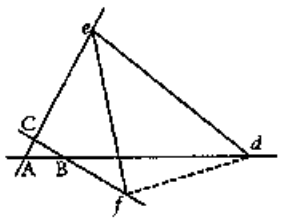
Kvadrati osa međusobno se odnose kao KH prema LH i zato je lako opisati putanju, kao što je ta, preko četiri date tačke. Ako dve od datih tačaka čine polove C i B, treća će dati pokretne uglove PCK i PBK. Kada su oni dati, krug BGKC se može opisati. Zatim, pošto je putanja data, biće dati i odnosi OH prema OK, kao i OH prema samoj sebi. Oko centra O, sa intervalom OH, opisaćemo drugi krug, pa će prava linija koja dodiruje taj krug i koja prolazi kroz tačku preseka strana CK i BK dok se prve strane CP i BP seku u četvrtoj datoj tački, biti zapravo prava MN, pomoću koje se putanja može opisati. S druge strane, trapezoid kao što je taj (osim u nekoliko slučajeva kad je to nemoguće) može se upisati u datom konusnom preseku.



Postoje, takođe, i druge leme pomoću kojih se putanje datog oblika mogu opisati preko datih tačaka, koje dodiruju date linije. Takve vrste je i sledeća lema: ako je prava linija povučena kroz bilo koju tačku datu prema položaju, i koja može seći dati konusni presek u dvema tačkama, i ako je rastojanje preseka prepolovljeno, onda će tačka preseka dodirnuti drugi konusni presek iste vrste kao što je i prethodni i njegove ose biće paralelne sa osama prethodnog preseka. Međutim, stremim ka korisnijim stvarima.

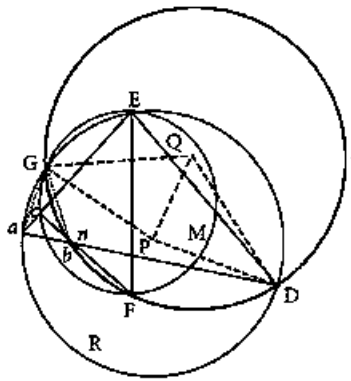
LEMA XXVI

Postaviti tri ugla trougla, datih prema vrsti i veličini, u pogledu isto toliko pravih linija datih prema položaju, pod uslovom da nisu sve međusobno paralelne, na takav način da nekoliko uglova može dodirivati nekoliko linija.



Tri neodređene linije AB, AC i BC date su prema položaju i neophodno je postaviti trougao DEF tako da njegov ugao D može dodirnuti liniju AB, ugao E liniju AC, a njegov ugao F liniju BC. Oko DE, DF i EF opisaćemo tri segmenta krugova DRE, DGF i EMF, sa uglovima koji mogu biti jednaki uglovima BAC, ABC i ACB, određenim redom. Ti segmenti opisaće se na takvoj strani linija DE, DF i EF, tako da sled slova DRED može biti jednak sa sledom slova BACB, DGFD jednak sa ABCA, a EMFE jednak sa ACBA. Pošto smo upotpunili te segmente u cele krugove, neka se prva dva kruga međusobno seku u tački G i pretpostavimo da su tačke P i Q njihovi centri. Zatim, kada spojimo GP i PQ, uzmimo da se G*a* prema AB odnosi kao GP prema PQ i oko centra G, sa intervalom G*a*, opisaćemo krug koji može seći prvi krug DGE u tački *a*. Spojićemo *a*D, koja seče drugi krug DFG u tački *b*, kao što *a*E seče treći krug EMF u tački *c*. Kada upotpunimo figuru ABC*def* koja je slična i jednaka sa figurom *abc*DEF – tvrdim, stvar je rešena.

Kada povučemo F*c*, koja seče *a*D u tački *n* i kada spojimo *a*G, *b*G, QG, QD i PD, prema postavci, ugao E*a*D biće jednak uglu CAB, a ugao *ac*F uglu ACB. Zbog toga su trouglovi *anc* i ABC jednakougaoni. Kada su uglovi *anc* ili F*n*D jednaki sa uglom ABC, pa zato i sa uglom F*b*D, tačka *n* se poklapa sa tačkom *b*. Zatim, ugao GPQ, koji iznosi polovinu ugla GPD na centru, jednak je sa uglom G*a*D na obimu, a ugao GQP, koji iznosi polovinu ugla GQD na centru, jednak je dopuni do dva prava ugla od ugla G*b*D na obimu, a zato je jednak sa uglom G*ba*. Stoga su

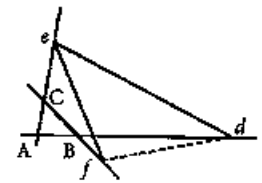


trouglovi GPQ i G*ab* slični, a G*a* se prema *ab* odnosi kao GP prema PQ, tj. (prema postavci) kao G*a* prema AB. Kada su *ab* i AB jednaki, trouglovi *abc* i ABC, za koje smo sad dokazali da su slični, takođe su jednaki. Pošto uglovi D, E i F trougla DEF određenim redom dodiruju strane *ab*, *ac* i *bc* trougla *abc*, figura ABC*def* može se upotpuniti tako da bude slična i jednaka sa figurom *abc*DEF, i na taj način Problem će biti rešen. Q.E.F.

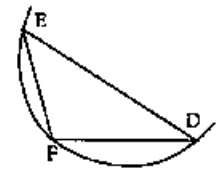
Kor. Prema tome, može se povući prava linija čiji se delovi, koji su dati prema dužini, mogu seći između tri prave linije date prema položaju. Pretpostavimo da će se trougao DEF, čija tačka D pada na stranu EF i čije su strane DE i DF postavljene *in directum*, promeniti u pravu liniju čiji će dati deo DE biti smešten između pravih linija AB i AC datih prema položaju, a dati deo DF biće smešten između pravih linija AB i BC datih prema položaju. Onda će, primenom prethodne postavke na ovaj slučaj, Problem biti rešen.

PROPOZICIJA XXVIII. PROBLEM XX

Opisati putanju, date vrste i veličine, čiji će dati delovi biti smešteni između tri prave linije date prema položaju.



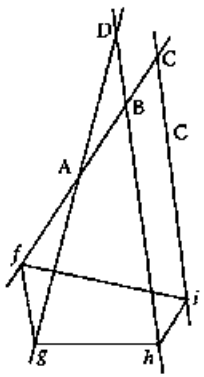
Pretpostavimo da putanja, koja se opisuje, može biti slična i jednaka sa krivom linijom DEF i da je mogu preseći tri prave linije AB, AC i BC, date prema položaju, na delove DE i EF, koji su slični i jednaki sa datim delovima ove krive linije.



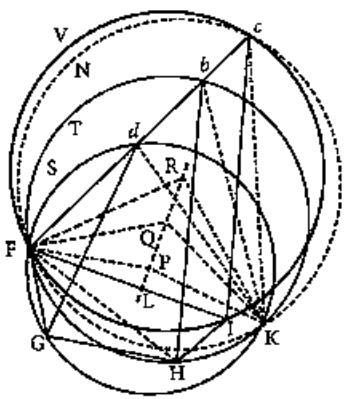
Povući ćemo prave linije DE, EF i DF i postavićemo uglove D, E i F trougla DEF, tako da dodiruju te prave linije date prema položaju (prema Lemi XXVI). Onda ćemo oko trougla opisati putanju, sličnu i jednaku sa krivom DEF. Q.E.F.

LEMA XXVII

Opisati trapezoid date vrste, čiji se uglovi mogu postaviti, u pogledu četiri prave linije date prema položaju, tako da nisu međusobno paralelni niti da se spajaju u jednu zajedničku tačku, tj. tako da nekoliko uglova može dodirnuti nekoliko linija.

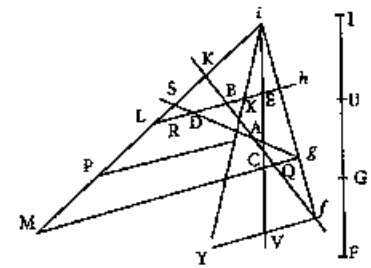


Neka su četiri prave linije ABC, AD, BD i CE date prema položaju i neka prva seče drugu u tački A, treću u tački B, a četvrtu u tački C i pretpostavimo da se trapezoid *fghi* opisuje tako da može biti sličan sa trapezoidom FGHI, čiji ugao *f*, koji je jednak sa uglom F, može dodirnuti pravu liniju ABC, a ostali uglovi *g*, *h* i *i*, koji su jednaki sa ostalim datim uglovima G, H i I, mogu dodirnuti ostale linije AD, BD i CE, određenim redom. Spojićemo FH, i oko FG, FH i FI opisaćemo isto toliko segmenata krugova FSG, FTH i FVI, od kojih prvi FSG može da se prilagodi kao ugao koji je jednak uglu BAD; drugi segment FTH uglu koji je jednak uglu CBD; a treći FVI uglu koji je jednak uglu ACE. Te segmente treba opisati prema onim stranama linija FG, FH i FI, tako da se slova FSGF, FTHF i FVIF mogu napisati određenim redosledom kao BADB, CBDC i ACEA. Upotpunićemo segmente u cele krugove i neka P bude centar prvog kruga FSG, a Q centar drugog kruga FTH. Spojićemo i produžićemo sa obe strane liniju PQ i na njoj ćemo uzeti QR tako da se odnosi prema PQ kao BC prema AB. Međutim, QR se mora položiti na takvu stranu tačke Q kako bi redosled slova P, Q i R mogao biti isti sa redosledom slova A, B i C, i oko centra R, sa intervalom RF, opisaćemo četvrti krug FN*c* koji seče treći krug FVI u tački *c*. Spojićemo F*c* tako da seče prvi krug u tački *a*, a drugi u tački *b*. Povući ćemo *a*G, *b*H i *c*I i neka figura ABC*fghi* bude slična figuri *abc*FGHI. Onda će trapezoid *fghi* biti onaj koji je neophodno opisati.



Neka se dva prva kruga FSG i FTH međusobno seku u tački K. Spojićemo PK, QK, RK, *a*K, *b*K i *c*K i produžićemo QP do tačke L. Uglovi F*a*K, F*b*K i F*c*K na obimu iznose polovinu uglova FPK, FQK i FRK na centrima i jednaki su sa LPK, LQK i LRK, koji iznose polovinu tih uglova. Zbog toga je figura PQRK jednakougaona i slična sa figurom *abc*K, pa se *ab* prema *bc* odnosi kao PQ prema QR, tj. kao AB prema BC. Međutim, prema postavci, uglovi *f*A*g*, *f*B*h* i *f*C*i* jednaki su sa uglovima F*a*G, F*b*H i F*c*I. Zato se figura ABC može upotpuniti tako da bude slična sa figurom *abc*FGHI. Posle toga, trapezoid *fghi* će biti sličan sa trapezoidom FGHI i koji će sa svojim uglovima *f*, *g*, *h* i *i* dodirnuti prave linije ABC, AD, BD i CE. Q.E.F.

Kor. Odatle sledi da se može povući prava linija čiji se delovi seku datim redom između četiri prave linije koje su date prema položaju i koji će imati međusobno datu proporciju. Neka su uglovi FGH i GHI toliko uvećani da se prave linije FG, GH i HI mogu nalaziti *in directum*. Postavljajući Problem u ovom slučaju, prava linija *fghi* će biti povučena, čiji se delovi *fg*, *gh* i *hi* seku između četiri prave linije date prema položaju. AB i AD, AD i BD, BD i CE međusobno će se odnositi kao linije FG, GH i HI i zadržaće isti međusobni redosled. Međutim, ista stvar može se lakše rešiti na sledeći način.



Produžićemo AB do tačke K, a BD do tačke L, tako da se BK može odnositi prema AB kao HI prema GH, a DL prema BD kao GI prema FG i spojićemo KL koja seče pravu liniju CE u tački *i*. Produžićemo *i*L do tačke M, tako da se LM može odnositi prema *i*L kao GH prema HI. Potom ćemo povući MQ paralelno sa LB, koja seče pravu liniju AD u tački *g* i spojićemo *gi* koja seče AB i BD u tačkama *f* i *h*. Tvrdim, stvar je rešena.

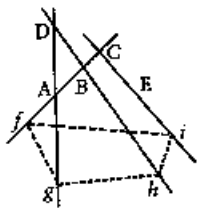
Neka M*g* seče pravu liniju AB u tački Q, a AD pravu liniju KL u tački S i povući ćemo AP paralelno sa BD, presecajući *i*L u tački P. Tada će u istom odnosu biti *g*M prema L*h*, *gi* prema *hi*, M*i* prema L*i*, GI prema HI, AK prema BK i AP prema BL. Preseći ćemo DL u tački R, tako da DL prema RL može biti u istom tom odnosu. Pošto su *g*S prema *g*M, AS prema AP i DS prema DL, proporcionalni, stoga će se (*ex aequo*) AS prema BL i DS prema RL, odnositi kao *g*S prema L*h*. Odatle sledi da se BL – RL prema L*h* – BL odnosi kao AS – DS prema *g*S – AS. To jest, BR se prema B*h* odnosi kao AD prema A*g*, i zbog toga kao BD prema *g*Q. Naizmenično, BR se prema BD odnosi kao B*h* prema *g*Q, ili kao *fh* prema *fg*. Međutim, prema postavci, linija BL je bila presečena u tačkama D i R u istom odnosu kao i linija FI u tačkama G i H. Iz ovoga sledi da se BR prema BD odnosi kao FH prema FG. Prema tome, *fh* se prema *fg*

odnosi kao FH prema FG. Pošto se, zbog toga, *gi* prema *hi* odnosi kao i *Mi* prema *Li*, tj. kao GI prema HI, očigledno je da se linije FI i *fi* na sličan način seku u tačama G i H i *g* i *h*. Q.E.F.

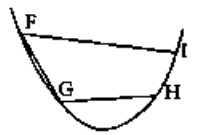
U postavci ovog korolara, pošto je linija LK povučena presecajući CE u tački *i*, možemo produžiti *i*E do tačke V, tako da se EV može odnositi prema E*i* kao FH prema HI, a povučena je i prava V*f* paralelno sa BD. Isto će se desiti ako oko centra *i*, sa poluprečnikom IH, opišemo krug presecajući BD u tački X i kada produžimo *i*X do Y, tako da *i*Y može biti jednaka sa IF, a potom ćemo povući Y*f* paralelno sa BD.

Ser Kristofer Ren i dr Džon Volis davno su ponudili druga rešenja ovog Problema.

PROPOZICIJA XXIX. PROBLEM XXI



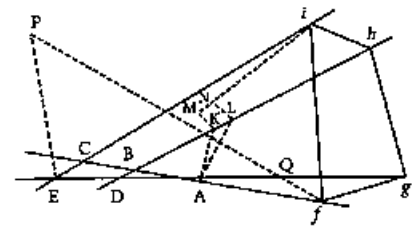
Opisati putanju date vrste, koju mogu preseći četiri prave linije, koje su date prema položaju, na delove koji su dati prema redu, vrsti i proporciji.

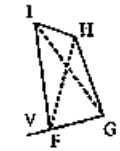


Pretpostavimo da se putanja opisuje tako da može biti slična sa krivom linijom FGHI i čiji se delovi, koji su slični i proporcionalni sa delovima FG, GH i HI druge putanje, mogu seći između pravih linija AB i AD, AD i BD i BD i CE datih prema položaju, *viz.*, prvi deo između prvog para tih linija, drugi između drugog para i treći između trećeg. Povući ćemo linije FG, GH, HI i FI. Prema Lemi XXVII opisaćemo trapezoid *fghi* koji može biti sličan trapezoidu FGHI i čiji uglovi *f*, *g*, *h* i *i* mogu dodirnuti prave linije AB, AD, BD i CE, date prema položaju, pojedinačno prema njihovom redu. Potom ćemo oko ovog trapezoida opisati putanju, a ta će putanja biti slična sa krivom linijom FGHI.

SHOLIJA

Slično tome, ovaj Problem se može postaviti na sledeći način. Posle spajanja FG, GH, HI i FI, produžićemo GF do tačke V. Spojićemo FH i IG i neka uglovi CAK i DAL budu jednaki sa uglovima FGH i VFH. Neka AK i AL seku pravu liniju BD u tačkama K i L i odatle ćemo povući KM i LN, od kojih neka KM čini ugao AKM koji je jednak uglu GHI i koji se prema AK odnosi kao HI prema GH.





Neka LN čini ugao ALN koji je jednak uglu FHI i koji se prema AL odnosi kao HI prema FH. Linije AK, KM, AL i LN treba povući prema takvim stranama linija AD, AK i AL tako da se slova CAKMC, ALKA i DALND mogu napisati određenim redosledom kao slova FGHIF. Povući ćemo MN koja seče pravu liniju CE u tački *i*. Napravićemo ugao *i*EP jednak uglu IGF i neka se PE prema E*i* odnosi kao FG prema GI. Kroz tačku P povući ćemo PQ*f* tako da može sadržati, zajedno sa pravom linijom ADE, ugao PQE koji je jednak sa uglom FIG i koja će seći pravu liniju AB u tački *f*. Potom ćemo spojiti *fi*. Međutim, PE i PQ treba povući prema onim stranama linija CE i PE tako da kružni redosled slova PE*i*P i PEQP može biti jednak sa redosledom slova FGHIF i ako je na liniji *fi*, sa istim redosledom slova i sličan sa trapezoidom FGHI, konstruisan trapezoid *fghi* i ako je putanja, date vrste, opisana oko njega, Problem će biti rešen.

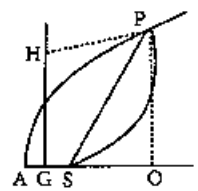
Sve do sada rečeno tiče se i pronalaženja orbita. Ostaje da odredimo kretanja tela u orbitama pronađenih na taj način.

ODELJAK VI

Kako se pronalaze kretanja po datim orbitama?

PROPOZICIJA XXX. PROBLEM XXII

Pronaći položaj tela, u bilo kom određenom vremenu, koje se kreće po datoj paraboličnoj putanji.



Neka S bude žiža, a A teme parabole. Pretpostavimo da je 4AS × M jednako sa paraboličnom površinom APS, koja je opisana ili pomoću poluprečnika SP, pošto je telo prošlo kroz vrh, ili je opisana pre nego što je telo stiglo do vrha. Veličina te oblasti poznata je pomoću vremena sa kojim je ona proporcionalna. Preseći ćemo AS na pola u tački G i podignućemo normalu GH koja je jednaka sa 3M, pa će krug

opisan oko centra H, sa intervalom HS, preseći parabolu u tački P, koja i jeste traženo mesto tela. Jer, ako na osu spustimo normalu PO i ako povučemo PH, onda će $AG^2 + GH^2 = HP^2 = (AO - AG)^2 + (PO - GH)^2 = AO^2 + PO^2 - 2GAO - 2GH + PO + AG^2 + GH^2$. Odatle je $2GH \times PO = AO^2 + PO^2 - 2GAO = AO^2 + \frac{3}{4} PO^2$. Kada umesto AO^2 napišemo $AO \times \frac{PO^2}{4AS}$ i kada podelimo sve članove sa 3PO, pa ih pomnožimo sa 2AS, dobićemo da je $\frac{4}{3}$ GH × AS = $\frac{1}{6}$ AO × PO + $\frac{1}{2}$ AS × PO = $\frac{OA + 3AS}{6}$ × PO = $\frac{4AO - 3SO}{6}$ × PO = sa oblašću (APO – SPO) = sa oblašću APS. Međutim, pošto je GH bilo 3M, zbog toga će $\frac{4}{3}$ GH × AS biti 4AS × M. Prema tome, oblast koja je presečena, APS, jednaka je sa oblašću koja treba da se preseče 4AS × M. Q.E.D.

Kor. 1. Odnos GH prema AS jednak je odnosu vremena u kom telo opisuje luk AP, prema vremenu u kom telo opisuje luk između vrha A i normale podignute iz žiže S ka osi.

Kor. 2. Ako pretpostavimo da krug ASP neprekidno prolazi kroz pokretno telo P, onda će se brzina tačke H prema brzini koju je telo imalo na vrhu A odnositi kao 3 prema 8. Zbog toga je linija GH u istom odnosu prema pravoj liniji koju bi telo, tokom vremena koje pređe kretajući se od tačke A do tačke P, opisalo sa brzinom koje je imalo na vrhu A.

Kor. 3. S druge strane, može se pronaći vreme tokom kog je telo opisalo bilo koji određeni luk AP. Spojićemo AP i na njegovoj središnjoj tački podići ćemo normalu koja seče pravu liniju GH u tački H.

LEMA XXVIII

Ne postoji nijedna ovalna figura čija bi se površina, koja je presečena proizvoljnim pravim linijama, mogla univerzalno pronaći pomoću jednačina sa bilo kojim brojem konačnih članova i dimenzija.

Pretpostavimo da je unutar ovalne figure data bilo koja tačka, oko koje, kao oko pola, neprekidno kruži prava linija sa ravnomernim kretanjem, dok se istovremeno, iz pola i po toj pravoj liniji, kreće pokretna tačka uvek napred i sa brzinom koja je proporcionalna sa kvadratom dužine te prave linije unutar ovala. Pomoću tog kretanja ta tačka će opisati spiralu sa beskonačnim brojem okretanja. Ako se deo te površine ovala, presečen pomoću te prave linije, može pronaći konačnom jednačinom, rastojanje tačke od pola,

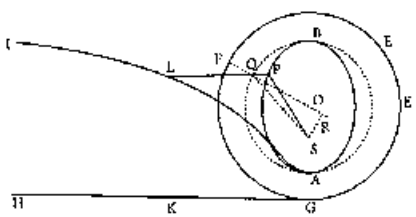
koje je proporcionalno sa tom površinom, može se pronaći istom tom jednačinom, pa se, takođe, na isti način mogu pronaći i sve tačke spirale. Prema tome, tačka preseka prave linije, date prema položaju i spirale može se pronaći pomoću konačne jednačine. Međutim, svaka prava linija koja je beskonačno produžena seče spiralu u beskonačnom broju tačaka i jednačina pomoću koje pronalazimo bilo koju tačku preseka dve linije istovremeno predstavlja sve njihove tačke preseka sa istim tim brojem rešenja jednačina. Zbog toga jednačina raste do takvog stepena koliko ima tačaka preseka. Pošto se dva kruga međusobno seku u dvema tačkama, jedna od tih tačaka preseka pronalazi se pomoću jednačine drugog stepena, pomoću koje se i druga tačka preseka može pronaći. Dva konusna preseka mogu se seći u četiri tačke i nijedna od njih se ne može univerzalno pronaći, već samo pomoću jednačine četvrtog stepena, kojom se sve četiri zajedno mogu pronaći. Ako te tačke preseka tražimo pojedinačno, pošto su zakon i uslov svih jednaki, račun će biti isti u svakom slučaju, pa će zbog toga i zaključak uvek biti isti, a taj račun onda mora obuhvatiti sve te preseke odjednom, i sve ih izložiti bez razlike. Na taj način, odeljci konusnih preseka sa krivim trećeg stepena, pošto mogu iznositi šest, istupaju zajedno kao jednačine šestog stepena; preseci sa dve krive trećeg stepena, pošto mogu iznositi devet, istupaju zajedno kao jednačine devetog stepena. Ako ovo ne bi bio slučaj, sve probleme konusnih preseka mogli bismo svesti na probleme ravni, a probleme još viših dimenzija na probleme konusnih preseka. Međutim, ovde govorim o krivim čiji se red ne može sniziti. Jer, ako se jednačina pomoću koje je kriva definisana može svesti na niži stepen, kriva neće biti prosta kriva već će se sastoji iz dve ili više krivih, čiji se preseci pojedinačno mogu pronaći različitim računima. Na isti način, dva preseka pravih linija sa konusnim presekom uvek se pojavljuju kao jednačine drugog stepena; tri preseka pravih linija sa nesvodljivim krivim trećeg reda kao jednačine trećeg stepena; četiri preseka pravih linija sa nesvodljivim krivim četvrtog reda, kao jednačine četvrtog stepena, itd. *in infinitum*. Prema tome, bezbrojni preseci pravih linija sa spiralom, a pošto je to jedna prosta kriva koja nije svodljiva na više krivih, zahtevaju jednačine sa beskonačnim brojem stepena i korena, pomoću kojih se sve one mogu izložiti zajedno. Jer, zakon i račun svih je jednak. Ako iz pola spustimo normalu na sekantu i ako on zajedno sa sekantom kruži oko pola, onda će preseci spirala međusobno proći jedan kroz dru-

gog, a onaj koji je bio prvi ili najbliži osnovi normale, posle jedne revolucije, postaće drugi; posle dve revolucije, treći, i tako dalje. Pritom, u međuvremenu se neće promeniti jednačina, već će se promeniti opseg tih veličina, pomoću kojih je određen položaj sekante. Pošto se, posle svake revolucije, te veličine vraćaju na njihovu početnu vrednost, jednačina će se vratiti u svoj prvobitni oblik. Prema tome, jedna te ista jednačina izložiće sve preseke, pa će zbog toga imati beskonačan broj korenova, pomoću kojih se sve tačke preseka mogu izložiti. Zbog toga se presek prave linije sa spiralom ne može univerzalno pronaći pomoću bilo koje konačne jednačine. Zato i ne postoji ovalna figura čija bi se površina, presečena proizvoljno uzetom pravom linijom, mogla univerzalno izložiti pomoću bilo koje takve jednačine.

Istim argumentom, ako uzmemo da su interval pola i tačka pomoću koje je spirala opisana proporcionalni sa onim delom obima ovala koji je presečen, može se dokazati da se dužina obima ne može univerzalno izložiti bilo kojom konačnom jednačinom. Međutim, ovde govorim o ovalima koje nisu dodirnule konjugovane figure koje se završavaju *in infinitum*.

Kor. Zbog toga se površina elipse, opisana poluprečnikom povučenim iz žiže prema telu koje se kreće, neće pronaći pomoću vremena datog konačnom jednačinom i zato se ne može ni odrediti pomoću opisa geometrijski racionalne krive. Nazivam geometrijski racionalnim krivim one čije sve tačke koje mogu biti određene dužinama koje mogu biti definisane jednačinama, tj. pomoću složenih odnosa dužina. Ostale krive (kao što su spirale, kvadratrise, cikloide) nazivam geometrijski iracionalnim. Jer, dužine, koje se međusobno ili odnose ili ne kao broj prema broju (prema Knjizi X *Elemenata*), jesu aritmetički racionalne ili iracionalne. Zbog toga, presek površine elipse, koji proporcionalan sa vremenom u kom je opisan pomoću geometrijski iracionalne krive, ispoljava se na sledeći način.

PROPOZICIJA XXXI. PROBLEM XXIII



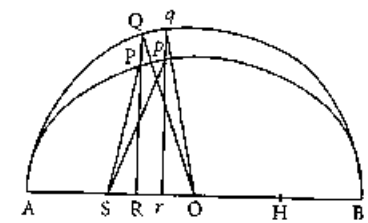
Pronaći položaj tela koje se kreće po datoj eliptičnoj putanji tokom bilo kog datog vremena.

Pretpostavimo da je A teme, S žiža, a O centar elipse APB i neka P bude traženi položaj tela. Produžićemo OA do G, tako da se OG može odnositi prema OA kao OA prema OS. Podići ćemo normalu GH, i oko centra O, sa intervalom OG, opisaćemo krug GEF. Pretpostavimo da se točak GEF kreće napred na liniji GH, kao osnovi, kružeći oko svoje ose i u srednjem vremenu pomoću svoje tačke A opisuje cikloidu ALI. Potom, uzmimo da se GK prema obimu GEFG točka, odnosi kao vreme, tokom kojeg telo dok prolazi iz tačke A opisuje luk AP, prema vremenu celokupne revolucije na elipsi. Podići ćemo normalu KL koja seče cikloidu u tački L i povući ćemo LP paralelno sa KG tako da seče elipsu u tački P, koja je traženi položaj tela.

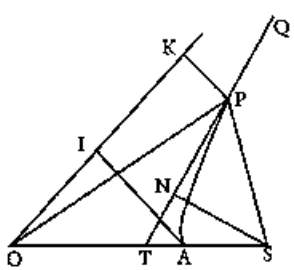
Oko centra O, sa intervalom OA, opisaćemo polukrug AQB i neka LP, koja je produžena ako je to neophodno, seče luk AQ u tački Q i spojićemo SQ i OQ. Neka OQ seče luk EFG u tački F, a na OQ pustićemo normalu SR. Površina APS proporcionalna je sa površinom AQS, tj. sa razlikom između sektora OQA i trougla OQS, ili sa razlikom pravougaonika $\frac{1}{2}$ OQ × AQ i $\frac{1}{2}$ OQ × SR, tj. pošto je $\frac{1}{2}$ OQ data veličina, proporcionalna je sa razlikom između luka AQ i prave linije SR. Prema tome, površina APS je (usled jednakosti datih odnosa SR prema sinusu luka AQ, OS prema OA, OA prema OG, AQ prema GF, a usled divizije AQ – SR prema GF – sinus luka AQ) proporcionalna sa GK, koja predstavlja razliku između luka GF i sinusa luka AQ. Q.E.D.

SHOLIJA

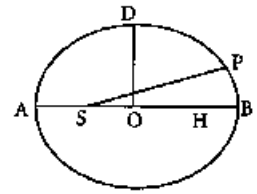
Međutim, pošto je opis ove krive težak, rešenje putem aproksimacije imaće prednost. Prvo, neophodno je pronaći ugao B koji se prema uglu od 57,29578 stepeni, a koji je zahvaćen lukom jednakim sa naspramnim poluprečnikom, odnosi kao SH, rastojanje žiža, prema AB, prečniku elipse. Potom, neophodno je pronaći određenu dužinu L, koja može biti obrnuto proporcionalna tom poluprečniku. Kad su ove veličine nađene, Problem se može rešiti pomoću sledeće analize. Prema bilo kojoj postavci (pa čak i prema pretpostavci) neka znamo da je P položaj tela u blizini svog istinskog položaja *p*. Ako spustimo na osu elipse ordinatu PR, onda ćemo



iz proporcije prečnika elipse pronaći ordinatu RQ opisanog kruga AQB. Ta ordinata je sinus ugla AOQ i ako pretpostavimo da je AO poluprečnik, ona će seći elipsu u tački P. Dovoljno će biti ako se taj ugao pronađe grubim računom približnim istini. Takođe, pretpostavimo da znamo ugao koji je proporcionalan sa vremenom, tj. takav ugao koji se prema četiri prava ugla odnosi kao vreme tokom kog telo opisuje luk A*p* prema vremenu jedne revolucije na elipsi. Neka taj ugao bude N. Onda uzmimo ugao D, koji se može odnositi prema uglu B kao što se sinus ugla AOQ odnosi prema poluprečniku. Uzmimo ugao E, koji se prema uglu N – AOQ + D može odnositi kao dužina L prema istoj toj dužini L umanjenoj za kosinus ugla AOQ, kad je taj ugao manji od pravog ugla, ili povećanoj na taj način, kad je ugao veći od pravog ugla. Zatim, uzmimo da se ugao F može odnositi prema uglu B kao sinus ugla AOQ + E prema poluprečniku, a da se ugao G može odnositi prema uglu N – AOQ – E + F kao dužina L prema istoj toj dužini L umanjenoj za kosinus ugla AOQ + E, kad je taj ugao manji od pravog ugla i povećanoj na taj način, kad je ugao veći od pravog ugla. Uzmimo, potom, da se ugao H može odnositi prema uglu B kao sinus ugla AOQ + E + G prema poluprečniku i ugao I koji se prema uglu N – AOQ – E – G + H odnosi kao dužina L prema istoj toj dužini L umanjenoj za kosinus ugla AOQ + E + G, kad je ugao manji od pravog ugla, ili povećanoj na taj način kad je ugao veći od pravog ugla. Tako možemo nastaviti *in infinitum*. Naposletku, ako uzmemo da je ugao AO*q* jednak sa uglom AOQ + E + G + I + ... i iz njegovog kosinusa O*r* i ordinate *pr*, koja se prema sinusu *qr* odnosi kao manja osa elipse prema većoj, dobićemo da je *p* ispravno mesto tela. Kad se desi da je ugao N – AOQ + D negativan, znak + na uglu E mora se svuda promeniti u znak –, a znak – u znak +. Isto se podrazumeva za znakove uglova G i I, kad se ispostavi da su uglovi N – AOQ – E + F i N – AOQ – E – G + H negativni. Međutim, beskonačan niz AOQ + E + G + I + ... konvergira toliko brzo, da je jedva potrebno nastaviti posle drugog člana E. Na osnovu ove teoreme zasnovan je proračunu da je površina APS proporcionalna razlici između luka AQ i prave linije koja je normalno spuštena iz žiže S na poluprečnik OQ.



Sličnim proračunom, Problem je rešen i u vezi sa hiperbolom. Neka njen centar bude O, vrh A, žiža S i asimptota OK. Pretpostavimo da je poznata veličina površine koja treba da se preseče i da je ona proporcionalna sa vremenom. Neka ta površina bude A, a pomoću pretpostavke znamo položaj prave linije SP, koja preseca površinu APS koja je blizu tražene površine. Spojićemo OP i iz A i P prema asimptoti povući ćemo AI i PK paralelno sa drugom asimptotom. Prema logaritamskoj tablici, površina AIKP će biti data, kao i površina OPA, jednaka sa njom, koja kada se oduzme od trougla OPS daje površinu APS. I ako dodamo 2APS – 2A ili 2A – 2APS, tj. dvostruku razliku površine A koja treba da se preseče i površine APS koja je presečena, na liniju SN koja je spuštena iz žiže S, normalno na tangentu TP, dobićemo dužinu tetive PQ. Tu tetivu ucrtaćemo između A i P, ako je površina APS veća od površine A, a prema suprotnoj strani tačke P, ako je površina manja. Tada će tačka Q biti precizniji položaj tela. Ponavljanjem računa položaj se neprekidno može pronalaziti sa sve većom preciznošću.



Takvim proračunima dobijamo opšte analitičko rešenje Problema. Međutim, za astronomsku svrhu podesniji su pojedinačni proračuni koji slede. Pretpostavimo da su AO, OB i OD poluose elipse, L njen žižni parametar, a D razlika između manje poluose OD i $\frac{1}{2}$ L, polovine od žižnog parametra. Neka je ugao Y pronađen, a čiji se sinus može odnositi prema poluprečniku kao pravougaonik pod tom razlikom D i kao AO + OD, polovina zbira osa, prema kvadratu veće ose AB. Takođe, pronaći ćemo ugao Z, čiji se sinus može odnositi prema poluprečniku kao što se dvostruki pravougaonik na rastojanju od žiže SH i ta razlika D odnose prema trostrukom kvadratu polovine veće poluose AO. Kada se jednom ti uglovi pronađu, može se odrediti i mesto tela. Uzmimo ugao T koji je proporcionalan s vremenom tokom kog je opisan luk BP, ili koji je jednak sa onim što se naziva srednjim kretanjem. Ugao V, koji je prva jednačina srednjeg kretanja, odnosiće se prema uglu Y, koji je najveća prva jednačina, kao sinus dvostrukog ugla T prema poluprečniku, a ugao X, koji je druga jednačina, odnosiće se prema uglu Z, druge najveće jednačine, kao kubni sinus ugla T prema kubnom poluprečniku. Onda uzmimo da je ugao BHP izjednačenog srednjeg kretanja jednako sa T + X + V, tj. zbiru uglova T, V i X, ako je ugao T manji od pravog ugla, ili jednako sa T + X – V, razlici istih tih uglova, ako

je ugao T veći od jednog, a manji od dva prava ugla i ako HP seče elipsu u tački P, povući ćemo SP, koja će preseći površinu BSP skoro proporcionalnu sa vremenom.

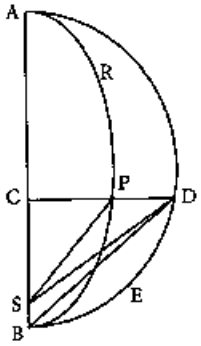
Ovaj način čini se dovoljno brzim, pošto su veoma mali uglovi V i X izraženi, ako tako odgovara, u sekundama minuta, pa će dovoljno biti da se pronađu prve dve ili tri njihove cifre. Isti način dovoljno precizno odgovara teoriji o kretanju planeta. Čak odgovara i za orbitu Marsa, gde najveća jednačina centra iznosi deset stepeni, a greška jedva prelazi jednu sekundu. Međutim, nakon što je pronađen ugao izjednačenog srednjeg kretanja BHP, ugao istinskog kretanja BSP i rastojanje SP, lako se dobijaju pomoću poznatih metoda.

Sve do sada navedeno važi i za kretanje tela po krivim linijama. Međutim, takođe se može pokazati da će se telo koje se kreće ili uspinjati ili spuštati po pravoj liniji i sada ću objasniti šta spada pod takve vrste kretanja.

ODELJAK VII

U vezi sa pravolinijskim usponom i silaskom tela

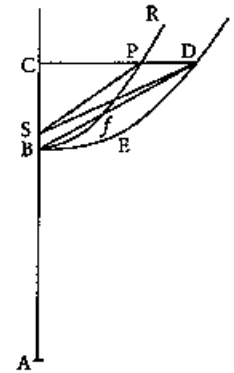
PROPOZICIJA XXXII. PROBLEM XXIV



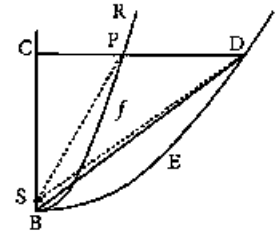
Pod pretpostavkom da je centripetalna sila obrnuto proporcionalna sa kvadratom rastojanja mesta od centra, neophodno je odrediti prostor koje opisuje telo, pri direktnom padanju, u datim vremenima.

Slučaj 1. Ako telo ne pada normalno, ono će (prema Kor. 1. Prop. XIII) opisati neki konusni presek čija je žiža smeštena u centru sile. Pretpostavimo da je taj konusni presek ARPB, a njena žiža S. Na početku, ako je figura elipsa, na njenoj većoj osi AB opisaćemo polukrug ADB i neka prava linija DPC prolazi kroz telo koje pada, zaklapajući prave uglove sa osom. Ako povučemo DS i PS, površina ASD će biti proporcionalna sa površinom ASP, a zbog toga će biti proporcionalna i sa vremenom. Pošto osa AB još uvek ostaje ista, neka se širina elipse neprekidno umanjuje, pa će površina ASD uvek ostati proporcionalna sa vremenom. Pretpostavimo da se ta širina umanjuje *in infinitum* – u

tom slučaju će se orbita APB poklopiti sa osom AB, a žiža S sa najudaljenijom tačkom ose B, telo će padati po pravoj liniji AC, a površina ABD postaće proporcionalna sa vremenom. Zbog toga će biti dat prostor AC, koji telo opisuje u datom vremenu pomoću svoje normale koja je spuštena iz mesta A, ako je površina ABD proporcionalna s vremenom, a iz tačke D spuštena je prava linija DC normalno na pravu liniju AB. Q.E.I.



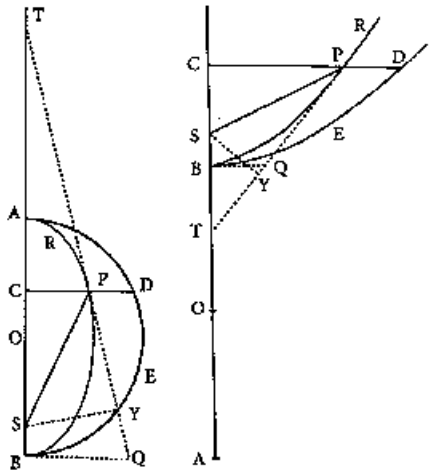
Slučaj 2. Ako je figura RPB hiperbola, na istom osnovnom prečniku AB opisaćemo pravougaonu hiperbolu BED i pošto su površine CSP, CB*f*P i SP*f*B, odgovarajuće sa nekoliko površina SCD, CBED i SDEB, u datom odnosu visina CP i CD, a površina SP*f*B je proporcionalna sa vremenom tokom kog se telo P kreće kroz luk P*f*B, onda će i površina SDEB biti proporcionalna sa tim vremenom. Neka se žižni parametar hiperbole RPB umanjuje *in infinitum*, dok *latus transversum* ostaje isti, onda će se luk PB poklapati sa pravom linijom CB, žiža S sa vrhom B, a prava linija SD sa pravom linijom BD. Zbog toga će površina BDEB biti proporcionalna sa vremenom tokom kog telo C, pri pravolinijskom padanju, opisuje liniju CB. Q.E.I.



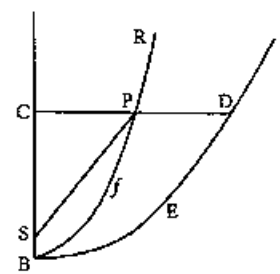
Slučaj 3. Sličnim argumentom, ako je figura RPB parabola, i ako je do istog temena B opisana druga parabola BED, koja uvek može ostati konstantna, dok će se prva parabola, po čijem se obimu kreće telo P i pošto joj je žižni parametar umanjen i sveden do nule, poklopiti sa linijom CB, onda će parabolični segment BDEB biti proporcionalan sa vremenom tokom kog to telo P ili C pada do centra S ili B. Q.E.I.

PROPOZICIJA XXXIII. TEOREMA IX

Imajući u vidu prethodno pronađeno, tvrdim da se brzina tela koje pada u bilo kom mestu C odnosi prema brzini tela koje opisuje krug oko centra B na rastojanju BC, kao kvadratni koren odnosa rastojanja tela AC od udaljenijeg vrha A kruga ili pravougaone hiperbole prema ½ AB, osnovnog poluprečnika figure.



Neka je AB, zajednički prečnik obe figure RPB i DEB, presečen na pola u tački O. Povući ćemo pravu liniju PT tako da može dodirnuti figuru RPB u tački P i koja seče taj zajednički prečnik AB (koji je produžen, ukoliko je neophodno) u tački T. Neka SY bude normala na tu liniju, a BQ normala na taj prečnik, a žižni parametar figure RPB neka je L. Prema Kor. 9. Prop XVI, očigledno je da se brzina tela, koje se kreće po liniji RPB oko centra S i u bilo kom mestu P, odnosi prema brzini tela koje opisuje krug oko istog tog centra, na rastojanju SP, kao kvadratni koren odnosa $\frac{1}{2}$ L × SP prema SY^2. Prema svojstvima konusnih preseka ACB se prema CP^2 odnosi kao 2AO prema L i zbog toga je $\frac{2CP^2 \times AO}{ACB}$ jednako sa L. Prema tome, te brzine međusobno se odnose kao kvadratni koren odnosa $\frac{CP^2 \times AO \times SP}{ACB}$ prema SY^2. Dalje, prema svojstvima konusnih preseka, CO se prema BO odnosi kao BO prema TO i (spajanjem ili deljenjem) kao CB prema BT. Prema tome, (spajanjem ili deljenjem), BO ± CO odnosiće se prema BO kao CT prema BT, tj. AC će se prema AO odnositi kao CP prema BQ, a zbog toga je $\frac{CP^2 \times AO \times SP}{ACB}$ jednako sa $\frac{BQ^2 \times AC \times SP}{AO \times BC}$. Pretpostavimo da se CP, širina figure RPB, umanjuje *in infinitum*, tako da tačka P može da se poklapa sa tačkom C i tačka S sa tačkom B, a linija SP sa linijom BC, kao i linija SY sa linijom BQ i brzina tela, koje sada pada normalno na liniji CB, odnosiće se prema brzini tela, koje opisuje krug oko centra B na rastojanju BC, kao kvadratni koren odnosa $\frac{BQ^2 \times AC \times SP}{AO \times BC}$ prema SY^2, tj. (ako zanemarimo odnos jednakosti SP prema BC i BQ^2 prema SY^2) kao kvadratni koren odnosa AC prema AO ili $\frac{1}{2}$ AB. Q.E.D.



Kor. 1. Kada se tačke B i S poklapaju, TC će se prema TS odnositi kao AC prema AO.

Kor. 2. Telo koje kruži po bilo kom krugu sa datim rastojanjem od centra, kada

je pravac njegovog kretanja promenjen prema gore, udvostručiće svoje rastojanje od centra.

PROPOZICIJA XXXIV. TEOREMA X

Ako je figura BED parabola, tvrdim da je brzina tela koje pada u bilo kom mestu C jednaka sa brzinom kojom telo može ravnomerno opisati krug, oko centra B, na polovini intervala BC.

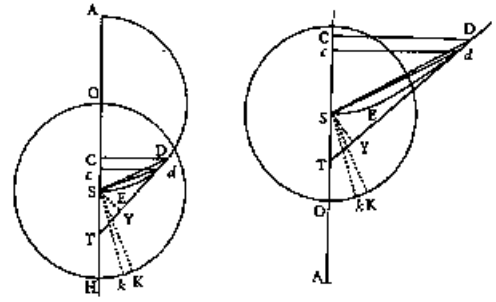
Prema Kor. 7 Prop. XVI, brzina tela, koje opisuje parabolu RPB oko centra S i u bilo kom mestu P, jednaka je brzini tela koje ravnomerno opisuje krug oko istog centra S na polovini intervala SP. Neka se širina CP parabole umanjuje *in infinitum* i pošto se parabolični luk P*f*B može poklopiti sa pravom linijom CB, centar S sa vrhom B, a interval SP sa intervalom BC, ova propozicija će biti jasna. Q.E.D.

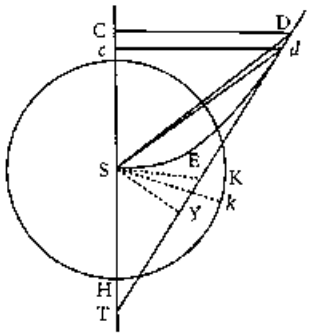
PROPOZICIJA XXXV. TEOREMA XI

Pri istim pretpostavkama, tvrdim da je površina figure DES, opisana pomoću neodređenog poluprečnika SD, jednaka sa površinom koje telo, sa poluprečnikom koji je jednak polovini žižnog parametra figure DES, ravnomernim kruženjem oko centra S, može opisati tokom istog vremena.

Pretpostavimo da je telo C u najmanjem momentu vremena opisalo, pri svom padanju, beskonačno malu liniju C*c*, dok drugo telo K, ravnomerno kružeći oko centra S u krugu OK*k*, opisuje luk K*k*. Podići ćemo normale CD i *cd* koje seku figuru DES u tačkama D i *d*. Spojićemo SD, S*d*, SK i S*k* i povući ćemo D*d* koja seče osu AS u tački T i na nju ćemo spustiti normalu SY.

Slučaj 1. Ako je figura DES krug, ili pravougaona hiperbola, prepolovićemo njen transverzalni prečnik AS u tački O, pa će SO iznositi polovinu žižnog parametra. Pošto se TC prema TD od-



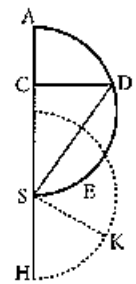


nosi kao C*c* prema D*d*, a TD prema TS kao CD prema SY, *ex aequo* TC će se prema TS odnositi kao CD × C*c* prema SY × D*d*. Međutim (prema Kor. 1 Prop. XXXIII) TC se prema TS odnosi kao AC prema AO, ako je pri spajanju tačaka D i *d*, uzet u obzir krajnji odnos linija. Zbog toga se AC prema AO, ili SK, odnosi kao CD × C*c* prema SY × D*d*. Dalje, odnos brzine padajućeg tela u tački C prema brzini tela koje opisuje krug oko centra S, pri intervalu SC, jednak je kvadratnom korenu odnosa AC prema AO, ili SK (prema Prop. XXXIII), a odnos te brzine prema brzini tela koje opisuje krug OK*k* jednak je kvadratnom korenu odnosa SK prema SC (prema Kor. 6 Prop. IV) i, *ex aequo*, odnos prve brzine prema poslednjoj, tj. male linije C*c* prema luku K*k*, jednak je kvadratnom korenu odnosa AC prema SC, tj. jednak odnosu AC prema CD. Prema tome, CD × C jednako je sa AC × K*k*, pa se AC prema SK odnosi kao AC × K*k* prema SY × D*d*, a odatle sledi da je SK × K*k* jednako sa SY × D*d*, a $\frac{1}{2}$ SK × K*k* jednako je sa $\frac{1}{2}$ SY × D*d*, tj. površina KS*k* jednaka je sa površinom SD*d*. Prema tome, u svakom momentu vremena, stvorena su dva jednaka dela površina, KS*k* i SD*d*, koja zadržavaju odnos jednakosti, ako im se veličina umanji, a njihov broj poraste *in infinitum*, i zbog toga su (prema Kor. Leme IV) cele površine stvorene zajedno uvek jednake. Q.E.D.

Slučaj 2. Međutim, ako je figura DES parabola, pronaći ćemo, kao i ranije, da se CD × C*c* prema SY × D*d* odnosi kao TC prema TS, tj. kao 2 prema 1, pa je zbog toga $\frac{1}{4}$ CD × C*c* jednaka sa $\frac{1}{2}$ SY × D*d*. Međutim, brzina padajućeg tela u tački C jednaka je brzini kojom krug može biti ravnomerno opisan pri intervalu $\frac{1}{2}$ SC (prema Prop. XXXIV). A odnos te brzine prema brzini kojom se može opisati krug sa poluprečnikom SK, tj., odnos male linije C*c* prema luku K*k*, jednak je (prema Kor. 6 Prop. IV) kvadratnom korenu odnosa SK prema $\frac{1}{2}$ SC, tj., jednak je odnosu SK prema $\frac{1}{2}$ CD. Prema tome, $\frac{1}{2}$ SK × K*k* jednaka je sa $\frac{1}{4}$ CD × C*c*, a zato je jednaka i sa $\frac{1}{2}$ SY × D*d*, tj., površina KS*k* jednaka je površini SD*d*, kao što je gore navedeno. Q.E.D.

PROPOZICIJA XXXVI. PROBLEM XXV

Odrediti vremena padanja tela iz datog mesta A.

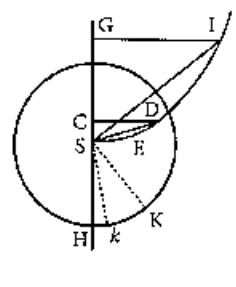


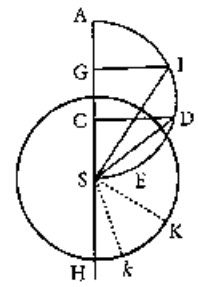
Na prečnik AS, koji je rastojanje tela od centra na samom početku, opisaćemo oko centra S, polukrug ADS, kao i polukrug OKH koji je njemu jednak. Iz bilo kog mesta tela C podignućemo ordinatu CD. Spojićemo SK i napravićemo sektor OSK koji je jednak sa površinom ASD. Očigledno je da će (prema Prop. XXXV) telo tokom pada opisati prostor AC u istom vremenu tokom kog bi drugo telo, koje ravnomerno kruži oko centra S, moglo da opiše luk OK. Q.E.F.

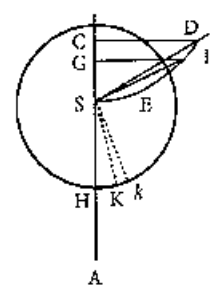
PROPOZICIJA XXXVII. PROBLEM XXVI

Odrediti vremena uspona ili silaska tela koje je bačeno iz datog mesta prema gore ili prema dole.

Pretpostavimo da telo ide od datog mesta G u pravcu linije GS bilo kojom brzinom. Neka je odnos GA prema $\frac{1}{2}$ AS jednak odnosu kvadrata ove brzine prema kvadratu ravnomerne brzine u krugu, kojom telo može kružiti oko centra S sa datim intervalom SG. Ako je taj odnos isti kao i odnos 2 prema 1, tačka A je beskonačno udaljena, a u tom slučaju parabola se opisuje bilo kojim



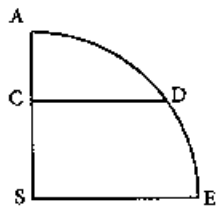




žižnim parametrom prema vrhu S i osom SG, kao što sledi iz Prop. XXXIV. Međutim, ako je odnos veći ili manji od odnosa 2 prema 1, u prvom slučaju će se, na prečniku SA opisati krug, a u drugom hiperbola, kao što sledi iz Prop. XXXIII. Onda ćemo oko centra S, sa intervalom koji je jednak polovini žižnog parametra, opisati krug H*k*K, a na mestu G tela koje je u usponu ili u padu, i na bilo kom drugom mestu C, podići ćemo normale GI i CD koje seku konusni presek ili krug u tačkama I i D. Onda ćemo spojiti

SI i SD i postavićemo sektore HSK i HS*k* tako da su jednaki sa segmentima SEIS i SEDS, pa će telo G (prema Prop. XXXV) opisati prostor GC u istom vremenu tokog kojeg bi telo K moglo da opiše luk K*k*. Q.E.F.

PROPOZICIJA XXXVIII. TEOREMA XII



Ako pretpostavimo da je centripetalna sila proporcionalna sa visinom ili rastojanjem mesta od centra, tvrdim da su vremena i brzine padajućih tela, kao i prostori koje ona opisuju, proporcionalna sa lukovima, pravim sinusima i sinusima versus, tim određenim redom.

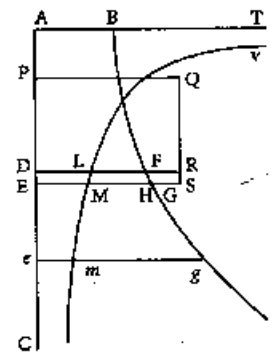
Pretpostavimo da telo pada iz bilo kog mesta A po pravoj liniji AS. Oko centra sile S, sa intervalom AS, opisaćemo četvrtinu kruga AE i neka CD bude sinus bilo kog luka AD. Onda će telo A, u vremenu AD, pri svom padanju opisati prostor AC, a na mestu C zadobiće brzinu CD.

Ovo je dokazano na osnovu Propozicije X, kao što je Propozicija XXXII dokazana na osnovu Propozicije XI.

Kor. 1. Prema tome, jednaka su vremena tela koje pada iz mesta A i stiže do centra S i tela koje dok kruži opisuje kvadratni luk ADE.

Kor. 2. Stoga su jednaka sva vremena tokom kojih tela, koja padaju iz bilo kog mesta, stižu do centra. Takođe, jednaka su i periodična vremena tela koja kruže (prema Kor. 3 Prop. IV).

PROPOZICIJA XXXIX. PROBLEM XXVII

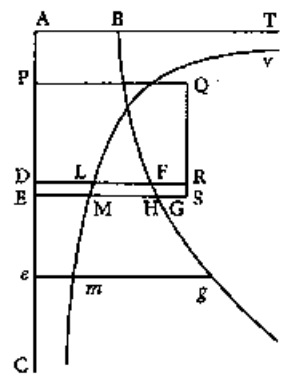


Ako pretpostavimo centripetalnu silu bilo koje vrste i ako smatramo poznatim kvadraturu krivolinijskih figura, neophodno je pronaći brzinu tela, koje je u usponu ili koje pada po pravoj liniji, na nekoliko mesta kroz koje prolazi kao i vreme tokom kog će stići do bilo kog mesta i *vice versa*.

Pretpostavimo da telo E pada iz bilo kog mesta A po pravoj liniji ADEC i iz njegovog mesta E zamislimo normalu EG koja je uvek podignuta proporcionalno sa centripetalnom silom koja deluje na mestu koje teži ka centru C. Neka BFG bude kriva linija, položaj tačke G. I na početku kretanja pretpostavimo da se EG poklapa sa normalom AB. Onda će brzina tela u bilo kom mestu E biti proporcionalna sa pravim linijama čiji je kvadrat jednak sa krivolinijskom površinom ABGE. Q.E.I.

Na pravoj EG uzmimo da je EM obrnuto proporcionalna sa pravim linijama čiji je kvadrat jednak sa površinom ABGE, a neka VLM bude kriva linija na kojoj je tačka M uvek smeštena i prema kojoj je produžena prava linija AB, njena asimptota. Onda će vreme, tokom kog padajuće telo opisuje liniju AE, biti proporcionalno sa krivolinijskom površinom ABTVME. Q.E.I.

Na pravoj liniji AE uzmimo veoma malu liniju DE date dužine, i neka DLF bude mesto linije EMG dok je telo bilo u tački D. Ako je centripetalna sila bila takva da je prava linija, čiji je kvadrat jednak površini ABGE, proporcionalna sa brzinom padajućeg tela, onda će sama ta površina biti proporcionalna sa kvadratom te brzine, tj. ako brzine u tačkama D i E označimo sa V i V + I, površina ABFD biće proporcionalna sa VV, a površina ABGE sa VV + 2VI + II, a pomoću divizije, površina DFGE biće proporcionalna sa 2VI + II, pa će zbog toga $\frac{DFGE}{DE}$ biti proporcionalno sa $\frac{2VI + II}{DE}$; tj. ako uzmemo prvobitne odnose tih veličina tek kada su nastale, dužina DF biće proporcionalna sa veličinom $\frac{2VI}{DE}$, pa je zbog toga, takođe, proporcionalna sa polovinom veličine $\frac{I + V}{DE}$. Međutim, vreme, tokom kog padajuće telo opisuje veoma malu liniju DE, direktno je proporcionalno sa tom linijom, a obrnuto sa brzinom V, a sila će biti direktno proporcionalna sa uvećanjem brzine I, a obrnuto sa vremenom. Prema tome, ako uzmemo prvobitne odnose kada su te veličine tek nastale, sila je proporcionalna sa $\frac{I \times V}{DE}$, tj. sa dužinom DF. Zbog toga, ako je sila proporcionalna sa DF ili EG, ona će uzrokovati da telo pada brzinom koja je proporcionalna sa pravom linijom čiji je kvadrat jednak sa površinom ABGE. Q.E.D.



Pošto je vreme, tokom kog veoma mala linija DE sa datom dužinom može biti opisana, obrnuto proporcionalno sa

brzinom, pa zato i obrnuto proporcionalno sa pravom linijom čiji je kvadrat jednak površini ABFD i pošto će linija DL, pa prema tome i nastala površina DLME, biti obrnuto proporcionalna sa istom pravom linijom, vreme će biti proporcionalno sa površinom DLME, a zbir svih vremena biće proporcionalan sa zbirom svih površina, tj. (prema Kor. Leme IV) celokupno vreme tokom kog je linija AE opisana biće proporcionalno sa celokupnom površinom ATVME. Q.E.D.

Kor. 1. Neka P bude mesto iz kog telo treba da padne, tako da, kad na njega deluje bilo koja poznata ravnomerna centripetalna sila (kao što se obično pod tom silom podrazumeva gravitacija), ono može zadobiti brzinu, u mestu D, koja je jednaka sa brzinom koju je drugo telo, pomoću bilo koje sile, takođe, zadobilo u tom mestu D. Na normali DF uzmimo DR, koja se može odnositi prema DF kao što se ravnomerna sila odnosi prema toj drugoj sili u mestu D. Dovršićemo pravougaonik PDQR i preseći ćemo površinu ABFD koja je jednaka sa tim pravougaonikom. Onda će A biti mesto iz kog će drugo telo početi da pada. Pošto smo dovršili pravougaonik DRSE tako da se površina ABFD odnosi prema površini DFGE kao VV prema 2VI, pa zbog toga i kao što se ½ V odnosi prema I, tj. kao polovina celokupne brzine prema uvećanju brzine padajućeg tela pri delovanju neravnomerne sile i na sličan način, površina PGRD se prema površini DRSE odnosi kao polovina celokupne brzine prema uvećanju brzine padajućeg tela pri delovanju ravnomerne sile, i pošto su ta uvećanja (iz razloga jednakosti nastalih vremena) proporcionalna sa generativnim silama, tj. sa ordinatama DF i DR, pa prema tome i sa nastalim površinama DFGE i DRSE – zbog toga će se, *ex aequo*, celokupne površine ABFD i PQRD međusobno odnositi kao polovine celokupnih brzina; a, pošto su brzine jednake, i površine će postati jednake.

Kor. 2. Ako se bilo koje telo baci ili prema gore ili prema dole sa datom brzinom iz bilo kog mesta D i ako je poznat zakon centripetalne sile koja deluje na to telo, onda će se njegova brzina pronaći u bilo kom drugom mestu, kao što je recimo *e*, kad podignemo ordinatu *eg* i kad se ta brzina odnosi prema brzini u mestu D kao što se prava linija, čiji je kvadrat jednak sa pravougaonikom PQRD, koji je ili uvećan krivolinijskom površinom DF, ako je mesto *e* ispod mesta D, ili umanjen istom tom površinom DF, ako je mesto *e* iznad mesta D, odnosi prema pravoj liniji čiji je kvadrat jednak samo sa pravougaonikom PQRD.

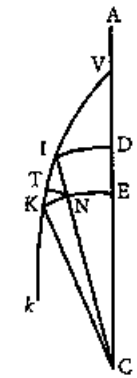
Kor. 3. Vreme je, takođe, poznato kad podignemo ordinatu *em* koja je obrnuto proporcionalna sa kvadratnim korenom iz PQRD ± DF i ako uzmemo da se vreme, tokom kog je telo opisalo liniju D, odnosi prema vremenu tokom kog drugo telo pada pri dejstvu ravnomerne sile iz tačke P do tačke D, kao što se krivolinijska površina DL odnosi prema pravougaoniku 2PD x DL. Vreme tokom kog će padajuće telo pri dejstvu ravnomerne sile opisati liniju PD odnosi se prema vremenu tokom kog je isto to telo opisalo liniju PE kao kvadratni koren iz odnosa PD prema PE: tj. (pošto je tek nastala linija DE veoma mala), kao što se PD odnosi prema PD + ½ DE, ili 2PD prema 2PD + DE, i pomoću divizije, prema vremenu tokom kog je telo opisalo veoma malu liniju DE, kao 2PD prema DE, i prema tome, kao što se pravougaonik 2PD x DL odnosi prema površini DLME; a vreme tokom kog su oba tela opisala veoma malu liniju DE odnosi se prema vremenu tokom kog je telo koje se neravnomerno kreće opisalo liniju De kao površina DLME prema površini DL*me*. I, *ex aequo*, prvo od pomenutih vremena odnosi se prema poslednjem kao što se pravougaonik 2PD x DL odnosi prema površini DL*me*.

ODELJAK VIII

O pronalasku orbita po kojima kruže tela pod dejstvom bilo koje centripetalne sile

PROPOZICIJA XL. TEOREMA XIII

Ako se telo, na koje deluje bilo koja centripetalna sila, na bilo koji način pomeri i ako se drugo telo uspinje ili pada po pravoj liniji i ako su njihove brzine jednake u bilo kom slučaju na jednakoj visini, onda će njihove brzine takođe biti jednake na svim jednakim visinama.



Neka telo pada iz tačke A, kroz tačke D i E, do centra C i neka se drugo telo kreće iz tačke V po krivoj liniji VIK*k*. Iz centra C, na bilo kom rastojanju, opisaćemo koncentrične krugove DI i EK, koji seku pravu liniju AC u tačkama D i E, a krivu VIK u tačkama I i K. Povući ćemo IC koja seče KE u tački N, a na IK pustićemo normalu NT i neka interval DE ili IN između obima krugova bude veoma mali. Potom,

zamislimo da tela u tačkama D i I imaju iste brzine. I pošto su rastojanja CD i CI jednaka, onda će centripetalne sile u D i I takođe biti jednake. Neka te sile budu izražene pomoću jednakih linijica DE i IN i neka sila IN (prema Kor. 2 Zakona kretanja) bude razložena na dve druge sile, NT i IT. Tada, sila NT, koja deluje u pravcu linije NT i normalno na putanju tela ITK, uopšte neće uticati ili promeniti brzinu tela na toj putanji, već će ga samo skretati sa svog pravolinijskog smera i učiniće da neprekidno skreće sa tangente orbite, opisujući tako krivolinijsku putanju ITK*k*. Ta celokupna sila će, zbog toga, biti utrošena u stvaranju ovog dejstva. Međutim, druga sila IT, koja deluje na pravac kretanja tela, biće u potpunosti upotrebljena za njegovo ubrzanje i u najmanjem datom vremenu stvoriće ubrzanje proporcionalno sa sobom. Zbog toga su ubrzanja tela u tačkama D i I, koja su stvorena u jednakim vremenima, proporcionalna sa linijama DE i IT (ako uzmemo prvobitne odnose nastalih linija DE, IN, IK, IT i NT), a u nejednakim vremenima, proporcionalna su sa tim linijama i vremenima zajedno. Međutim, vremena, tokom kojih su DE i IK opisane, proporcionalna su, zbog jednakih brzina u D i I, sa opisanim prostorima DE i IK, pa su i ubrzanja kretanja tela preko linija DE i IK proporcionalna sa DE i IT, kao i DE i IK zajedno, tj. odnose se kao DE^2 prema pravougaoniku IT × IK. Ali, pravougaonik IT × IK je jednak sa IN^2, tj., jednak je sa DE^2, zbog čega su jednaka i ubrzanja stvorena tokom prolaska tela od D i I do E i K. Prema tome, brzine tela u tačkama E i K takođe su jednake. Istim rasuđivanjem, ona će uvek biti jednaka na svim narednim jednakim rastojanjima. Q.E.D.

Istim rasuđivanjem, tela sa istim brzinama i jednakim rastojanjima od centra biće jednako usporena u njihovom usponu do jednakih rastojanja. Q.E.D.

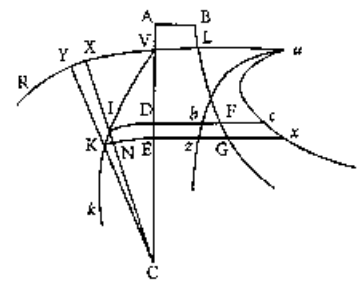
Kor. 1. Prema tome, ako telo ili osciluje jer je okačeno na neku nit, ili je zbog bilo koje klizave i savršeno glatke prepreke prinuđeno da se kreće po krivoj liniji i ako se drugo telo ili uspinje ili pada po pravoj liniji, i ukoliko su njihove brzine jednake na bilo kojoj jednakoj visini, onda će njihove međusobne brzine, takođe, biti jednake na svim drugim jednakim visinama. Jer, napetost niti okačenog tela ili savršeno glatka prepreka imaju isto dejstvo kao i poprečna sila NT. Telo nije ni ubrzano niti usporeno njenim dejstvom, već je samo prinuđeno da napusti svoj pravolinijski pravac.

Kor. 2. Pretpostavimo da je veličina P najveće rastojanje od centra do kog se telo može popeti, bilo da osciluje ili da kruži po

putanji, tako da isto to telo kad je bačeno nagore iz bilo koje tačke na putanji ima istu brzinu koju je imalo u toj tački. Neka je veličina A rastojanje tela od centra na bilo kojoj drugoj tački orbite i neka centripetalna sila bude uvek proporcionalna sa stepenom A^{n-1}, veličine A, čiji je indeks $n - 1$ bilo koji broj n umanjen za jedan. Onda će brzina na svakoj visini A biti proporcionalna sa $\sqrt{P^n - A^n}$, tj., biće poznata. Jer se upravo u tom odnosu, prema Prop. XXXIX, nalazi brzina tela koje se uspinje ili pada po pravoj liniji.

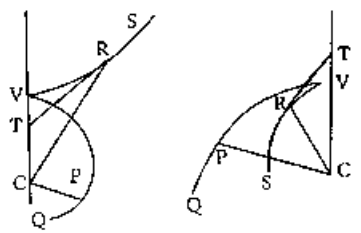
PROPOZICIJA XLI. PROBLEM XXVIII

Ako pretpostavimo centripetalnu silu bilo koje vrste i ako smatramo poznatim kradrature krivolinijskih figura, neophodno je pronaći putanje po kojima se tela kreću, kao i vremena njihovih kretanja po nađenim putanjama.



Neka bilo koja centripetalna sila teži ka centru C i neka je neophodno pronaći putanju VIK*k*. Neka je dat krug VR, opisan od centra C sa bilo kojim intervalom CV. Iz istog centra opisaćemo bilo koje druge krugove ID i KE koji seku putanju u tačkama I i K, a pravu liniju CV u tačkama D i E. Onda ćemo povući pravu liniju CNIX koja seče krugove KE i VR u tačkama N i X, a pravu liniju CKY tako da seče krug VR u tački Y. Neka tačke I i K budu beskonačno blizu i neka se telo kreće iz V kroz I i K do *k* i neka tačka A bude mesto odakle će drugo telo početi da pada, tako da, kad stigne do tačke D, zadobija brzinu koja je jednaka sa brzinom prvog tela u tački I. Zato će, kao i u Prop. XXXIX, linijica IK, koja je opisana u najmanjem datom vremenu, biti proporcionalna sa brzinom, a zbog toga i sa pravom linijom čiji je kvadrat jednak sa površinom ABFD. Trougao ICK koji je proporcionalan sa vremenom biće poznat, a zbog toga će KN biti obrnuto proporcionalna sa visinom IC; tj., ako je data veličina Q i ako visinu IC označimo sa A, KN će biti proporcionalna sa $\frac{Q}{A}$. Ovu veličinu $\frac{Q}{A}$ označićemo sa Z, i pretpostavićemo da je veličina Q takva da se u pojedinom slučaju $\sqrt{ABFD}$ može odnositi prema Z kao što se IK odnosi prema KN. Onda će se i u svim slučajevima $\sqrt{ABFD}$ odnositi prema Z kao što se IK odnosi prema IN, ABFD prema ZZ kao IK^2 prema KN^2, a deljenjem

ABFD – ZZ prema ZZ kao IN^2 prema KN^2, i prema tome će se $\sqrt{ABFD - ZZ}$ prema Z ili $\frac{Q}{A}$ odnositi kao IN prema KN. Stoga će $A \times KN$ biti jednako sa $\frac{Q \times IN}{\sqrt{ABFD - ZZ}}$. Pošto se $YX \times XC$ prema $A \times KN$ odnosi kao CX^2 prema AA, pravougaonik $XY \times XC$ biće jednak sa $\frac{Q \times IN \times CX^2}{AA\sqrt{ABFD - ZZ}}$. Ako na normalu uzmemo *Db* i *Dc* koje su neprekidno jednake sa $\frac{Q}{2\sqrt{ABFD - ZZ}}$ i $\frac{Q \times CX^2}{2AA\sqrt{ABFD - ZZ}}$, tim redom, i ako su opisane krive linije *ab* i *ac*, žiže tačaka *b* i *c*, zatim ako iz tačke V podignemo normalu *Va* do linije AC, koja preseca krivolinijske površine VD*ba* i VD*ca*, a ako podignemo i ordinate Ez i Ex – onda će, pošto je pravougaonik D*b* × IN ili D*bz*E jednak polovini pravougaonika A × KN, ili trouglu ICK, a pravougaonik D*c* × IN ili D*cx*E jednak polovini pravougaonika YX × XC, ili trouglu XCY, tj. pošto su tek stvoreni delovi *DbzE* i ICK, površina VD*ba* i VIC, uvek jednaki, i pošto su tek stvoreni delovi D*cx*E i XCY, površina VD*ca* i VCX, uvek jednaki, onda će stvorena površina VD*ca* biti jednaka sa stvorenom površinom VIC, i zbog toga će biti proporcionalna sa vremenom, a stvorena površina VD*ca* jednaka je stvorenom sektoru VCX. Prema tome, ako je dato vreme kretanja tela posle prolaska kroz tačku V, takođe će biti data i njemu proporcionalna površina VD*ba*. Odatle će biti poznata i visina tela, CD ili CI, kao i površina VD*ca* i njoj jednak sektor VCX, zajedno sa uglom VCI. Pošto su ugao VCI i visina CI dati, takođe će biti poznato i mesto I, u kom će se pronaći telo na kraju tog vremena.



Kor. 1. Na osnovu izloženog može se lako pronaći najveća i najmanja visina tela, tj. apside putanja. Jer apside su one tačke u kojima povučena prava linija IC, kroz centar, normalno pada na putanju VIK, a to se nalazi tamo gde su prave linije IK i NK međusobno jednake, tj., kad je površina ABFD jednaka sa ZZ.

Kor. 2. Takođe se i ugao KIN, pod kojim putanja na bilo kom mestu seče liniju IC, može lako pronaći pomoću date visine tela IC, uzimajući, naime, da se sinus tog ugla prema poluprečniku odnosi kao KN prema IK, tj. kao Z prema kvadratnom korenu površine ABFD.

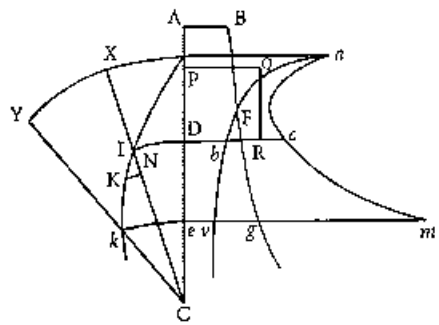
Kor. 3. Ako je do centra C i temena V opisan konusni presek VRS i ako je iz bilo koje od tih tačka, recimo R, povučena tangenta RT koja u tački T dodiruje osu CV, koja je neograničeno produžena, a zatim, spajajući CR, povući ćemo pravu liniju CP, jednaku

sa apscisom CT, tako da je ugao VCP proporcionalan sa sektorom VCR i ako centripetalna sila, koja je obrnuto proporcionalna sa kubnim rastojanjem mesta od centra, teži ka centru C, i ako se iz mesta V kreće telo takvom brzinom usmerenoj na liniji koja je normalna u odnosu na pravu liniju CV – to telo će nastaviti da se kreće po putanji VPQ, koju će uvek dodirivati tačka P i zbog toga će se, ako je konusni presek VRS hiperbola, telo približavati centru. Međutim, ako je konusni presek elipsa, telo će se neprekidno udaljavati od centra, *in infinitum*. I obrnuto, ako se telo, bilo kojom brzinom, kreće iz mesta V, onda će, u skladu sa tim da li započinje koso da se približava centru, ili koso da se udaljava od centra, figura VRS biti ili hiperbola ili elipsa, a putanja se može pronaći ili povećavanjem ili umanjenjem ugla VCP u datom odnosu. A kada centripetalna sila postane centrifugalna, telo će se koso udaljavati po putanji VPQ, koja je dobijena tako što je ugao VCP proporcionalan sa eliptičnim sektorom VRC, a dužina CP je jednaka sa dužinom CT, kao i ranije. Sve ovo sledi iz prethodne Propozicije i može se dobiti pomoću kvadrature određene krive, čiji pronalazak, pošto je dovoljno lak, izostavljam zarad sažetosti.

PROPOZICIJA XLII. PROBLEM XXIX

Pošto je poznat zakon centripetalne sile, neophodno je pronaći kretanje tela koje započinje da se kreće iz datog mesta, datom brzinom, u pravcu date prave linije.

Pretpostavićemo sve isto kao i u prethodnim trima propozicijama: neka se telo pokrenulo iz mesta I u pravcu male linije IK, istom brzinom koju ima i drugo telo, koju može zadobiti u D, tako što pada iz mesta P sa ravnomernom centripetalnom silom i neka se ova ravnomerna sila odnosi prema sili, koja deluje na telo u mestu I, kao DR prema DF. Neka telo nastavi da se kreće prema *k* i oko centra C, sa poluprečnikom C*k*, ono opisuje krug *ke*, koji seče pravu liniju PD u tački *e* i neka su podignute ordinate *eg*, *ev* i *ew* krivih



BFg, *abv* i *acw*. Iz datog pravougaonika PDRQ i date centripetalne sile, koja je delovala na prvo telo, takođe će biti data i kriva linija BFg, prema postavkama iz Prop. XXVII, Kor. 1. Onda je iz datog ugla CIK poznat odnos nastalih linija IK i KN, a odatle je, prema postavci Problema XXVIII, data i veličina Q, sa krivim linijama *abv* i *acw*. Prema tome, na kraju bilo kog vremena Dgve, poznate su obe visine tela Ce ili C*k*, zatim površina Dcwe, koja je jednaka sa površinom sektora XC*y*, kao i ugao IC*k* i mesto *k*, u kom će se onda pronaći telo. Q.I.E.

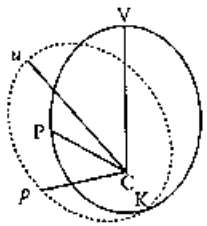
U ovim propozicijama pretpostavili smo da se centripetalna sila menja pri udaljavanju od centra prema nekom zakonu, koji neko može proizvoljno zamisliti. Međutim, na jednakim rastojanjima od centra ona mora svugde biti jednaka.

Do sada sam razmatrao kretanja tela po nepokretnim orbitama. Ostaje da dodamo razmatranja koja se tiču njihovih kretanja po orbitama koje kruže oko centra sile.

ODELJAK IX

O kretanjima tela po pokretnim orbitama i o kretanjima apsida

PROPOZICIJA XLIII. PROBLEM XXX



Neophodno je podstaći telo da se kreće po putanji koja kruži oko centra sile na isti način kao i drugo telo na istoj putanji koja je u stanju mirovanja.

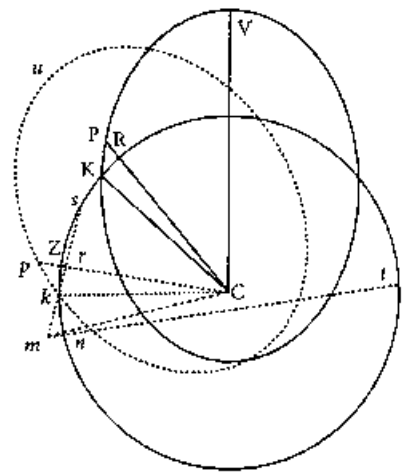
Po orbiti VPK, koja je data prema položaju, neka kruži telo P, koje se kreće od V prema K. Neka je iz centra C neprekidno povučena C*p*, jednaka sa CP, tako da je ugao VC*p* proporcionalan sa uglom VCP, a površina koju opisuje linija C*p* odnosiće se prema površini VCP, koju istovremeno opisuje linija CP, kao što se brzina opisane linije C*p* odnosi prema brzini opisane linije CP, tj., kao što se ugao VC*p* odnosi prema uglu VCP – dakle, u datom su odnosu – pa je zbog toga površina proporcionalan sa vremenom. Pošto je površina opisana linijom C*p* u nepokretnoj ravni proporcionalna sa vremenom, jasno je da telo, pri dejstvu te centripetalne sile, može da kruži sa tačkom *p* po krivoj liniji koju ista ta tačka *p*, pomoću metode koju smo upravo

objasnili, može načiniti da opisuje nepokretnu ravan. Neka je ugao V*cu* jednak sa uglom PC*p*, a linija C*u* jednaka sa linijom CV, i figura *u*C*p* jednaka sa figurom VCP, onda će se telo koje je uvek u tački *p*, kretati po obimu figure *u*C*p* koja kruži i opisaće svoj kružeći luk *up* u isto vreme tokom kog drugo telo P opisuje sličan i jednak luk VP na nepokretnoj figuri VPK. Ako, pomoću Kor. 5 Prop. VI, pronađemo centripetalnu silu koja može delovati na telo tako da ono kruži po krivoj liniji koju opisuje tačka *p* u nepokretnoj ravni, onda će Problem biti rešen. Q.E.F.

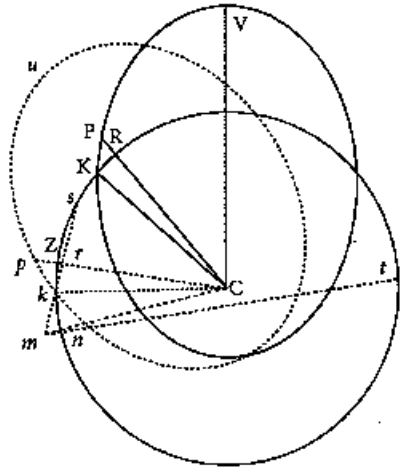
PROPOZICIJA XLIV. TEOREMA XIV

Razlika između sila, koje deluju na dva tela tako da se mogu kretati jednako, jedno po nepokretnoj, a drugo po istoj orbiti, ali pokretnoj, obrnuto je proporcionalna njihovim zajedničkim visinama na kub.

Neka su delovi nepokretne orbite VP i PK slični i jednaki sa delovima orbite koja kruži, *up* i *pk* i neka je rastojanje tačaka P i K krajnje malo. Iz tačke *k* spustićemo normalu *kr* na pravu liniju *p*C i produžićemo je do *m*, tako da se *mr* prema *kr* može odnositi kao ugao VC*p* prema uglu VCP. Pošto su visine tela PC i *p*C, KC i *k*C uvek jednake, jasno je da će i povećavanje i umanjivanje linija PC i *p*C uvek biti jednako. Prema tome, ako se svako kretanje, od nekoliko kretanja tela u mestima P i *p*, razloži na dva (prema Kor. 2 Zakona o kretanjima tela) od kojih je jedno usmereno prema centru, ili prema linijama PC i *p*C, a drugo, poprečno u odnosu na prethodno, usmereno je normalno na linije PC i *p*C, onda će kretanja prema centru biti jednaka i poprečno kretanje tela *p* odnosiće se prema poprečnom kretanju tela P kao što se ugaono kretanje linije *p*C odnosi prema ugaonom kretanju linije PC, tj., kao što se ugao VC*p* odnosi prema uglu VCP. Prema tome, u isto vreme kada telo P,



pomoću oba svoja kretanja, stigne do tačke K, telo *p*, sa jednakim kretanjem prema centru, jednako će se pomeriti iz *p* prema C i po isteku vremena, ono će se pronaći negde na liniji *mkr*, koja je, kada prolazi kroz tačku *k*, normalna u odnosu na liniju *p*C, a pomoću svog poprečnog kretanja steći će rastojanje od linije *p*C, koje će se prema rastojanju, koje je steklo drugo telo P od linije PC, odnositi kao što se poprečno kretanje tela *p* odnosi prema poprečnom kretanju tela P. Pošto je *kr* jednaka sa rastojanjem koje telo P zadobija od linije PC, a *mr* se prema *kr* odnosi kao ugao VC*p* prema uglu VCP, tj. kao poprečno kretanje tela *p* prema poprečnom kretanju tela P, očigledno je da će se telo *p*, pri isteku tog vremena, pronaći na mestu *m*. Isto bi se desilo i ako bi se tela *p* i P jednako pomerila u pravcu linija *p*C i PC i ako bi na njih delovale jednake sile u tim pravcima. Međutim, ako uzmemo da se ugao *p*C*n* odnosi prema uglu *p*C*k* kao što se ugao VC*p* odnosi prema uglu VCP i da je *n*C jednaka sa *k*C, onda će telo *p*, pri isteku vremena, stvarno biti u tački *n* i zbog toga na njega deluje jača sila nego na telo P, ako je ugao *n*C*p* veći od ugla *k*C*p*, tj. ako se orbita *upk* kreće ili *direktno* ili *retrogradno*, brzinom koja je dvostruko veća od one kojom se kreće linija CP *direktno*, a na njega deluje slabija sila ako se orbita kreće sporije *retrogradno*. Razlika sila biće proporcionalna sa intervalom *mn* između položaja kroz koja će telo proći pomoću delovanja te razlike i u tom datom delu vremenu. Ako pretpostavimo da je oko centra C sa intervalom C*n* ili C*k* opisan krug koji seče linije *mr* i *mn*, produžene u tačkama *s* i *t*, onda će pravougaonik *mn* × *mt* biti jednak sa pravougaonikom *mk* × *ms*, a *mn* će biti jednako sa $\frac{mk \times ms}{mt}$. Pošto trouglovi *p*C*k* i *p*C*n*, u datom vremenu, imaju datu veličinu, *kr* i *mr*, i njihova razlika *mk*, kao i njihov zbir *ms*, obrnuto su proporcionalni sa visinom *p*C, pa je zato pravougaonik *mk* × *ms* obrnuto proporcionalan sa kvadratom visine *p*C. Dalje, *mt* je direktno proporcionalno sa ½ *mt*, tj. sa visinom *p*C, a to su prvi odnosi nastalih linija. Stoga je $\frac{mk \times ms}{mt}$, tj. nastala linijica *mn*, kao i razlika sila koje su proporcionalne sa njom, obrnuto proporcionalna sa visinom *p*C na kub.

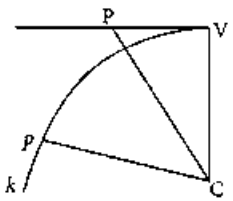


Q.E.D.

Kor. 1. Razlika između sila u položajima P i *p*, ili K i *k*, odnosi se prema sili, pomoću koje telo može da kruži kružnim kretanjem iz R do K, tokom istog vremena za koje telo P na nepokretnoj orbiti opisuje luk PK, kao što se nastala linija *mn* odnosi prema sinus versusu nastalog luka R, tj. kao $\frac{mk \times ms}{mt}$ prema $\frac{rk^2}{2kC}$, ili kao *mk* × *ms* prema rk^2; tj. ako uzmemo da se date veličine F i G međusobno odnose kao što se ugao VCP odnosi prema uglu VC*p*, onda će taj prethodni odnos biti GG – FF prema FF. Prema tome, ako je iz centra C, bilo kojim rastojanjem CP ili C*p*, opisana kružna oblast jednak sa celokupnom površinom VPC, koju je telo koje kruži po nepokretnoj orbiti opisalo poluprečnikom povučenim do centra u bilo kom određenom vremenu, onda će se razlika sila, pomoću koje telo P kruži po nepokretnoj orbiti, a telo *p* po pokretnoj, odnositi prema centripetalnoj sili, pomoću koje drugo telo poluprečnikom povučenim do centra može ravnomerno opisati tu oblast u istom vremenu u kom je opisana površina VPC, kao što se GG – FF odnosi prema FF. Jer, ta oblast i površina *p*C*k* međusobno se odnose kao vremena tokom kojih su opisani.

Kor. 2. Ako je orbita VPK elipsa sa žižom C i najvećom apsidom V i ako pretpostavimo da je njoj slična i ista elipsa *upk*, tako da *p*C uvek može biti jednaka sa PC, a odnos ugla VC*p* prema uglu VCP jednak je datom odnosu između G i F i ako visine PC ili *p*C označimo sa A, a žižni parametar elipse sa 2R, onda će sila, pod čijim dejstvom telo može da kruži po pokretnoj elipsi, biti proporcionalna sa $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG - RFF}{A^3}$ i *vice versa*. Neka je sila pomoću koje telo može da kruži po nepokretnoj elipsi izražena kao $\frac{FF}{AA}$, onda će sila koja deluje u tački V biti $\frac{FF}{CV^3}$. Međutim, sila pomoću koje telo može da se kreće po krugu na rastojanju CV i istom brzinom koju u tački V ima telo koje kruži po elipsi, odnosi se prema sili, koja deluje na apsidu V tela koje kruži po elipsi, kao što se polovina žižnog parametra elipse odnosi prema poluprečniku CV kruga i prema tome jednaka je sa $\frac{RFF}{CV^3}$; sila koja se prema njoj odnosi, kao GG – FF prema FF, jednaka je sa $\frac{RGG - RFF}{CV^3}$. Ta sila je (prema Kor. 1 ove Propozicije) razlika sila koje deluju u tački V na telo P koje kruži po nepokretnoj elipsi VPK i na telo *p* koje se kreće po pokretnoj elipsi *upk*. Prema tome, shodno ovoj Propoziciji, ta razlika se, na bilo kojoj visini A, prema sebi samoj, na visini CV, odnosi kao $\frac{1}{A^3}$ prema $\frac{1}{CV^3}$, a ista razlika na svakoj visini A biće kao $\frac{RGG - RFF}{A^3}$. Zbog

toga, ako sili $\frac{FF}{AA}$, pomoću koje telo može da kruži po nepokretnoj elipsi VPK, dodamo $\frac{RGG - RFF}{A'}$, zbir će biti celokupna sila $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG - RFF}{A'}$ pomoću koje telo, u istom vremenu, može da kruži po pokretnoj elipsi *upk*.



Kor. 3. Na sličan način možemo pronaći da će se sile, pomoću kojih tela mogu da kruže po nepokretnoj i pokretnoj elipsi, u jednakim vremenima, međusobno odnositi kao $\frac{FFA}{T'}$ i $\frac{FFA}{T'} + \frac{RGG - RFF}{A'}$; ako pretpostavimo da je nepokretna orbita VPK elipsa, čiji je centar u centru sile C i njoj slična, jednaka i koncentrična pokretna elipsa *upk*, i ako je 2R osnovni žižni parametar te elipse, a 2T *latus transversum*, ili veća osa, i ako se ugao VC*p* neprekidno odnosi prema uglu VCP kao G prema F.

Kor. 4. Uopšteno, ako je najveća visina CV tela označena sa T i ako je poluprečnik krive koju orbita VPK ima u tački V, tj. poluprečnik kruga jednake krive, označen sa R i ako je centripetalna sila, pomoću koje telo može da kruži po bilo kojoj nepokretnoj putanji VPK na mestu V, označena sa $\frac{VF}{TT}$, a u ostalim mestima je P neograničeno nazvano X, visina CP označena sa A, a G je prema F kao dat odnos ugla VC*p* prema VCP – onda će centripetalna sila, pomoću koje će isto telo izvoditi ista kretanja u istom vremenu i pomoću koje će se okretati kružnim kretanjem na istoj putanji *upk*, iznositi zbir sila $X + \frac{VRGG - VRFF}{A'}$.

Kor. 5. Pošto je dato kretanje tela po nepokretnoj orbiti, njegovo ugaono kretanje oko centra sila može biti povećan ili umanjen u datom odnosu i odatle se mogu pronaći nove nepokretne orbite po kojima tela mogu kružiti sa novim centripetalnim silama.

Kor. 6. Ako se podigne linija VP neodređene dužine, normalno u odnosu na liniju CV koja je data prema položaju i ako se povuče CP, koja zajedno sa njoj jednakom C*p* čini ugao VC*p* koji ima dat odnos sa uglom VCP onda će sila, pomoću koje telo može da kruži po krivoj liniji V, koju neprekidno opisuje tačka *p*, biti obrnuto proporcionalna sa visinom C*p* na kub. Jer telo P, samo uz pomoć sopstvene *vis inertiae*, bez dejstva bilo koje druge sile, može da nastavi da se kreće ravnomerno po pravoj liniji VP. Ako onda dodamo silu koja teži ka centru C i koja je obrnuto proporcionalna sa visinom CP ili C*p* na kub, tad će telo (prema onome što je upravo pokazano) skrenuti sa svog pravolinijskog kretanja na krivu liniju V*pk*. Međutim, ova kriva linija V*pk* jednaka je sa krivom VPQ koju

smo pronašli u Kor. 3 Prop. XLI, u kojoj sam naglasio da će se tela, koja su privučena pomoću takvih sila, koso udaljavati od centra.

PROPOZICIJA XLV. PROBLEM XXXI

Pronaći kretanja apsida po orbitama koje su veoma bliske kružnim.

Ovaj problem rešava se aritmetički tako što se orbita, koju u nepokretnom mestu opisuje telo koje kruži po pokretnoj elipsi (kao u Kor. 2 i 3 prethodne Propozicije) svede na figuru orbite čije apside tražimo. Zatim se odrede apside orbite koju to telo opisuje u nepokretnoj ravni. Međutim, orbite dobijaju istu figuru ako su međusobno upoređene centripetalne sile, pomoću kojih su orbite opisane, proporcionalne na jednakim visinama. Neka tačka V bude najviša apsida, označićemo sa T najveću visinu CV, a sa A bilo koju drugu visinu CP ili C*p*, a razliku između visina CV – CP označićemo sa X. Ako zamenimo T – X sa A, onda će sila, pomoću koje se telo kreće po elipsi kružeći oko žiže C (kao u Kor. 2) i koja je u Kor. 2 bila izražena kao $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG - RFF}{A'}$, tj. kao $\frac{FFA + RGG - RFF}{A'}$, biti izražena kao $\frac{RGG - RFF + TFF - FFX}{A'}$. Na sličan način bi trebalo svesti bilo koju drugu centripetalnu silu na razlomak čiji je imenilac A^3 i čiji su brojioci slični usled međusobnog sravnjenja homolognih članova. Ovo će biti jasnije na osnovu primera.

Primer 1. Pretpostavimo da je centripetalna sila ravnomerna i zbog toga proporcionalna sa $\frac{A'}{A^3}$ ili sa $\frac{T' - 3TTX + 3TXX - X'}{A^3}$, ako umesto A napišemo T – X u brojiocu. Kada međusobno sravnimo odgovarajuće članove brojilaca, tj. one koji se sastoje iz datih veličina sa tim datim veličinama i one koji se sastoje iz veličina koje nisu date sa tim veličinama koje nisu date, imaćemo da se RGG – RFF + TFF prema T^3 odnosi kao – FFX prema 3TTX + 3TXX – X^3, ili kao – FF prema – 3TT + 3TX – XX. Pošto je pretpostavljeno da je orbita izuzetno bliska krugu, neka se ona poklopi sa tim krugom i pošto, u tom slučaju, R i T postaju jednaki, a X je beskonačno umanjena, granični odnosi će biti: RGG prema T^2 kao – FF prema – 3TT ili GG prema TT kao FF prema 3TT ili GG prema FF kao TT prema 3TT, tj. kao 1 prema 3, a to znači da se G prema F, tj. ugao VC*p* prema uglu VCP, odnosi kao 1 prema $\sqrt{3}$. Prema tome, pošto telo, na nepokretnoj elipsi, tokom spuštanja sa više na nižu apsidu, opisuje ugao od, ako tako mogu da kažem, 180°, onda

će drugo telo, na pokretnoj elipsi, a zbog toga na nepokretnoj orbiti o kojoj govorimo, tokom spuštanja sa više na nižu apsidu, opisati ugao VC*p* koji iznosi $\frac{180^\circ}{\sqrt{3}}$. Ovo proizlazi iz sličnosti orbite, koju opisuje telo na koje deluje ravnomerna centripetalna sila, sa takvom orbitom, koju će opisati telo u nepokretnoj ravni dok izvodi kružni put po rotirajućoj elipsi. Ove orbite su slične pomoću pomenutog sravnjenja članova. Naravno, ne univerzalno, već samo onda kad se veoma približe kružnoj figuri. Telo, koje zbog toga kruži ravnomernom centripetalnom silom po skoro kružnoj orbiti, uvek će opisivati ugao koji iznosi $\frac{180^\circ}{\sqrt{3}}$ ili 103° 55' 23" u centru. Jednom kad je opisalo ugao, dok se kreće od više apside prema nižoj, telo će ponovo opisati isti ugao prilikom vraćanja do više apside, i tako dalje *in infinitum*.

Primer 2. Pretpostavimo da je centripetalna sila proporcionalna sa bilo kojim stepenom visine A, npr. sa A^{n-3} ili $\frac{A^n}{A^3}$, gde $n-3$ i n označavaju bilo koje indekse stepena, bilo da su celi ili delimični, racionalni ili iracionalni, pozitivni ili negativni brojevi. Pošto je taj brojilac, A^n ili $(T - X)^n$, sveden na neodređene nizove metodom konverzije nizova, dobićemo da je $T^n - nXT^{n-1} + \frac{nn-n}{2}$, XXT^{n-2} itd. Upoređujući ove članove sa članovima drugog brojioca RGG – RFF + TFF – FFX dobijamo da se RGG – RFF + TFF prema T^n odnosi kao – FF prema $-nT^{n-1} + \frac{nn-n}{2}XT^{n-2}$ itd. Uzimajući granične odnose kad se orbite približavaju krugovima, dobićemo da se RGG prema T^n odnosi kao – FF prema $-nT^{n-1}$ ili da se GG prema T^{n-1} odnosi kao FF prema nT^{n-1}; zatim, da se GG prema FF odnosi kao T^{n-1} prema nT^{n-1}, tj., kao 1 prema n. Zbog toga se G prema F, tj. ugao VC*p* prema uglu VCP, odnosi kao 1 prema $\sqrt{n}$. Pošto ugao VCP, koji je opisan tokom silaska tela na elipsi od više apside prema nižoj, iznosi 180°, ugao VC*p*, koji je opisan tokom silaska tela od više ka nižoj apsidi po orbiti koja je skoro kružna, a koju telo opisuje pomoću centripetalne sile koja je proporcionalna sa A^{n-3}, biće jednak sa uglom koji iznosi $\frac{180^\circ}{\sqrt{n}}$ i pošto se taj ugao ponavlja, telo će se vratiti sa niže apside na višu, i tako dalje *in infinitum*. Na taj način, ako je centripetalna sila proporcionalna sa rastojanjem tela od centra, tj. sa A ili $\frac{A^4}{A^3}$, onda će n biti jednako sa 4, a $\sqrt{n}$ jednako sa 2 i zato će ugao između više i niže apside biti jednak sa $\frac{180^\circ}{2}$, tj., iznosiće 90°. Prema tome, telo koje je izvelo četvrtinu od jedne revolucije, stići će do niže apside, a kad je izvelo drugu četvrtinu, stići će do više apside, i tako dalje naizmenično, *in infinitum*. Ovo, takođe, sledi iz Prop. X, jer pod dejstvom takve

centripetalne sile telo će kružiti po nepokretnoj elipsi, čiji se centar poklapa sa centrom sile. Ako je centripetalna sila obrnuto proporcionalna sa rastojanjem, tj., kad je direktno proporcionalna sa $\frac{1}{A}$ ili sa $\frac{A^3}{A^4}$, onda će n biti jednako sa 2, zbog čega će ugao između više i niže apside iznositi $\frac{180^\circ}{\sqrt{2}}$, tj., 127° 16' 45". Prema tome, telo koje kruži takvom silom, neprekidnim ponavljanjem ovog ugla, zauvek će se kretati naizmenično od više ka nižoj i od niže ka višoj apsidi. Takođe, ako je centripetalna sila obrnuto proporcionalna sa bikvadratnim korenom jedanaestog stepena visine, tj. obrnuto proporcionalna sa $A^{\frac{11}{4}}$, a direktno proporcionalna sa $A^{-\frac{11}{4}}$ ili sa $\frac{A^{\frac{1}{4}}}{A^3}$, onda će n biti jednako sa $\frac{1}{4}$, a $\frac{180^\circ}{\sqrt{n}}$ biće jednako sa 360°. Zbog toga će telo, koje silazi sa više apside, i odatle neprekidno silazi, stići do niže apside kad je završilo jednu potpunu revoluciju, a odatle će se neprekidno penjati, sve dok ne završi drugu potpunu revoluciju, kad će stići ponovo do više apside i tako uvek, naizmenično.

Primer. 3. Uzmimo da m i n označavaju bilo koje indekse stepena visine, a b i c bilo koje date brojeve, i ako pretpostavimo da je centripetalna sila proporcionalna sa $\frac{bA^m + cA^n}{A^3}$, tj. sa $\frac{b(T-X)^m + c(T-X)^n}{A^3}$ ili (pomoću gorepomenute metode konvergencije nizova) sa $\frac{bT^m + cT^n - X(mbT^{m-1} + ncT^{n-1}) + \frac{mm-m}{2}bXXT^{m-2} + \frac{nn-n}{2}cXXT^{n-2} + \ldots}{A^3}$ i upoređujući članove u brojiocu, dobićemo da se RGG – RFF + TFF prema $bT^m + cT^n$ odnosi kao – FF prema $mbT^{m-1} - ncT^{n-1} + \frac{mm-m}{2}bXT^{m-2} + \frac{nn-n}{2}cXT^{n-2}$, itd. Uzimajući u obzir granične odnose koji se pojavljuju kada orbita dostigne kružni oblika, dobićemo da se GG prema $bT^{m-1} + cT^{n-1}$ odnosi kao FF prema $mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$ i GG prema FF kao $bT^{m-1} + cT^{n-1}$ prema $mbT^{n-1} + ncT^{n-1}$. Uzimajući najveću visinu CV ili T aritmetički kao jedinicu, proporcija GG prema FF odnosi se kao $b + c$ prema $mb + nc$, a zbog toga i kao 1 prema $\frac{mb+nc}{b+c}$. Odatle se G prema F, tj., ugao VC*p* prema uglu VCP, odnosi kao 1 prema $\sqrt{\frac{mb+nc}{b+c}}$. I pošto ugao VCP, između više i niže apside na nepokretnoj elipsi, iznosi 180°, onda će ugao VC*p*, između istih apsida i na orbiti koju telo opisuje dejstvom centripetalne sile, proporcionalne sa $\frac{bA^m + cA^n}{A^3}$, postati jednak sa uglom koji iznosi $180^\circ\sqrt{\frac{b+c}{mb+nc}}$. Istim rasuđivanjem, ako je centripetalna sila proporcionalna sa $\frac{bA^m + cA^n}{A^3}$, onda ćemo pronaći da je ugao između apsida jednak sa $180^\circ\sqrt{\frac{b-c}{mb-nc}}$. Na isti način, Problem se rešava i u komplikovanijim slučajevima. Veličina sa kojom je proporcionalna centripetalna sila mora se uvek razložiti na konvergentne nizove

čiji je imenilac A^3. Onda se pretpostavlja da je poznat član brojioca, koji se pojavljuje u ovoj operaciji, u istom odnosu sa onim njegovim članom koji nije poznat, tj., odnosi se kao poznat član ovog brojioca RGG – RFF + TFF – FFX prema nepoznatom članu istog brojioca. Odbacivanjem prekomernih veličina i pisanjem jedinice umesto T, dobićemo proporciju G prema F.

Kor. 1. Prema tome, ako je centripetalna sila proporcionalna sa bilo kojim stepenom visine, taj stepen se može pronaći iz kretanja apsida, i obrnuto. To jest, ako se celokupno ugaono kretanje, kojim se telo vraća do iste apside, odnosi prema ugaonom kretanju od jedne revolucije, tj., 360°, kao što se bilo koji broj *m* odnosi prema drugom broju *n* i ako je visina označena sa A, onda će sila biti proporcionalna sa stepenom visine A, $A^{\frac{nn}{mm}-3}$, pri čemu je indeks stepena $\frac{nn}{mm}-3$, kao što proizlazi iz drugog primera. Odatle je jasno da se sila, pri udaljavanju od centra, ne može umanjiti za odnos koji je veći od visine na kub. Telo koje kruži pod dejstvom takve sile i koje se udaljava od apside, ako je jednom počelo da silazi, ne može nikad stići do niže apside ili do najmanje visine, već će se približavati centru, opisujući krivu liniju o kojoj je pisano u Kor. 3 Prop. XLI. Međutim, ako prilikom podizanja od niže apside, telo počne zanemarljivo da se udaljava, udaljavaće se *in infinitum* i nikad neće stići do više apside, ali će opisati krivu liniju o kojoj je pisano u Kor. 3 i Kor. 6 Prop. XLIV. Prema tome, ako se sila u svom udaljavanju od centra umanjuje za odnos koji nije veći od visine na kub, telo će se, prilikom odvajanja od apside, ili približavati centru ili udaljavati *in infinitum*, u zavisnosti od toga da li se približava centru ili se udaljava od centra na početku svog kretanja. Međutim, ako se sila, prilikom povlačenja od centra, ili umanjuje za odnos koji je manji od visine na kub, ili povećava za bilo koji drugi odnos visine, telo se neće nikad približiti centru, ali će u nekom vremenu stići do niže apside i obrnuto, ako telo, koje se naizmenično udaljava i približava od jedne apside prema drugoj, nikad ne stiže do centra, onda će se sila ili povećavati prilikom udaljavanja od centra ili će se umanjivati za odnos koji je manji od visine na kub; i što se telo brže vrati od jedne apside do druge, odnos sila sve više odstupa od kubne proporcionalnosti. Ako se telo vrati do više apside ili odlazi od nje, naizmeničnim udaljavanjem i približavanjem, tokom S revolucija, ili za 4, 2 ili 1 ½ revoluciju, tj., ako se *m* odnosi prema *n* kao 8, ili 4, ili 2 ili 1 ½ prema 1, pa je $\frac{nn}{mm}-3$ zbog toga $\frac{1}{64}-3$, ili $\frac{1}{16}-3$, ili $\frac{1}{4}-3$, ili $\frac{4}{9}-3$ – onda će sila biti

proporcionalna sa $A^{\frac{1}{64}-3}$, ili sa $A^{\frac{1}{16}-3}$, ili sa $A^{\frac{1}{4}-3}$, ili sa $A^{\frac{4}{9}-3}$, tj., biće obrnuto proporcionalna sa $A^{2\frac{1}{64}}$, ili sa $A^{2\frac{1}{16}}$, ili sa $A^{2\frac{1}{4}}$, ili sa $A^{2\frac{4}{9}}$. Ako se telo, posle svake revolucije, vrati do iste apside, a apsida ostane nepokrenuta, onda će se *m* prema *n* odnositi kao 1 prema 1, pa će zbog toga $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ biti jednako sa A^{-2} ili sa $\frac{1}{AA}$. Prema tome, sila je obrnuto proporcionalna sa visinom, kao što je gore pokazano. Ako se telo za $\frac{3}{4}$, ili $\frac{2}{3}$, ili $\frac{1}{3}$, ili za $\frac{1}{4}$ od celokupne revolucije, vrati do iste apside, onda će se *m* prema *n* odnositi kao $\frac{3}{4}$, ili $\frac{2}{3}$, ili $\frac{1}{3}$, ili $\frac{1}{4}$ prema 1, i zbog toga je $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ jednako sa $A^{\frac{16}{9}-3}$, ili $A^{\frac{9}{4}-3}$, ili A^{9-3}, ili sa A^{16-3}. Prema tome, sila je ili obrnuto proporcionalna sa $A^{\frac{31}{9}}$ ili sa $A^{\frac{3}{4}}$ ili je direktno proporcionalna sa A^6 ili A^{13}. Naposletku, ako telo tokom svog napretka od više apside opet prema istoj toj apsidi, prođe jednu celu revoluciju sa 3 stepena više, pa se zbog toga ta apsida, tokom svake revolucije, pomeri za 3 stepena, *direktno*, onda će se *m* prema *n* odnositi kao 360° prema 360°, ili kao 120° prema 120°, pa će stoga $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ biti jednako sa $A^{\frac{29528}{14641}}$, pa će centripetalna sila biti obrnuto proporcionalna sa $A^{\frac{29528}{14641}}$ ili približno sa $A^{\frac{5}{243}}$. Prema tome, centripetalna sila umanjuje se u odnosu koji je nešto veći od kvadratnog, ali približava se 59 ¾ puta bliže kvadratnom nego kubnom odnosu.

Kor. 2. Takođe, ako telo, na koje deluje centripetalna sila koja je obrnuto proporcionalna sa kvadratom visine, kruži po elipsi čija je žiža u centru sila i ako se nova i strana sila doda ili oduzme od ove centripetalne sile, može biti poznato kretanje apsida koje proishode iz te strane sile (prema trećem primeru), i obrnuto. Ako je sila, kojom telo kruži po elipsi, proporcionalna sa $\frac{1}{AA}$, a strana sila koja je oduzeta sa *c*A, tako da je preostala sila proporcionalna sa $\frac{A-cA'}{A'}$, onda će (prema trećem primeru) *b* biti jednako sa 1, *m* će biti jednako sa 1, a *n* će biti jednako sa 4, pa je ugao revolucije između apsida jednak sa $180°\sqrt{\frac{1}{1-c}}$. Pretpostavimo da je strana sila 357,45 puta manja od druge sile kojom telo kruži po elipsi, tj., neka je $c=\frac{100}{35745}$, a A ili T neka su jednaki sa 1 – tada će $180°\sqrt{\frac{1}{1-c}}$ biti jednako sa 180° ili 180,7623, tj. 180° 45' 44". Prema tome, telo, koje se odvaja od više apside, stići će do niže apside sa ugaonim kretanjem od 180° 45' 44" i pošto se ugaono kretanje ponavlja, ono će se vratiti do više apside. Zbog toga će viša apsida u svakoj revoluciji ići napred za 1° 31' 28". Apsida Meseca približno je dvostruko brža.

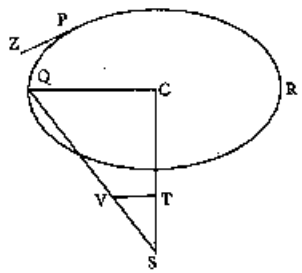
Toliko o kretanjima tela po orbitama čije ravni prolaze kroz centar sila. Preostaje da odredimo kretanja po ekscentričnim ravnima. Autori koji su razmatrali kretanja teških tela obično su uzimali u obzir uspinjanje i spuštanje tih tela, ne samo u normalnom smeru, već i na svim stepenima kosog smera naspram bilo koje date ravni. Iz istog razloga, na ovom mestu ćemo razmotriti kretanja tela koja teže ka centrima pod dejstvom bilo koje sile, kad se ta tela pomeraju u ekscentričnim ravnima. Pretpostavljeno je da su te ravni savršeno glatke i klizave, tako da ni najmanje ne usporavaju kretanje tela. Dalje, u ovim postavkama, umesto ravni na kojima se tela kotrljaju ili kliže i koje su zbog toga dodirne ravni tih tela, upotrebiću ravni koje su paralelne sa njima i po kojima se centri tela kreću, opisujući pritom orbite. Pomoću istog metoda, kasnije ću odrediti kretanje tela koja su izvedena na krivim površinama.

ODELJAK X

O kretanju tela po datim površinama i o recipročnom kretanju okačenih tela

PROPOZICIJA XLVI. PROBLEM XXXII

Ako je pretpostavljena bilo koja centripetalna sila i ako je poznat centar sile, kao i bilo koja ravan po kojoj telo kruži, i ako smatramo poznatim kvadraturu krivolinijskih figura – potrebno je odrediti kretanje tela iz datog mesta, sa datom brzinom i u smeru date prave linije u toj ravni.



Neka je S centar sile, SC najmanje rastojanje tog centra od date ravni, P telo koje polazi iz mesta P u smeru prave linije PZ, Q isto to telo koje kruži po svojoj putanji, a PQR sama putanja koju je potrebno pronaći, a koja je opisana u toj datoj ravni. Spojićemo CQ i QS i ako na QS položimo SV koja je proporcionalna sa centripetalnom silom, čijim dejstvom telo teži prema centru S i ako povučemo VT paralelno sa CQ koja seče SC u tački T, onda, ako se sila SV razloži na dve sile (prema Kor. 2 Zakona o kretanju) na

silu ST i silu TV, od kojih sila ST, koja privlači telo u smeru linije koja je normalna u odnosu na tu ravan, uopšte ne menja njegovo kretanje u toj ravni. Međutim, delovanje druge sile TV, koja se poklapa sa položajem same ravni, privlači telo direktno prema datoj tački C u toj ravni i zbog toga uzrokuje da se telo kreće u toj ravni na način kao da ne postoji sila ST, pa bi telo kružilo po slobodnom prostoru oko centra C, pod dejstvom samo sile TV. Ali, pošto je data centripetalna sila TV pomoću koje telo Q kruži po slobodnom prostoru oko datog centra C, onda je (prema Prop. XLII) poznata putanja PQR, koju telo opisuje, mesto Q, u kom će se pronaći telo u bilo kom datom vremenu, i na kraju, brzina tela u tom mestu Q, *e contra*. Q.E.I.

PROPOZICIJA XLVII. TEOREMA XV

Ako pretpostavimo da je centripetalna sila proporcionalna sa rastojanjem tela od centra, onda će sva tela koja kruže u bilo kojim ravnima opisivati elipse, i dovršiće svoje revolucije u jednakim vremenima, a ona tela koja se kreću po pravoj liniji i koja se naizmenično kreću napred i nazad, dovršiće svoje potpune oscilacije u istim vremenima.

Zadržavajući sve kao u prethodnoj Propoziciji, tako da je sila SV, čijim je dejstvom telo Q koje kruži u bilo kojoj ravni PQR privučeno prema centru S, proporcionalna sa rastojanjem SQ i pošto su SV i SQ, kao i TV i CQ proporcionalne, onda je sila TV, čijim je dejstvom telo privučeno prema datoj tački C u ravni orbite, proporcionalna sa rastojanjem CQ. Zbog toga su sile, pomoću kojih su pronađena tela u ravni PQR privučena prema tački C, na jednakim rastojanjima jednake sa silama pomoću kojih su tela privučena prema centru S. Prema tome, tela će se kretati oko tačke C, u istim vremenima, po istim figurama, i u bilo kojoj ravni PQR, kao što bi se kretala u slobodnim prostorima oko centra S i zbog toga će, u jednakim vremenima (prema Kor. 2 Prop. X i Kor. 2 Prop. XXXVIII) ili opisivati elipse u toj ravni oko centra C ili će se kretati napred i nazad po pravoj liniji, prolazeći kroz centar C u toj ravni i u svim slučajevima završiće istim periodom vremena. Q.E.D.

SHOLIJA

Uspinjanje i padanje tela po krivim površinama u bliskoj su vezi sa ovim kretanjima o kojima smo govorili. Zamislimo da su krive linije opisane u bilo kojoj ravni i da kruže oko bilo kojih datih osa, prolazeći kroz centar sile, i da tim kruženjem opisuju krive površine, kao i da se tela kreću na takav način da se njihovi centri uvek mogu pronaći na tim površinama. I ako se ta tela naizmenično kreću napred i nazad sa kosim uspinjanjem i padanjem, njihova kretanja će se izvoditi u ravnima koje prolaze kroz osu, pa zbog toga i po krivim linijama, čijim su revolucijama i stvorene te krive površine. Prema tome, u takvim slučajevima, bilo bi dovoljno razmatrati kretanja po tim krivim linijama.

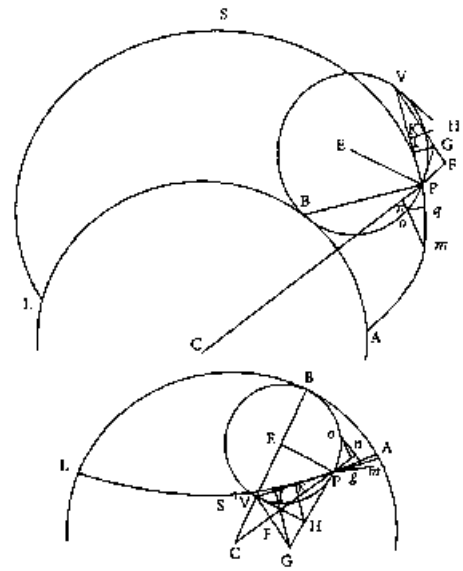
PROPOZICIJA XLVIII. TEOREMA XVI

Ako točak stoji na spoljašnjoj strani površine lopte pod pravim uglom i ako se, kružeći oko svoje ose, kreće napred po velikom krugu, onda se dužina krivolinijskog puta, koji je bilo koja tačka koja je data na obimu točka opisala počev od momenta kad je dodirnuo loptu (a taj krivolinijski put možemo nazvati cikloidom ili epicikloidom), odnosi prema dvostrukom sinus versusu polovine luka, a koji je od tog vremena dodirnuo loptu prolazeći preko nje, kao što se zbir prečnika lopte i točka odnosi prema poluprečniku lopte.

PROPOZICIJA XLIX. TEOREMA XVII

Ako točak stoji na unutrašnjoj strani površine konkavne lopte pod pravim uglom i ako se, kružeći oko svoje ose, kreće napred po jednom od velikih krugova lopte, onda se dužina krivolinijskog puta, koji je bilo koja tačka koja je data na obimu točka opisala pošto je dodirnuo loptu, odnosi prema dvostrukom sinus versusu polovine luka, koji sve to vreme dodiruje loptu prolazeći preko nje, kao što se razlika prečnika lopte i točka odnosi prema poluprečniku lopte.

Neka je ABL lopta, C njen centar, BPV točak koji stoji na njoj, E centar točka, B dodirna tačka, a P data tačka na obimu točka. Zamislimo da ovaj točak ide napred po velikom krugu ABL iz A, preko B, do L i da tokom kretanja kruži na takav način da lukovi AB i PB uvek mogu biti međusobno jednaki, a da data tačka P na obimu točka može opisati u srednjem vremenu krivolinijski put AP. Neka je AP celokupni krivolinijski put koji je opisan pošto je točak dodirnuo loptu u tački A, a dužina ovog puta AP odnosiće se prema dvostrukom sinus versusu luka ½ PB kao 2CE prema CB. Neka prava linija CE (koja se može produžiti ako je to neophodno) dodiruje točak u tački V, a spojićemo i CP, BP, EP i VP; produžićemo CP i neka na nju padne normala VF. Neka PH i VH, koje se seku u tački H, dodiruju krug u P i V i neka PH seče VF u G, a na VP spustićemo normale GI i HK. Neka je iz centra C, sa bilo kojim intervalom, opisan krug *nom*, koji seče pravu liniju CP u tački *n*, obim točka BP u tački *o*, a krivolinijski put AP u tački *m*; iz centra V, sa poluprečnikom V*o*, neka je opisan krug koji seče produženu VP u tački *q*.



Pošto točak, tokom svog kretanja, uvek kruži oko dodirne tačke B, očigledno je da je prava linija BP normalna u odnosu na tu krivu liniju AP, koju opisuje tačka P točka, pa je zbog toga jasno i da će prava linija VP dodirnuti ovu krivu u tački P. Neka se poluprečnik kruga *nom* postepeno povećava ili umanjuje, tako da na kraju postane jednak sa rastojanjem CP; usled sličnosti iščezavajućih figura P*nomq* i PFGVI, krajnji odnos iščezavajućih linijica P*m*, P*n*, P*o* i P*q*, tj., odnos trenutnih promena krive AP, prave linije CP, kružnog luka BP i prave linije VP, biće isti kao i odnos linija PV, PF, PG i PI, tim redom. Međutim, pošto je VF normalna u odnosu na CF, a VH u odnosu na CV, i pošto su, zbog toga, uglovi HVG i VCF jednaki, a ugao VHG (pošto su uglovi četvorostrane

figure HVEP pravi u V i P) jednak sa uglom CEP, onda će trouglovi VHG i CEP biti slični; odatle sledi da je EP prema CE isto kao HG prema HV ili HP, kao i KI prema KP, a slaganjem ili deljenjem dobijamo da je CB prema CE isto kao PI prema PK, a udvostručavanjem sledećih, da je CB prema 2CE isto kao PI prema PV, kao i *Pq* prema *Pm*. Prema tome, umanjenje linije VP, tj. povećanje linije BV – VP, prema povećanju krive linije AP nalazi se u datom odnosu od CB prema 2CE, pa su zbog toga (prema Kor. Leme IV) dužine BV – VP i AP, koje su stvorene tim povećanjima, u istom odnosu. Ali, ako je BV poluprečnik, VP kosinus ugla BVP ili $\frac{1}{2}$ BEP, pa je zbog toga BV – VP sinus versus istog tog ugla, onda će, na ovom točku čiji je poluprečnik $\frac{1}{2}$ BV, veličina BV – VP biti dvostruki sinus versus luka $\frac{1}{2}$ BP. Zato se AP prema dvostrukom sinus versusu luka $\frac{1}{2}$ BP odnosi kao 2CE prema CB. Q.E.D.

Razlikovanja radi, liniju AP iz prethodnih propozicija, nazvaćemo cikloidom bez lopte, a drugu u kasnijoj propoziciji cikloidom unutar lopte.

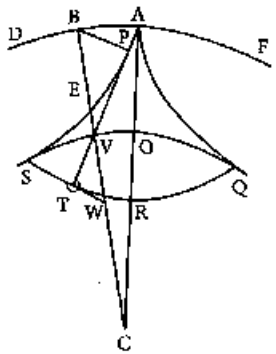
Kor. 1. Ako je opisana cela cikloida ASL i ako je presečena na pola u tački S, onda će se dužina dela PS prema dužini PV (koja je dvostruki sinus ugla VBP kada je EB poluprečnik) odnositi kao 2CE prema CB i, prema tome, u datom su odnosu.

Kor. 2. Dužina poluobima cikloide AS biće jednaka sa pravom linijom koja se prema prečniku točka BV odnosi kao 2CE prema CB.

PROPOZICIJA L. PROBLEM XXXIII

Uzrokovati da okačeno telo osciluje po datoj cikloidi.

Neka je, unutar lopte QVS opisane oko centra C, data cikloida QRS, čija je sredina u tački R, i koja seče površine lopte u krajnjim tačkama Q i S, sa obe strane. Povući ćemo CR koja će prepoloviti luk QS u O, i neka je produžena do A tako da se CA prema CO može odnositi kao CO prema CR. Oko centra C, sa intervalom CA, neka je opisana spoljašnja lopta DAF, a unutar ove lopte, pomoću točka čiji je prečnik AO, neka su opisane polucikloide AQ i AS, koje dodiruju unutrašnju loptu u Q i S i koje seku spoljašnju loptu u A. Iz te



tačke A, neka na niti APT, čija je dužina jednaka sa linijom AR, visi telo T i neka osciluje između dve polucikloide AQ i AS, tako da dok se klatno odmiče od normale AR, gornji deo niti AP poklapa se sa polucikloidom APS ka kojoj kretanje teži, i savija duž te zakrivljene linije, kao da je neka čvrsta prepreka, dok preostali deo iste niti PT, koji još nije dodirnuo polucikloidu, nastavlja ravno. U tom slučaju će težina tela T oscilovati po datoj cikloidi QRS. Q.E.F.

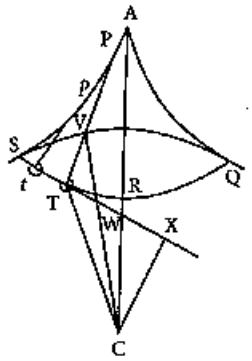
Neka nit PT seče cikloidu QRS u tački T, a krug QOS u V i neka je povučena CV. Neka su do pravolinijskog dela niti PT, iz krajnjih tačaka P i T, podignute normale BP i TW, koje seku pravu liniju CV u B i W. Iz obrazovanja i formiranja sličnih figura AS i SR, jasno je da su te normale PB i TW, koje odsecaju iz CV dužine VB i VW, jednake sa prečnicima točkova OA i OR. Prema tome, TP se prema VP (dvostruki sinus ugla VBP kada je $\frac{1}{2}$ BV poluprečnik) odnosi kao BW prema BV, ili kao AO + OR prema AO, tj., (pošto su CA i CO, CO i CR i divizijom AO i OR proporcionalne), kao CA + CO prema CA, ili, ako je BV prepolovljena u E, kao 2CE prema CB. Zbog toga je (prema Kor. 1 Prop. XLIX) dužina pravolinijskog dela niti PT uvek jednaka luku cikloide PS, a cela nit APT uvek jednaka polovini cikloide APS, tj. (prema Kor. 2 Prop. XLIX) jednaka dužini AR. I obrnuto, ako nit uvek ostaje jednaka sa dužinom AR, onda će se tačka T uvek pomerati po datoj cikloidi QRS. Q.E.D.

Kor. Nit AR jednaka je sa polucikloidom AS, pa zbog toga ima isti odnos prema AC, poluprečniku spoljašnje lopte, kao što se polucikloida SR odnosi prema CO, poluprečniku unutrašnje lopte.

PROPOZICIJA LI. TEOREMA XVIII

Ako centripetalna sila sa svih strana teži ka centru C lopte, i ako je svugde proporcionalna sa rastojanjem mesta do centra, i ako samo ta sila deluje na telo T, koje osciluje (na način koji je gore objašnjen) po obimu cikloide QRS – tvrdim da će sve oscilacije, bez obzira na to koliko su međusobno nejednake, biti izvedene u jednakim vremenima.

Na tangentu TW, koja je neograničeno produžena, spustićemo normalu CX i spojićemo CT. Pošto je centripetalna sila, kojom je telo T ustremljeno ka centru C, proporcionalna sa rastojanjem CT, neka je ona (prema Kor. 2 Zakona) razložena na delove CX i TX,



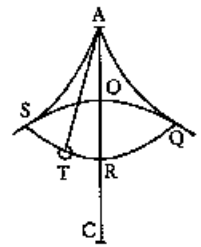
od kojih je deo CX, sila koja deluje na telo direktno iz P, zatežući nit PT i koja ne proizvodi nikakvo drugo dejstvo osim potpunog poništavanja otpora niti. Međutim, drugi deo TX, sila koja deluje na telo poprečno ili prema X, direktno ubrzava kretanje po cikloidi. Tada je očigledno da će ubrzanje tela, koje je proporcionalno sa ovom ubrzavajućom silom, u svakom momentu biti proporcionalno sa dužinom TX, tj. (pošto su date, njima proporcionalne, CV, WV i TX, TW) biće proporcionalna sa dužinom TW, tj. (prema Kor. 1 Prop. XLIX) sa dužinom luka cikloide TR. Zbog toga, ako su dva klatna APT i A*pt* istovremeno puštena, pritom nejednako povučena sa strane od normale AR, onda će njihova ubrzanja uvek biti proporcionalna sa lukovima koji treba da se opišu, TR i *t*R. Međutim, delovi koji su opisani na početku kretanja proporcionalni su sa ubrzanjima, tj., sa celinama koje se opisuju na početku, pa su zbog toga delovi koji tek treba da se opišu, kao i potonja ubrzanja, koja su proporcionalna sa tim delovima, takođe proporcionalni sa celinama, i tako dalje. Prema tome su ubrzanja, i tako stvorene brzine, zatim delovi opisani tim brzinama, i delovi koji tek treba da se opišu, uvek proporcionalni sa celinama. Zbog toga će delovi koji treba da se opišu, održavajući međusobno dat odnos, nestati zajedno, tj., dva tela koja osciluju zajedno će stići do normale AR. S druge strane, pošto je uspinjanje klatna, iz najnižeg mesta R kroz iste cikloidne lukove sa retrogradnim kretanjem, usporeno na pojedinačnim mestima kroz koja prolaze pomoću istih sila koje ubrzavaju njihovo padanje, jasno je da su brzine njihovih uspinjanja i padanja kroz iste lukove jednake, pa su usled toga izvedene tokom istih vremena. Pošto su dva dela cikloide RS i RQ, koja se nalaze sa obe strane normale, slična i jednaka, onda će dva klatna izvesti kako potpune oscilacije, tako i polovine svojih oscilacija, tokom istog vremena. Q.E.D.

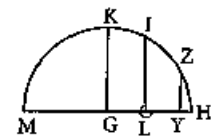
Kor. Sila pomoću koje je telo T ili ubrzano ili usporeno na bilo kom mestu T cikloide, odnosi se prema celoj težini istog tela na najvišem mestu S ili Q, kao što se luk cikloide TR odnosi prema luku SR ili QR.

PROPOZICIJA LII. PROBLEM XXXIV

Odrediti brzine klatna na pojedinačnim mestima i vremena za koje će se izvesti kako potpune, tako i delimične oscilacije.

Oko bilo kog centra G, sa intervalom GH koji je jednak sa lukom cikloide RS, opisaćemo polukrug HKM koji je prepolovljen poluprečnikom GK. Ako centripetalna sila, koja je proporcionalna sa rastojanjem mesta od centra, teži ka centru G, i ako je na obimu HIK jednaka sa centripetalnom silom na obimu lopte QOS koja teži kao svom centru, i kada se u isto vreme pusti klatno T iz najvišeg položaja S, telo, kao što je L, pušteno je da pada iz H prema G; onda će usled početne jednakosti sile koje deluju na tela i koje su uvek proporcionalne prostoru koji se opisuje TR i LG, i ako su TR i LG jednaki, i ako su jednaki i lukovi u mestima T i L, onda je jasno da će ta tela na početku opisivati jednake prostore ST i HL, i s obzirom na to što na njih sile još uvek deluju jednako, tela će nastaviti da opisuju jednake prostore.





Prema Prop. XXXVIII, vreme, tokom kog telo opisuje luk ST odnosi se prema vremenu jedne oscilacije, kao što se luk HI, koji je proporcionalan sa vremenom za koje telo H stiže do L, odnosi prema polukrugu HKM, koji je proporcionalan sa vremenom za koje će telo H stići do M. A brzina klatna na mestu T odnosi se prema svojoj brzini na najnižem mestu R, tj., brzina tela H na mestu L odnosi se prema svojoj brzini na mestu G, tj., trenutno povećanje linije HI odnosi se prema trenutnom povećanju linije HG (a lukovi HI i HK povećavaju se ujednačenim tokom) kao što se ordinata LI odnosi prema poluprečniku GK, ili kao $\sqrt{SR^2 - TR^2}$ prema SR. Pošto su tokom nejednakih oscilacija u istom vremenu opisani lukovi koji su proporcionalni sa celim lukovima oscilacija, onda su iz poznatih vremena dobijene i brzine i lukovi koji su opisani tokom svih oscilacija, bez izuzetka. I to je pre svega bilo neophodno utvrditi.

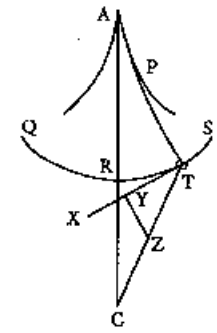
Sada, neka klatna osciluju na različitim cikloidama, opisanim unutar različitih lopti, pri čemu su apsolutne sile takođe različite. Ako je apsolutna sila bilo koje lopte QOS označena sa V, onda će ubrzavajuća sila, koja deluje na klatno na površini ove lopte kada

ono počinje da se pomera direktno prema centru, biti proporcionalna sa rastojanjem klatna od tog centra i apsolutne sile lopte zajedno, tj., biće proporcionalna sa CO × V. U tom slučaju će linijica HY, koja je proporcionalna sa ovom ubrzavajućom silom CO × V, biti opisana u datom vremenu i ako se podigne normala YZ koja seče krug u tački Z, nastali luk HZ će predstavljati to dato vreme. Međutim, nastali luk proporcionalan je sa kvadratnim korenom pravougaonika GHY, tj., sa $\sqrt{GH \times CO \times V}$. Odatle sledi da će vreme potpune oscilacije na cikloidi QRS (pošto je direktno proporcionalno sa polukrugom HKM koji označava tu potpunu oscilaciju, a obrnuto proporcionalno sa lukom HZ koji na isti način označava dato vreme) biti direktno proporcionalno sa GH, a obrnuto proporcionalno sa $\sqrt{GH \times CO \times V}$; pošto su GH i SR jednaki, ono će biti proporcionalno sa $\sqrt{\frac{SR}{CO \times V}}$ ili (prema Kor. Prop. L) sa $\sqrt{\frac{AR}{AC \times V}}$. Prema tome, oscilacije na svim loptama i cikloidama, koje su izvedene pomoću bilo kakvih apsolutnih sila, proporcionalne su sa odnosom koji se sastoji iz kvadratnog korena dužine niti direktno i kvadratnog korena rastojanja između tačke kačenja i centra lopte, obrnuto, i kvadratnog korena apsolutne sile lopte, takođe, obrnuto. Q.E.I.

Kor. 1. Odatle sledi da vremena tela koja osciluju, padaju ili kruže, mogu biti međusobno upoređena. Ako se pretpostavlja da je prečnik točka, kojim je opisana cikloida unutar lopte, jednak sa poluprečnikom lopte, onda će cikloida postati prava linija koja prolazi kroz centar lopte, a oscilacija će se promeniti u padanje, pa potom i u podizanje po toj pravoj liniji. Odatle su poznati i vreme padanja iz bilo kog mesta prema centru, kao i njemu jednako vreme tokom kog telo koje ravnomerno kruži oko centra lopte na bilo kom rastojanju opisuje luk kvadranta. Jer to vreme se (prema Slučaju 2) odnosi prema vremenu polovine oscilacije na bilo kojoj cikloidi QRS kao 1 prema $\sqrt{\frac{AR}{AC}}$.

Kor. 2. Odatle takode slede i pronalasci Rena i Hajgensa, a koji se tiču proste cikloide. Ako se prečnik lopte beskonačno poveća, njena sferična površina promeniće se u ravan, a centripetalna sila ravnomerno će delovati u smeru linija koje su normalne u odnosu na tu ravan, pa će ta cikloida postati ista sa običnom cikloidom. Međutim, u tom slučaju će dužina luka cikloide, između te ravni i tačke opisivanja, postati jednaka sa četvorostrukim sinus versusom polovine luka točka između iste te ravni i tačke opisivanja, kao što je i otkrio ser Kristofer Ren. A klatno između dve takve cikloide

oscilovaće po sličnoj i jednakoj cikloidi u jednakim vremenima, kao što je to Hajgens dokazao. Padanje teških tela takođe za vreme jedne oscilacije biće isto kao što je Hajgens izložio.

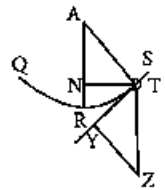


Propozicije ovde izložene prilagođene su istinskoj strukturi Zemlje, jer će točkovi, dok se kreću po bilo kom od velikih krugova, opisati cikloide bez lopte, pomoću klinova koji su učvršćeni na njihovim obimima, a klatna, u rudnicima i dubokim pećinama Zemlje, moraju oscilovati po cikloidama unutar lopte, a te oscilacije mogu biti izvedene u jednakim vremenima. Gravitacija (kao što će biti pokazano u Trećoj knjizi) opada prilikom udaljavanja od površine Zemlje; nagore – proporcionalna je sa kvadratom rastojanja od centra Zemlje; nadole – proporcionalna je sa rastojanjem.

PROPOZICIJA LIII. PROBLEM XXXV

Ako dopustimo kvadrature krivolinijskih figura, neophodno je pronaći sile pomoću kojih tela, koja se kreću po datim krivim linijama, uvek mogu izvoditi svoje oscilacije u jednakim vremenima.

Neka telo T osciluje po bilo kojoj krivoj liniji STRQ, čija osa AR prolazi kroz centar sile C. Povući ćemo TX koja dodiruje tu krivu na bilo kom mestu tela T i na toj tangenti TX uzmimo da je TY jednaka sa lukom TR. Dužina tog luka poznata je iz uobičajenog metoda koji se koristi za kvadrature figura. Iz tačke Y povući ćemo pravu liniju YZ koja je normalna na tangentu. Povući ćemo CT, tako da seče tu normalu u tački Z, pa će centripetalna sila biti proporcionalna sa pravom linijom TZ. Q.E.I.



Ako je sila, pomoću koje je telo privučeno iz T prema C, izražena pravom linijom TZ, sa kojom je proporcionalna, onda će se ta sila razložiti na dve sile TY i YZ, od kojih sila YZ, koja deluje na telo u pravcu dužine niti PT, uopšte ne menja kretanje tela, dok druga sila TY direktno ubrzava ili usporava kretanje tela po krivoj STRQ. Pošto je ta sila proporcionalna sa prostorom TR koji treba da se opiše, ubrzavanja ili usporavanja tela prilikom opisivanja dva proporcionalna dela (većeg i manjeg) dve oscilacije, uvek će biti proporcionalna sa tim delovima, pa su zato ti delovi opisani isto-

vremeno. Tela, koja neprekidno istovremeno opisuju delove proporcionalne sa celinama, istovremeno će opisati i celine. Q.E.D.

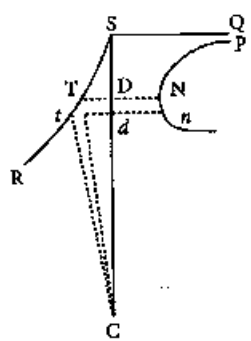
Kor. 1. Ako telo T, koje visi na pravolinijskoj niti AT iz centra A, opisuje kružni luk STRQ i ako se nalazi pod dejstvom bilo koje sile koja teži nadole u paralelnim pravcima, a koja se prema ravnomernoj sili gravitacije odnosi kao luk TR prema sinusu TN, onda će vremena pojedinačnih oscilacija biti jednaka. Pošto su TZ i AR paralelne, trouglovi ATN i ZTY su slični i zato će se TZ prema AT odnositi kao TY prema TN; tj., ako se ravnomerna sila gravitacije izrazi pomoću date dužine AT, onda će se sila TZ, pomoću koje oscilacije postaju izohrone, odnositi prema sili gravitacije AT, kao što se luk TR, koji je jednak sa TY, odnosi prema sinusu tog luka, TN.

Kor. 2. Zbog toga će u časovnicima sve oscilacije postati izohrone, ako se sila, koja pomoću neke mašine deluje na klatno tako da održava kretanje, na takav način slaže sa silom gravitacije da bi celokupna sila, koja teži nadole, uvek trebalo da bude proporcionalna sa veličinom $\frac{TR \times AR}{TN}$.

PROPOZICIJA LIV. PROBLEM XXXVI

Ako dopustimo kvadrature krivolinijskih figura, neophodno je pronaći vremena tokom kojih će tela, pomoću bilo koje centripetalne sile, padati ili se uspinjati po bilo kojim krivim linijama opisanim u ravni koja prolazi kroz centar sile.

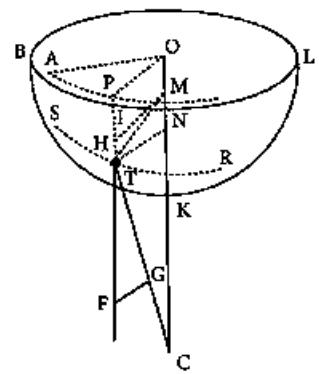
Neka telo pada iz bilo kog mesta S, po bilo kojoj krivoj STtR koja se nalazi u ravni koja prolazi kroz centar sile C. Spojićemo CS i razdelićemo je na beskonačni broj jednakih delova, a neka D*d* bude jedan od tih delova. Iz centra C, sa intervalima CD i C*d*, opisaćemo krugove DT i *dt*, koji seku krivu liniju STtR u tačkama T i *t*. Pošto je poznat zakon centripetalne sile, kao i visina CS sa koje je telo počelo da pada, biće poznata i brzina tela na bilo kojoj drugoj visini CT (prema Prop. XXXIX). Međutim, vreme za koje telo opisuje linijicu T*t* proporcionalno je sa tom linijicom, tj., direktno je proporcionalno sa sečicom ugla *t*TC, a obrnuto proporcionalno sa brzinom. Neka je ordinata DN, koja je proporcionalna sa ovim vremenom, normalna na



pravu liniju CS u tački D i pošto je D*d* dat, onda će pravougaonik D*d* × DN, tj., površina DN*nd*, biti proporcionalan sa tim vremenom. Prema tome, ako je PN*n* kriva linija na kojoj se neprekidno pronalazi tačka N i ako je njena asimptota prava linija SQ koja je normalna na liniju CS, onda će površina SQPND biti proporcionalna sa vremenom tokom kog je telo, prilikom svog padanja, opisalo liniju ST i zbog toga, kada se pronađe ta površina, biće poznato i vreme. Q.E.I.

PROPOZICIJA LV. TEOREMA XIX

Ako se telo kreće po bilo kojoj zakrivljenoj površini, čija osa prolazi kroz centar sile, a iz položaja tela je na osu spuštena normala i ako je iz bilo koje tačke na osi povučena linija paralelna i jednaka sa njom, tvrdim da će ta paralelna linija opisati površinu proporcionalnu sa vremenom.



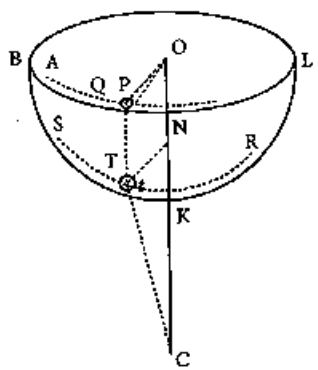
Neka je BKL zakrivljena površina; T telo koji po njoj; STR putanja koju telo opisuje na njoj; S početak putanje; OMK osa zakrivljene površine; TN prava linija koja je spuštena iz položaja tela normalno na osu; OP linija koja je paralelna i jednaka sa njom, a koja je povučena iz date tačke O na osi; AP ortografska projekcija putanje opisane tačkom P u ravni AOP, na kojoj je pronađena obrtna linija OP; A početak te projekcije, koja odgovara tački S; TC prava linija povučena iz položaja tela prema centru; TG deo te linije koji je proporcionalan sa centripetalnom silom kojom telo teži ka centru C; TM prava linija normalna na zakrivljenu površinu; TI njen deo koji je proporcionalan sa silom pritiska kojom telo deluje na površinu, i obrnuto, kojom se telo odbija od površine prema M; PTF prava linija paralelna sa osom koja prolazi kroz telo; GF i IH prave linije koje su spuštene iz tačaka G i I normalno na tu paralelu PHTF. Sada tvrdim da je površina AOP, opisana poluprečnikom OP od početka kretanja, proporcionalna sa vremenom. Sila TG je (prema Kor 2. Zakona kretanja) razložena na dve sile TF i FG, a sila TI na sile TH i HI. Sile TF i TH, koje deluju u pravcu linije PF

normalne su na površinu AOP i ne uvode nikakve promene u kretanju tela, u pravcu normalnom na tu ravan. Zbog toga je kretanje tela, dok god ima isti pravac sa položajem ravni, tj., kretanje tačke P, kojom je opisana projekcija AP putanje u toj ravni, isto kao i kad bi se uklonile sile TF i TH i kada bi na telo delovale samo sile FG i HI, kao i kada bi telo u ravni AOP opisalo krivu AP pomoću centripetalne sile koja teži prema centru O i koja je jednaka zbiru sila FG i HI. Sa takvom silom (prema Prop. I) površina AOP bila bi opisana proporcionalno sa vremenom. Q.E.D.

Kor. Istim rasuđivanjem, ako telo, na koje deluju sile koje teže prema dva ili više centara koji se nalaze na jednoj pravoj liniji CO, opisuje bilo koju krivu liniju ST u slobodnom prostoru, površina AOP uvek će biti proporcionalna sa vremenom.

PROPOZICIJA LVI. PROBLEM XXXVII

Ako dopustimo kvadrature krivolinijskih figura i ako pretpostavimo da su poznati i zakon centripetalne sile koja teži ka datom centru, kao i zakrivljena površina čija osa prolazi kroz taj centar – onda je neophodno pronaći putanju koju bi telo opisalo na toj površini, kada polazi iz datog mesta, sa datom brzinom i u datom pravcu na toj površini.



Zadržaćemo prethodnu postavku, i neka telo T ide od datog mesta S, u pravcu linije koja je data prema položaju i neka se pretvori u traženu putanju STR, čija je ortografska projekcija AP, u ravni BDO. Neka je iz date brzine tela na visini SC, takođe data njegova brzina na bilo kojoj drugoj visini TC. Sa tom brzinom i u datom momentu vremena, neka telo opiše delić T*t* svoje putanje, a neka P*p* bude projekcija tog delića opisanog u ravni AOP. Spojićemo O*p* i pošto je mali krug opisan sa intervalom T*t*, neka je projekcija tog malog kruga, u ravni AOP, elipsa *p*Q. Pošto je poznata veličina tog malog kruga T*t*, kao i rastojanja TN ili PO tog kruga od ose CO, tada će elipsa *p*Q biti data i prema vrsti i prema veličini, a biće dat i njen položaj u odnosu na pravu liniju PO. Zbog toga što je površina PO*p* proporcionalna sa vremenom, pa je poznata jer je poznato i vreme, a onda će i ugao PO*p* biti poznat. Zato je poznata i tačka *p*, koja je zajednički presek elipse i prave linije O*p*, kao i ugao OP*p*, pod kojim projekcija AP*p* putanje seče liniju OP. Odatle je lako pronaći način određivanja krive AP*p* (dosledno sa Kor. 2 Prop. XLI). Zatim ćemo iz pojedinačnih tačaka P te projekcije podignuti normale PT u ravni AOP, koje seku zakrivljenu površinu u T, pa će tako biti poznate i pojedinačne tačke T putanje. Q.E.I.

ODELJAK XI

O kretanju tela koja teže jedno drugom sa centripetalnim silama

Do sada sam izlagao privlačenja tela prema nepokretnom centru iako je vrlo verovatno da takva kretanja ne postoje u prirodi. Privlačenja se pojavljuju prema telima i, prema Zakonu III, akcije tela koje je privučeno i tela koje privlači uvek su uzajamne i jednake, tako da dva tela, ni ono koje je privučeno ni ono koje privlači, istinski ne miruju, već oba (prema Kor. 4 Zakona kretanja), pošto su međusobno privlačna, kruže oko zajedničkog centra gravitacije. Ako postoji više tela, koja su ili privučena samo jednim telom, koje je onda privučeno opet njima, ili ako se sva međusobno privlače, ta će se tela tako međusobno kretati, kao njihov zajednički centar gravitacije, tj., ili će biti u stanju mirovanja, ili će se kretati ravnomerno pravolinijski. Za sada ću razmatrati kretanja tela koja se međusobno privlače smatrajući centripetalne sile privlačenjima, mada bi se u strogo fizičkom smislu one mogle vernije nazvati impulsima. Međutim, ove propozicije treba razmatrati čisto matematički i zbog toga, ostavljajući po strani sva fizička obrazlaganja, koristiću poznatije izraze, kako bih bio razumljiviji čitaocima, matematičarima.

PROPOZICIJA LVII. TEOREMA XX

Dva tela koja se međusobno privlače opisuju slične figure oko svog zajedničkog centra gravitacije, kao i jedno oko drugog.

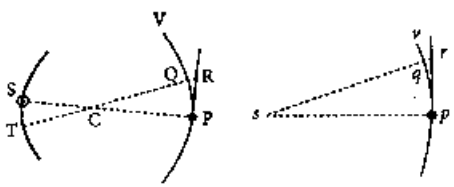
Rastojanja tela od njihovog zajedničkog centra gravitacije obrnuto su proporcionalna sa telima, pa je zbog toga poznat i njihov međusobni odnos, kao što je, usled slaganja odnosa, poznat

i odnos rastojanja među telima. Ta rastojanja kruže oko zajedničkog kraja sa jednakim ugaonim kretanjem, jer, pošto se nalaze na istoj pravoj liniji, ona nikad ne menjaju svoje međusobno nagibanje jedna prema drugoj. A prave linije, koje su u datom međusobnom odnosu i koje kruže oko svojih krajeva sa jednakim ugaonim kretanjem, opisaće u ravnima, koje su ili u stanju mirovanja na tim krajevima, ili se pomeraju sa bilo kojim kretanjem, osim sa ugaonim, figure koje su u potpunosti slične oko tih krajeva. Zbog toga su figure, koje su opisane revolucijom ovih rastojanja, slične. Q.E.D.

PROPOZICIJA LVIII. TEOREMA XXI

Ako se dva tela međusobno privlače silama bilo koje vrste i ako u međuvremenu kruže oko zajedničkog centra gravitacije, tvrdim da se, pod dejstvom istih tih sila, može opisati figura, oko tela koje se ne pomera, slična i jednaka sa figurama koje tela, koja se pomeraju, opisuju jedno oko drugog.

Neka tela S i P kruže oko zajedničkog centra gravitacije C, krećući se od S prema T i od P prema Q. Iz date tačke *s* neka se neprekidno povlače *sp* i *sq* koje su jednake i paralelne sa SP i TQ. Kriva *pqv*, koju tačka *p* opisuje tokom svoje revolucije oko nepokretne tačke *s*, biće slična i jednaka sa krivim, koje tela S i P međusobno opisuju jedno oko drugog, pa su zbog toga, prema Teoremi XX, slične sa krivim ST i PQV, koje ista tela opisuju oko zajedničkog centra gravitacije C, a to proizlazi odatle što su poznati međusobni odnosi linija SC, CP i SP ili *sp*.



Slučaj 1. Zajednički centar gravitacije C je (prema Kor. 4 Zakona kretanja) ili u stanju mirovanja ili se kreće ravnomerno pravolinijski. Na početku, pretpostavimo da je u stanju mirovanja i neka su na *s* i *p* smeštena dva tela, od kojih je jedno nepokretno u tački *s*, a drugo pokretno u tački *p* i koja su slična i jednaka sa telima S i P. Potom, neka prave linije PR i *pr* dodiruju krive PQ i *pq* u tačkama P i *p* i produžićemo CQ i *sq* do R i *r*. Pošto su figure CPRQ i *spqr* slične, RQ će se prema *rq* odnositi kao CP prema *sp*, pa su

zbog toga u datom odnosu. Ako je sila, kojom je telo P privučeno prema telu S, a potom i prema središnjoj tački centra C, u istom datom odnosu sa silom kojom je telo *p* privučeno prema centru *s*, onda će te sile u jednakim vremenima odbiti tela sa tangenti PR i *pr* prema lukovima PQ i *pq*, tokom intervala RQ i *rq* koji su proporcionalni sa njima; zbog toga će ova poslednja sila (koja teži ka *s*) uticati na to da telo *p* kruži po krivoj *pqv*, koja će postati slična sa krivom PQV, po kojoj je prva sila primorala telo P da kruži; njihove revolucije će se završiti u jednakim vremenima. Pošto se te sile ne nalaze u međusobnom odnosu CP prema *sp* (usled sličnosti i jednakosti tela S i *s* sa P i *p* i jednakosti rastojanja SP i *sp*), već su međusobno jednake, onda će tela u jednakim vremenima biti jednako povučena sa tangenti. Pošto telo *p* može biti privučeno prema većem intervalu *rq*, neophodno je duže vreme koje će iznositi kvadratni koren iz intervala, jer su, prema Lemi X, prostori opisani na samom početku kretanja proporcionalni sa kvadratom vremena. Pretpostavimo da se brzina tela *p* prema brzini tela P odnosi kao kvadratni koren iz rastojanja *sp* prema kvadratnom korenu rastojanja CP, tako da lukovi *pq* i PQ, koji su u međusobnoj prostoj proporciji, mogu biti opisani tokom vremena koja su proporcionalna sa kvadratnim korenom iz rastojanja, a tela P i *p*, koja su uvek privučena istim silama, opisaće oko nepokretnih centara C i *s* slične figure PQV i *pqv*, od kojih je *pqv* slična i jednaka sa figurom koju je telo P opisalo oko pokretnog centra S. Q.E.D.

Slučaj 2. Pretpostavimo da se zajednički centar gravitacije zajedno sa prostorom, u kom se tela međusobno kreću, kreće ravnomerno pravolinijski. Sva kretanja u ovom prostoru (prema Kor. 6 Zakona kretanja) izvodiće se na isti način kao i ranije. Zbog toga će tela međusobno opisivati, jedno oko drugog, iste figure kao i ranije, a koje će zato biti slične i jednake sa figurom *pqv*. Q.E.D.

Kor. 1. Dva tela, koja se međusobno privlače silama koje su proporcionalne sa njihovim rastojanjem, opisuju (prema Prop. X) i oko zajedničkog centra gravitacije i međusobno jedno oko drugog koncentrične elipse i, *vice versa*, ako su takve figure opisane, onda su sile proporcionalne sa rastojanjima.

Kor. 2. I dva tela, čije su sile obrnuto proporcionalne sa kvadratom njihovih rastojanja, opisuju (prema Prop. XI, XII, XIII) i oko njihovog zajedničkog centra i međusobno jedno oko drugog konusne odeljke sa svojim žižama u centru oko kojih su opisane figure.

I, *vice versa*, ako su takve figure opisane, onda su centripetalne sile obrnuto proporcionalne sa kvadratima rastojanja.

Kor. 3. Bilo koja dva tela, koja kruže oko zajedničkog centra gravitacije, opisuju površine koje su proporcionalne sa vremenima, pomoću poluprečnika koji su povučeni prema tom centru kao i od jednog tela prema drugom.

PROPOZICIJA LIX. TEOREMA XXII

Periodična vremena dva tela S i P, koja kruže oko zajedničkog centra gravitacije C, odnose se prema periodičnom vremena jednog tela P, koje kruži oko drugog tela S, koje se ne pomera, i koje opisuje sličnu i jednaku figuru sa onima koje tela opisuju međusobno jedno oko drugog, kao kvadratni koren odnosa drugog tela S prema zbiru tela S i P.

Prema postavkama iz prethodne Propozicije, odnos vremena, tokom kojih su opisani bilo koji slični lukovi PQ i *pq*, jednak je kvadratnom korenu odnosa rastojanja CP i SP, ili *sp*, tj., kvadratnom korenu odnosa tela S prema zbiru tela S i P. Prema slaganju odnosa, zbir vremena, tokom kojih su opisani svi slični lukovi PQ i *pq*, tj., potpuna vremena tokom kojih su opisane potpune slične figure, nalaze se u istom tom odnosu. Q.E.D.

PROPOZICIJA LX. TEOREMA XXIII

Ako dva tela S i P, koja se međusobno privlače silama koje su obrnuto proporcionalne sa kvadratima njihovih rastojanja, kruže oko zajedničkog centra gravitacije – tvrdim da se osnovna osa elipse, opisana recimo kretanjem tela P oko drugog tela S, odnosi prema osnovnoj osi elipse, koje isto telo P može opisati u istom periodu vremena oko drugog tela S koje je u stanju mirovanja, kao zbir dva tela S + P prema prvoj od dve geometrijske sredine između tog zbira i drugog tela S.

Ako su opisane elipse međusobno jednake, onda će njihova periodična vremena, prema poslednjoj Teoremi, biti u odnosu koji je jednak kvadratnom korenu odnosa tela S prema zbiru tela S + P. Ako je u drugoj elipsi periodično vreme umanjeno za taj odnos,

onda će periodična vremena biti jednaka. Međutim, prema Prop. XV, osnovna osa elipse biće umanjena za odnos koji je seskviplikatan sa prethodnim odnosom, tj., u odnosu prema kom je odnos S + P utrostručen. Zbog toga će se ta osa odnositi prema osnovnoj osi druge elipse kao prva od dve geometrijske sredine između S + P i S prema S + P. I obrnuto, osnovna osa elipse, opisana oko pokretnog tela, odnosiće se prema osnovnoj osi, opisanoj oko nepokretnog tela, kao što se S + P odnosi prema prvoj od dve geometrijske sredine između S + P i S. Q.E.D.

PROPOZICIJA LXI. TEOREMA XXIV

Ako su dva tela, koja se međusobno privlače bilo kojim silama, i ako ne podležu dejstvu nijednih drugih sila, pomerena na bilo koji način, ta kretanja biće takva kao kad se ne bi uopšte međusobno privlačila, već kao da ih privlači neko treće telo istim tim silama, a koje je smešteno u njihovom zajedničkom centru gravitacije. U tom će slučaju zakon privlačnih sila biti isti u pogledu rastojanja tela od zajedničkog centra, kao i u pogledu međusobnog rastojanja između dva tela.

One sile, kojima se tela međusobno privlače, i koje teže ka telima, takođe teže i ka zajedničkom centru gravitacije koji se nalazi direktno između njih i zbog toga su iste kao kada bi proizašle iz središnjeg tela. Q.E.D.

Pošto je dat odnos rastojanja bilo kog tela od tog zajedničkog centra prema rastojanju između dva tela, onda je, naravno, dat i odnos bilo kog stepena jednog rastojanja prema istom tom stepenu drugog rastojanja kao i odnos bilo koje veličine izvedene na bilo koji način iz jednog od rastojanja koji je sastavljen na bilo koji način sa datim veličinama, prema drugoj veličini koja je izvedena na isti način iz drugog rastojanja i sa datim veličinama koje su u datom odnosu rastojanja sa prethodnim. Prema tome, ako je sila kojom jedno telo privlači drugo direktno ili obrnuto proporcionalna sa međusobnim rastojanjima tela, ili sa bilo kojim stepenom tog rastojanja, ili, naposletku, sa bilo kojom veličinom koja je izvedena na bilo koji način iz tog rastojanja koje se sastoji iz datih veličina – onda će ista sila, kojom je isto telo privučeno prema zajedničkom centru gravitacije, na isti način biti direktno ili obrnuto proporcio-

nalna sa rastojanjem tela od centra gravitacije, ili sa bilo kojim stepenom tog rastojanja; ili, naposletku, sa veličinom koja je izvedena na sličan način iz tog rastojanja koje se sastoji iz analognih datih veličina. To jest, zakon privlačne sile biće isti u pogledu oba rastojanja. Q.E.D.

PROPOZICIJA LXII. PROBLEM XXXVIII

Odrediti kretanja dva tela koja se međusobno privlače silama koje su obrnuto proporcionalne sa kvadratima njihovog međusobnog rastojanja i koja su puštena iz datih mesta.

Prema prethodnoj Teoremi, dva tela će se kretati tako kao da ih privlači neko treće telo koje je smešteno u zajedničkom centru gravitacije. Prema hipotezi, taj centar biće u stanju mirovanja na početku njihovog kretanja, pa će zbog toga (prema Kor. 4 Zakona kretanja) uvek biti u stanju mirovanja. Prema tome, kretanja tela će se odrediti (prema Prop. XXV) na isti način kao da na njih deluju sile koje teže prema tom centru pa ćemo tako odrediti kretanja tela koja se međusobno privlače. Q.E.I.

PROPOZICIJA LXIII. PROBLEM XXXIX

Odrediti kretanja dva tela koja se međusobno privlače silama koje su obrnuto proporcionalne sa kvadratima njihovog rastojanja i koja kreću iz datih mesta, u datom pravcu i sa datim brzinama.

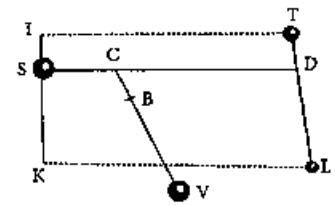
Ako su data kretanja tela na početku, biće poznato i ravnomerno kretanje zajedničkog centra gravitacije i kretanje prostora koje se kreće ravnomerno pravolinijski zajedno sa tim centrom, kao i prva ili početna kretanja tela u odnosu na ovaj prostor. Onda će (prema Kor. 5 Zakona kretanja i prema prethodnoj Teoremi) sva potonja kretanja biti izvedena na isti način u tom prostoru, kao da je taj prostor zajedno sa zajedničkim centrom gravitacije u stanju mirovanja i kao da se tela međusobno ne privlače, već ih privlači neko treće telo smešteno na tom centru. Kretanje tela, po ovom pokretnom prostoru, koja polaze iz datog mesta, u datom pravcu, sa datom brzinom, i na koja deluje centripetalna sila koja teži ka tom centru, odredićemo pomoću Problema IX i XXVI, a u isto vreme dobićemo i kretanje drugog tela oko istog centra. Ako ovom

kretanju dodamo ravnomerno progresivno kretanje celog sistema prostora i tela koja kruže po njemu, onda ćemo dobiti apsolutno kretanje tela u nepokretnom prostoru. Q.E.I.

PROPOZICIJA LXIV. PROBLEM XL

Ako pretpostavimo da se sile, pomoću kojih se tela međusobno privlače, umanje za prost odnos njihovog rastojanja od centra, onda je neophodno pronaći međusobna kretanja pojedinačnih tela.

Pretpostavimo da je D zajednički centar gravitacije prva dva tela T i L. Prema Kor. 1 Teoreme XXI, ona će opisati elipse sa centrima u tački D, a veličina tih elipsi poznate su iz Problema V.



Neka treće telo S privlači prethodna dva T i L, pomoću sila ubrzanja ST i SL i neka je ono uzajamno privučeno njima. Sila ST je (prema Kor. 2 Zakona kretanja) razložena na sile SD i DT a sila SL na sile SD i DL. Sile DT i DL, koje su proporcionalne sa njihovim zbirom TL, pa zato i sa silama ubrzanja kojima se tela međusobno privlače, dodate su silama tela T i L, prva prvoj, a druga drugoj, pa sačinjavaju sile koje su proporcionalne sa rastojanjima DT i DL kao i ranije, samo su jače od onih prethodnih sila. Zbog toga će (prema Kor. 1 Prop. X, i Kor. 1 i 8 Prop. IV) uzrokovati da tela opišu elipse kao i ranije, ali sa bržim kretanjem. Preostale sile ubrzanja SD i DL sa odgovarajućim pokretačkim silama SD × T i SD × L, koje su proporcionalne sa telima koja privlače ta tela jednako i u pravcu linija TI i LK, paralelne sa DS, uopšte ne menjaju njihove međusobne položaje, već uzrokuju da se jednako približavaju liniji IK koja se mora zamisliti tako da prolazi kroz sredinu tela S i normalno na liniju DS. Približavanje liniji IK biće ometeno tako što je izazvano kruženje sistema tela T i L, s jedne strane, i tela S, s druge strane, sa odgovarajućim brzinama, oko zajedničkog centra gravitacije P. Sa takvim kretanjem i pošto je zbir pokretačkih sila SD × T i SD × L proporcionalan sa rastojanjem CS, telo S, koje teži prema centru C, opisaće elipsu oko istog centra C i pošto su linije CS i CD proporcionalne, tačka D će opisati istu elipsu nasuprot nje. Tela T i L, koja privlače odgovarajuće pokretačke sile SD × T i SD × L, jednako i u pravcu paralelnih linija TI i LK, nasta-

više, kao što je ranije rečeno (prema Kor. 5 i 6 Zakona kretanja) da opisuju njihove elipse oko pokretnog centra D. Q.E.I.

Ako dodamo četvrto telo V, sličnim rasuđivanjem, pokazaćemo da će to telo i tačka C opisati elipse oko zajedničkog centra gravitacije B, dok kretanja tela T, L i S oko centara D i C ostaju ista kao i ranije, ali su ubrzana. Istim metodom možemo dodati i veći broj tela. Q.E.I.

Isto će se desiti i kada se tela T i L međusobno privlače silama ubrzanja koje su ili jače ili slabije od onih koje privlače druga tela u proporciji sa njihovim rastojanjem. Ako su sva uzajamna ubrzavajuća privlačenja proporcionalna sa proizvodom rastojanja privlačnih tela, onda iz prethodno izloženog lako je zaključiti da će sva tela opisati različite elipse sa jednakim periodičnim vremenima oko zajedničkog centra gravitacije B u nepokretnoj ravni. Q.E.I.

PROPOZICIJA LXV. TEOREMA XXV

Tela, čije su sile obrnuto proporcionalne sa kvadratom rastojanja između njihovih centara, mogu međusobno da se kreću po elipsama i poluprečnicima povučenim do žiže i mogu opisati površine koje su skoro proporcionalne sa vremenima.

U prethodnoj Propoziciji pokazali smo slučaj kad su kretanja izvedena tačno po elipsama. Što je zakon sila udaljeniji od zakona iz tog slučaja, tela će utoliko više ometati međusobna kretanja; niti je moguće da će se tela, koja se međusobno privlače u skladu sa zakonom koji je pretpostavljen u ovoj Propoziciji, kretati tačno po elipsama, osim ako zadržavaju određene proporcije međusobnog rastojanja. Ipak, u narednim slučajevima, orbite se neće mnogo razlikovati od elipsa.

Slučaj 1. Zamislimo da nekoliko manjih tela kruži oko nekog veoma velikog tela na različitim rastojanjima i pretpostavimo da je apsolutna sila koja teži ka svim tim telima proporcionalna sa svakim. I pošto je (prema Kor. 4 Zakona kretanja) zajednički centar gravitacije ili u stanju mirovanja, ili se kreće ravnomerno pravolinijski, pretpostavimo da su manja tela toliko mala da veliko telo ne mora nikad biti na osetnom rastojanju od tog centra. Tada će veliko telo, bez ijedne osetne greške, biti ili u stanju mirovanja ili će se kretati napred ravnomerno pravolinijski, a manja tela će kružiti oko velikog po elipsama i povučenim poluprečnicima opisaće

površine koje su proporcionalne sa vremenima, ako izuzmemo greške koje se mogu pojaviti prilikom odstupanja velikog tela od zajedničkog centra gravitacije, ili prilikom međusobnih delovanja manjih tela, jednih prema drugima. Međutim, manja tela mogu biti toliko umanjena da to odstupanje kao i uzajamno delovanje tela postaje manje od bilo koje dodeljene veličine, a shodno tome, orbite mogu postati elipse, a površine mogu odgovarati vremenima, pri čemu su greške manje od bilo koje unapred dodeljene veličine. Q.E.O.

Slučaj 2. Zamislimo da se sistem manjih tela, koja kruže oko veoma velikog tela, na način koji je upravo opisan, ili bilo koji drugi sistem dva tela koja međusobno kruže jedno oko drugog, kreću napred ravnomerno pravolinijski i da na njih, u međuvremenu, deluje sila mnogo većeg tela koje se nalazi na velikoj udaljenosti. Pošto jednake sile ubrzanja, koje deluju na tela u paralelnim pravcima, ne utiču na međusobne položaje tela, već primoravaju ceo sistem da promeni svoje mesto, dok delovi zadržavaju svoja međusobna kretanja, jasno je da se nijedna promena u kretanjima tih manjih tela ne može pojaviti iz njihovih privlačenja ka većem telu, osim prilikom nejednakosti sila ubrzavanja tih privlačenja ili prilikom odstupanja od paralelnosti linija, u čijem pravcu su usmerena privlačenja. Prema tome, pretpostavimo da su međusobna privlačenja svih tela ka većem obrnuto proporcionalna sa kvadratima rastojanja i ako povećamo rastojanje većeg tela tako da je razlika njegovog rastojanja do manjih tela i razlika u pravcima tih pravih linija, manja od bilo koje date veličine, onda će kretanja delova sistema nastaviti sa odstupanjima koja su manja od bilo koje date veličine. I pošto je, usled malih rastojanja između ovih delova, ceo sistem privučen tako kao da postoji samo jedno telo, on će se zato kretati pri dejstvu tog privlačenja kao da je jedno telo, tj., njegov centar gravitacije opisivaće oko većeg tela jedan konusni odeljak (parabolu ili hiperbolu kad je privlačenje slabo, a elipsu kad je privlačenje snažnije) i povučenim poluprečnicima, opisivaće površine koje su proporcionalne sa vremenima, bez bilo kojih grešaka, osim onih koje se pojavljuju iz rastojanja među delovima, a koje su prema pretpostavci izuzetno male i koje se mogu proizvoljno umanjiti. Q.E.O.

Sličnim rasudivanjem možemo nastaviti prema složenijim slučajevima *in infinitum*.

Kor. 1. U Slučaju 2, što se veliko telo više približi sistemu od dva ili više tela koja kruže, biće veće smetnje u međusobnim kretanjima delova sistema i pošto je veće zakošenje linija koje su povučene iz velikog tela prema tim delovima, onda će biti veća i odstupanja od proporcionalnosti.

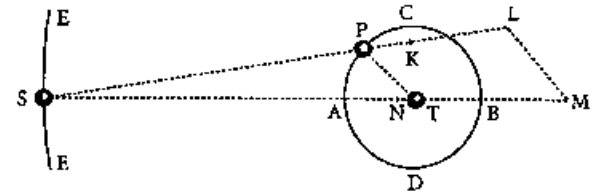
Kor. 2. Međutim, smetnje će biti najveće, ako pretpostavimo da se sile ubrzanja privlačenja delova sistema prema najvećem telu ne nalaze u međusobnom obrnutom odnosu sa kvadratima rastojanja od tog tela, pogotovo ako je nejednakost ove proporcije veća od nejednakosti proporcije rastojanja manjih tela od tog velikog tela. Ako sila ubrzanja, koja deluje u paralelnim pravcima i jednako, ne uzrokuje smetnje na kretanjima delova sistema, kad deluje nejednako, ona negde mora izazvati smetnje, koje će biti ili veće ili manje s obzirom na to da li je nejednakost veća ili manja. Višak najvećih impulsa koji deluje na neka tela, a na neka ne, neminovno menja njihove međusobne položaje. A ta smetnja, koja je dodata smetnji koja se pojavljuje iz nejednakosti i neparalelnosti linija, čini celokupnu smetnju većom.

Kor. 3. Ako se delovi ovog sistema kreću po elipsama ili krugovima bez neke značajne smetnje i ako na sve deluju ubrzavajuće sile koje teže i prema bilo kojim drugim telima, onda je jasno da je impuls veoma slab ili deluje skoro jednako i u paralelnim pravcima na sve njih.

PROPOZICIJA LXVI. TEOREMA XXVI

Ako se tri tela, čije se sile umanjuju u dvostrukom odnosu rastojanja, međusobno privlače, i ako su sile ubrzanog privlačenja bilo koja dva tela prema trećem međusobno obrnuto proporcionalne sa kvadratima rastojanja, i ako dva manja kruže oko najvećeg – tvrdim da će unutrašnje od dva tela koja kruže, poluprečnicima povučenim do centralnog i najvećeg tela, opisivati oko njega površine koje su više proporcionalne sa vremenima, a figura će se više približiti elipsi, čija je žiža u tački skupljanja poluprečnika, kada se to veliko telo bude kretalo pri dejstvu navedenih privlačenja, nego u onom slučaju kada to telo nije uopšte privučeno manjim telima, već je u stanju mirovanja, ili onda kada je to veliko telo

mnogo više ili mnogo manje privučeno, ili na njega mnogo jače ili mnogo slabije deluju te sile privlačenja.



Iz postavki drugog Korolara prethodne Propozicije ovo izgleda dovoljno jasno. Međutim, to se može izvesti potpunijim i jasnijim rasuđivanjem na sledeći način.

Slučaj 1. Neka manja tela P i S kruže u istoj ravni oko najvećeg tela T i neka telo P opisuje unutrašnju orbitu PAB, a S spoljašnju orbitu ESE. Neka SK bude srednje rastojanje tela P i S i neka je ubrzavajuće privlačenje tela P prema telu S, na srednjem rastojanju, izraženo tom linijom SK. Uzećemo da se SL prema SK odnosi kao SK na kvadrat prema SP na kvadrat i onda će SL biti ubrzavajuće privlačenje tela P prema telu S na bilo kom rastojanju SP. Spojićemo PT i povući ćemo LM paralelno sa njom tako da seče ST u tački M. Onda će sila privlačenja SL biti razložena (prema Kor. 2 Zakona kretanja) na sile privlačenja SM i LM. Na taj način će na telo P delovati trostruka sila ubrzanja. Jedna od tih sila teži prema T i pojavljuje se iz međusobnih privlačenja tela T i P. Usled delovanja samo ove sile, telo P će, poluprečnikom PT, opisati oko tela T površine koje su proporcionalne sa vremenima i elipsu čija se žiža nalazi u centru tela T, a to će se desiti i ako je telo T u stanju mirovanja i ako je na njega delovala ta sila privlačenja. Ovo sledi iz Prop. XI i Kor. 2 i 3 Teoreme XXI. Druga sila je privlačna sila LM. Ona teži od P prema T i dodata je prethodnoj sili sa kojom se poklapa. Usled ove sile površine su još uvek proporcionalne sa vremenima (prema Kor. 3 Teoreme XXI). Međutim, pošto nije obrnuto proporcionalna sa kvadratom rastojanja PT i pošto je pridodata prethodnoj, ona daje silu koja se razlikuje od te proporcije. Ta razlika je utoliko veća koliko je veća proporcija ove sile sa prethodnom, *caeteris paribus*. Pošto sila, prema Prop. XI i Kor. 2 Teoreme XXI, kojom je opisana elipsa oko žiže T, treba da bude usmerena ka toj žiži i da bude obrnuto proporcionalna sa kvadratom rastojanja PT, onda će njoj sjedinjena sila, koja odstupa od te proporcije, napraviti orbitu PAB koja se razlikuje od eliptične figure sa žižom u

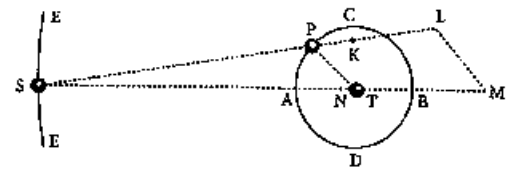
tački T, i utoliko više, koliko je veće odstupanje od te proporcije, i usled toga, koliko je veća proporcija druge sile LM prema prvoj sili, *caeteris paribus*. Treća sila SM, koja privlači telo P u pravcu paralelnom sa ST, sačinjava sa prethodnom silom novu silu, koja nije više usmerena od P prema T i koja odstupa od ovog pravca utoliko više koliko je veća proporcija ove treće sile prema prethodnim silama, *caeteris paribus* i zbog toga uzrokuje da telo P poluprečnikom TP opisuje površine koje više nisu proporcionalne sa vremenima i čini odstupanja od te proporcionalnosti većim u odnosu na to koliko je veća proporcija ove sile prema ostalima. Međutim, ova treća sila povećaće odstupanje orbite PAB od eliptične figure iz dva razloga. Prvo, zato što ta sila nije usmerena od P prema T. Drugo, zato što nije obrnuto proporcionalna sa kvadratom rastojanja PT. Pošto je ovo pretpostavljeno, očigledno je da su površine najbliže proporcionalne sa vremenima kada je treća sila najmanje moguća i kada ostale sile zadržavaju svoje prethodne veličine, kao i da se orbita PAB najviše približava eliptičnoj figuri kada su druga i treća, a pogotovu treća sila, najmanje moguće, dok prva zadržava svoju prethodnu veličinu.

Ako je ubrzavajuća sila privlačenja od tela T prema telu S izražena linijom SN i ako su ubrzavajuća privlačenja SM i SN jednaka i ako privlače tela T i P jednako i u pralalelnim pravcima, onda ona neće uopšte promeniti njihove međusobne položaje. Prema Kor. 6 Zakona kretanja, međusobna kretanja tela bila bi ista i u slučaju kada ova privlačenja ne bi delovala. Sličnim rasuđivanjem, ako je privlačenje SN slabije od privlačenja SM, ono će poništiti deo SN iz privlačenja SM, tako da ostane samo deo (privlačenja) MN, koji bi narušio proporcionalnost površina sa vremenima, kao i eliptičnu figuru orbite. Na sličan način, ako je privlačenje SN jače od privlačenja SM, narušavanje orbite i proporcije proizašlo bi samo iz razlike MN. Posle toga, privlačenje SN uvek svodi privlačenje SM na privlačenje MN, dok prva i druga sila privlačenja ostaju savršeno nepromenjene. Zbog toga, površine i vremena najviše se približavaju proporcionalnosti, a orbita PAB gorepomenutoj eliptičnoj figuri, kada privlačenja MN uopšte nema, ili kada je najmanje moguće, tj., kada se ubrzavajuće sile privlačenja tela P i T približavaju što je moguće više ka jednakosti, ili kada privlačenje SN nije ravno ni nuli niti je manje od najmanjeg od svih privlačenja SM, već kada se nalazi u sredini između najvećeg i najmanjeg od svih tih

privlačenja SM, ili kada nije ni mnogo jače, ni mnogo slabije od privlačenja SK. Q.E.D.

Slučaj 2. Neka manja tela P i S kruže oko većeg tela T u različitim ravnima, a sila LM, koja deluje u pravcu linije PT i koja je smeštena u ravni orbite PAB, delovaće isto kao i ranije i neće povući telo P iz ravni njegove orbite. Međutim, druga sila NM, koja deluje u pravcu linije paralelne sa ST (i koja je, kada se telo S nalazi van linije čvora, nagnuta ka ravni orbite PAB), pored ometanja kretanja po dužini, uvodi i ometanje kretanja po širini, odvlačeći telo P van ravni njegove orbite. Ova smetnja, u bilo kom datom međusobnom položaju tela P i T, biće proprocionalna sa uzrokujućom silom MN; zbog toga postaje najmanja kad je sila MN najslabija, tj., kada privlačenje SN nije mnogo jače, niti je mnogo slabije od privlačenja SK. Q.E.D.

Kor. 1. Odatle je lako zaključiti da će, kada nekoliko tela P, S, R, itd. kruže oko najvećeg tela T, kretanje najbližeg tela P biti najmanje ometeno privlačnom silom drugih, kada najveće telo privlače druga tela i kada deluju na njega (prema odnosu sila ubrzanja), kao i kada druga tela deluju međusobno jedno na drugo.



Kor. 2. U sistemu od tri tela T, P i S, ako su ubrzavajuće sile privlačenja bilo koja dva tela prema trećem obrnuto proporcionalna sa kvadratima rastojanja, onda će telo P, poluprečnikom PT, brže opisati svoju površinu oko tela T u blizini konjunkcije A i opozicije B, nego u blizini kvadratura C i D. Svaka sila koja deluje na telo P, a ne deluje na telo T, i koja ne deluje u pravcu linije PT, ili ubrzava ili usporava opisivanje površine, s obzirom na svoj pravac, ili *direktno* ili *retrogradno*. A takva je sila NM koja je, tokom prelaska tela P iz O prema A, usmerena *direktno* u odnosu na kretanje, pa ga zato ubrzava, zatim do tačke D *retrogradno* i usporava kretanje, potom do B, *direktno* i na kraju, *retrogradno*, dok prelazi od B do C.

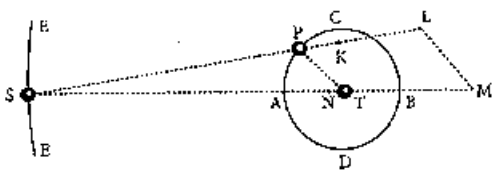
Kor. 3. Istim rasuđivanjem sledi da se telo P, *caeteris paribus*, kreće brže u konjunkciji i opoziciji, nego na kvadraturama.

Kor. 4. Orbita tela P, *caeteris paribus*, više je zakrivljena na kvadraturama nego u konjunkciji i opoziciji. Što se brže kreću tela, ona manje skreću sa pravolinijskog puta. Pored toga, sila KL ili NM, u konjunkciji i opoziciji, suprotna je sili kojom telo T privlači

telo P, pa zbog toga umanjuje tu silu. Međutim, telo P manje će skrenuti sa svog pravolinijskog puta ako na njega slabije deluje telo T.

Kor. 5. Zbog toga se telo P, *caeteris paribus*, više udaljava od tela T u kvadraturama nego u konjunkciji i opoziciji. Ipak, to se dešava ako se ne uzima u obzir ekscentričnost kretanja. Jer, ako je orbita tela P ekscentrična, njegova ekscentričnost će (kao što će biti pokazano u Kor. 9) biti najveća kada se apside poklapaju sa sizigijama. Odatle se može zaključiti da će se telo P, kada se približi daljoj apsidi, udaljiti više od tela T na sizigijama nego u kvadraturama.

Kor. 6. Pošto je centripetalna sila centralnog tela T, pomoću koje je telo P zadržano u svojoj orbiti, povećana u kvadraturama, dodavanjem uzrokovanim silom LM i umanjena na sizigijama, oduzimanjem uzrokovanim silom KL, a pošto je sila KL jača od sile LM, ona je više umanjena nego što je povećana. Dalje, pošto je ta centripetalna sila (prema Kor. 2 Prop. IV), direktno proporcionalna sa poluprečnikom TP, a obrnuto proporcionalna sa kvadratom periodičnog vremena, jasno je da je taj odnos umanjen delovanjem sile KL i zbog toga će periodično vreme, ako pretpostavimo da poluprečnik orbite PT ostaje isti, biti povećano, i to za kvadratni koren iz tog odnosa po kom je centripetalna sila umanjena, a zbog toga će, prema Kor. 6 Prop. IV, ako pretpostavimo da je poluprečnik povećan ili umanjen, periodično vreme biti ili više uvećano ili manje umanjeno nego u seskviplikatnom odnosu ovog poluprečnika. Ako ta sila centralnog tela postepeno slabi, onda će se telo P, pošto je sve manje i manje privučeno, sve više i više udaljavati od centra T, i obrnuto, ako je ta sila jača, telo će se više približavati centru. Prema tome, ako se delovanje udaljenog tela S, kojim je ta sila oslabljena, naizmenično povećava i umanjuje, onda će poluprečnik TP takođe biti naizmenično povećan ili umanjen, a periodično vreme će se povećati ili umanjiti za odnos koji se sastoji iz seskviplikatnog odnosa poluprečnika i iz kvadratnog korena iz tog odnosa u kom je centripetalna sila centralnog tela T umanjena ili povećana pomoću povećanja ili umanjenja delovanja udaljenog tela S.



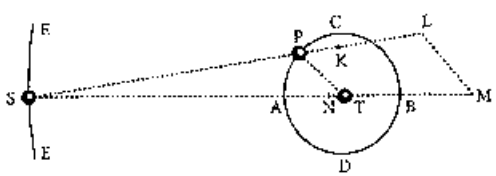
Kor. 7. Iz prethodnih postavki takođe sledi da će osa elipse, opisane telom P, ili linija apsida, svojim ugaonim kretanjem naizmenično ići napred i nazad, a usled preovladavanja direktnog kretanja, ona se u celini pomera napred. Sila, kojom telo P teži prema telu T u kvadraturama, gde sila MN nestaje, sastavljena je iz sile LM i centripetalne sile kojom telo T privlači telo P. Ako je povećano rastojanje PT, onda je prva sila LM povećana skoro u istoj proporciji kao i rastojanje, a druga sila se umanjuje proporcionalno sa kvadratom rastojanja. Zbog toga se zbir ove dve sile umanjuje za odnos koji je manji od kvadrata rastojanja PT i prema tome će, prema Kor. 1 Prop. XLV, linija apsida ili, što je isto, gornja osa, ići unazad. Međutim, u konjunkciji i opoziciji, sila kojom telo P teži prema telu T, jednaka je razlici između sile KL i sile kojom telo T privlači telo P. Ta razlika, pošto je sila KL povećana skoro proporcionalno sa rastojanjem, umanjuje se više od kvadrata rastojanja PT i stoga, prema Kor. 1 Prop. XLV, uzrokuje da linija apsida ide unapred. Na mestima između sizigija i kvadratura, kretanje linije apsida zavisi od oba ova uzroka zajedno, tako da se kreće ili napred ili nazad u zavisnosti od toga koji uzrok preovladava. Prema tome, pošto je sila KL u sizigijama skoro duplo veća od sile LM u kvadraturama, preovladavaće sila KL, pa će posledica toga biti kretanje linije apsida unapred. Ovaj Korolar, kao i prethodni, lakše će se razumeti ako zamislimo da je sistem od dva tela T i P okružen sa svake strane sa nekoliko tela S, S, S, itd. koja su raspoređena po orbiti ESE. Delovanjem ovih tela, delovanje tela T će biti umanjeno na svakoj strani i umanjivaće se više od odnosa kvadrata rastojanja.

Kor. 8. Pošto progres i regres apsida zavise od slabljenja centripetalne sile, tj., pošto su u većem ili manjem odnosu od kvadrata rastojanja TP, tokom prelaza tela od niže ose prema višoj, kao i od jačanja tokom vraćanja na nižu osu, a prema tome, progres i regres postaće najbrži kada odnos sile na gornjoj osi prema sili na donjoj osi najviše odstupa od obrnutog odnosa kvadrata rastojanja – jasno je da će, kada su apside u sizigijama, one brže ići napred, usled oduzetih sila KL ili NM – LM, a kad su u kvadraturama, ići će sporije usled dodatne sile LM. Pošto se brzina progresa ili sporost regresa dugo nastavlja, ta nejednakost postaje izuzetno velika.

Kor. 9. Ako je telo, usled sile obrnuto proporcionalne sa kvadratom rastojanja do bilo kog centra, prinuđeno da kruži po elipsi oko tog centra, i ako je ta sila, tokom svog spuštanja sa više ose do niže, i usled neprekidnog dodavanja nove sile, povećana za odnos koji je veći od kvadrata umanjenog rastojanja – očigledno je da će se telo, pod dejstvom ove nove sile, više približavati centru, nego

pod dejstvom samo takve sile koja je obrnuto proporcionalna sa kvadratom rastojanja i ono će opisati orbitu koja se nalazi u unutrašnjosti te eliptične orbite, a kad se nađe na nižoj osi više će se približiti centru nego ranije. Dodavenjem ove nove sile, orbita će postati ekscentričnija. Zatim, dok se telo vraća iz niže prema višoj osi, sila će se umanjiti za isti stepen za koji je bila uvećana pre nego što se telo vrati do svog početnog rastojanja i ako se sila umanjuje za još veći odnos, telo će se, pošto je sad manje privučeno nego ranije, više udaljiti od centra, pa će i ekscentričnost orbite biti još više povećana. Ako je odnos povećanja i umanjenja centripetalne sile uvećan tokom svake revolucije, onda će, takođe, i ekscentričnost biti uvećana i, obrnuto, ako se taj odnos umanjuje, i ekscentričnost će biti smanjena.

I u sistemu tri tela T, P i S, kada su apside orbite PAB u kvadraturama, odnos tog povećanja i umanjenja je najmanji od svih, a postaje najveći kada su apside u sizigijama. Ako su apside smeštene u kvadraturama, odnos bliži apsidama je manji, a bliži sizigijama je veći, od odnosa kvadrata rastojanja i iz tog najvećeg odnosa pojavljuje se direktno kretanje linije apsida, kao što smo upravo rekli. Ako uzmemo u obzir da se odnos celine povećava ili umanjuje tokom progresa između apsida, onda je on manji od odnosa kvadrata rastojanja. Odnos sile na donjoj osi prema sili na gornjoj osi manji je od odnosa kvadrata rastojanja gornje ose iz žiže elipse prema rastojanju donje ose iz iste žiže i, obrnuto, kada su apside smeštene u sizigijama, odnos sile na donjoj osi prema sili na gornjoj osi veći je od odnosa kvadrata rastojanja. Kad su sile LM u kvadraturama dodate silama tela T, one sačinjavaju sile u manjem odnosu, a kad su sile KL u sizigijama oduzete od sila tela T, onda su sile u većem odnosu. Prema tome, odnos celine koji se povećava ili umanjuje tokom prelaza između apsida, najmanji je u kvadraturama, a najveći u sizigijama i zato se, tokom prelaza apsida iz kvadratura prema sizigijama, neprekidno povećava, a povećava i ekscentričnost elipsa, a tokom prelaza od sizigija prema kvadraturama on je neprekidno umanjen, a umanjuje i ekscentričnost.



Kor. 10. Da bismo objasnili odstupanja u visini, pretpostavimo da je ravan orbite EST nepomična. Iz uzroka odstupanja koji su

gore objašnjeni, jasno je da, od dve sile NM i ML, koje su jedini i celokupni uzrok, sila ML, koja uvek deluje u ravni orbite PAB, nikada ne remeti kretanje po visini i sila NM, kada su čvorovi u sizigijama, koja takođe deluje u istoj ravni orbite, ne utiče na kretanja u tom momentu. Ali kada su čvorovi u kvadraturama, remeti ih veoma mnogo i stalno privlačeći telo P van njegove orbite, smanjuje nagib ravni prilikom prolaza tela od kvadrature do sizigije i ponovo ga povećava pri prolazu od sizigije do kvadrature. Stoga kada je telo u sizigijama, nagib je najmanji i vrati se skoro na prvobitnu veličinu, kada telo stigne u sledeći čvor. Ali ako se čvorovi nalaze u oktantima posle kvadratura, tj., između C i A, D i B, iz onoga što je sada pokazano slediće da, pri prolasku tela P iz bilo kog čvora do 90° od njega, nagib ravni se stalno smanjuje. Tada, pri prolasku kroz sledećih 45° do sledeće kvadrature, nagib se povećava. Nakon toga, ponovo, pri prolasku kroz narednih 45° do sledećeg čvora, smanjuje se. Stoga se nagib više smanjuje nego što se povećava, te je uvek manji u sledećem čvoru nego u prethodnom i, slično, nagib se više povećava nego što se smanjuje kada su čvorovi u drugim oktantima između A i D, B i C. Nagib je, stoga, najveći kada su čvorovi u sizigijama. Pri prolasku od sizigija do kvadratura nagib se smanjuje pri svakom apulsu tela prema čvorovima i postaje najmanji kada su čvorovi u kvadraturama, a telo u sizigijama. Tada se povećava za isti broj stepeni za koliko se ranije smanjio i kada čvorovi dođu u sledeće sizigije, vraća se na prethodnu veličinu.

Kor. 11. Jer, kada su čvorovi u kvadraturama, telo P se stalno odvlači izvan ravni svoje orbite i pošto je ovo privlačenje u pravcu S tokom prolaska od čvora C kroz konjunkciju A do čvora D i, suprotno, prilikom prolaska od čvora D kroz opoziciju B do čvora C – jasno je da se telo pri kretanju od čvora C, kontinualno povlači od prethodne ravni CD svoje orbite dok ne dođe u sledeći čvor. Tada će u čvoru, s obzirom na to da je sada najudaljenije od prve ravni CD, proći kroz ravan orbite EST ne u D, drugi čvor te ravni, već u tački koja leži bliže telu S, koja stoga postaje novi položaj čvora *retrogradno* u odnosu na prethodni položaj. I, na sličan način čvorovi će nastaviti da se povlače pri prolasku od ovog do sledećeg čvora. Kada se nalaze u kvadraturama, čvorovi se stoga stalno povlače, dok u sizigijama, gde nikakvi poremećaji ne mogu da izazovu kretanje u visini, miruju. U međupoložajima gde zadovoljavaju oba uslova, biće odnesení unatrag, ili *retrogradno*, pri svakoj revoluciji.

Kor. 12. Sva odstupanja opisana u ovim korolarima su malo veća u konjunkciji tela P i S, nego u njihovoj opoziciji, jer su sile NM i ML koje ih uzrokuju veće.

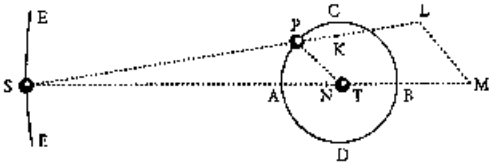
Kor. 13. Pošto uzroci i veličine odstupanja i varijacija koje su spomenute u ovim korolarima ne zavise od veličine tela S, sledi da će se sve ranije spomenuto desiti, ako se zamisli da je veličina tela S toliko velika da sistem dva tela P i T mogu da rotiraju oko njega. Iz ovog povećanja tela S i posledičnog povećanja njegove centripetalne sile, zbog koje slede odstupanja tela P, slediće da će sva ova odstupanja biti veća u ovom slučaju na istim rastojanjima, nego u drugom slučaju gde telo S rotira oko sistema tela P i T.

Kor. 14. Kada je telo S dovoljno daleko, sile NM i ML su skoro jednake sili SK zajedno sa odnosom PT prema ST, tj., ako su dati i rastojanje PT i apsolutna sila tela S recipročno. Pošto su te sile NM i ML uzrok svih odstupanja i efekata razmatranih u prethodnim korolarima, jasno je da će svi ti efekti, ako sistem tela T i P ostane kao i ranije i samo se rastojanje ST i apsolutna sila tela S promeni, biti vrlo blizu odnosa sastavljenog od direktnog odnosa apsolutne sile tela S i trostrukog obrnutog odnosa rastojanja ST. Stoga, ako imamo sistem tela T i P koja rotiraju oko udaljenog tela S, te sile NM i ML, i njihova dejstva, biće (prema Kor. 2 i 6, Prop. IV) recipročne dvostrukom odnosu njihovih perioda rotacije. I stoga, takođe, ako je veličina tela S proporcionalna njegovoj apsolutnoj sili, te sile, NM i ML, i njihova dejstva, biće direktno proporcionalni kubu prividnog prečnika udaljenog tela S posmatrano sa T, i obrnuto. Jer su ovi odnosi isti kao gore spomenuti sastavljeni odnos.

Kor. 15. Ako orbite ESE i PAB, zadrže svoj oblik, proporcije i međusobne nagibe, ali promene veličinu, i ako sile tela S i T ili ostanu iste, ili se promene za bilo koji odnos, ove sile (tj., sila tela T, koje prisiljava telo P da skreće sa pravolinijske putanje u orbitu PAB i sila tela S, koja uzrokuje da telo P sreće sa te orbite) bi delovale na isti način i u istoj proporciji. Iz ovoga sledi da će sva dejstva biti slična i proporcionalna, a takođe i vremena tih efekata, tj., da će sva linearna odstupanja biti kao prečnici orbita, a uglovna odstupanja ista kao i ranije, a vremena sličnih linearnih odstupanja, ili jednaka uglovna odstupanja, kao periodi revolucije po orbiti.

Kor. 16. Stoga, ako su dati oblici orbita i njihovi međusobni nagibi, a veličine, sile i rastojanja među telima nekako promenjeni, onda možemo, na osnovu odstupanja i vremena tih odstupanja u

jednom slučaju, približno razumeti odstupanja i vremena odstupanja u bilo kom drugom slučaju. Ali ovo može

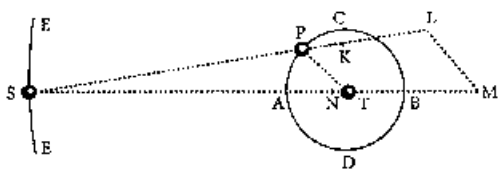


biti brže urađeno putem sledeće metode. Ako su ostali elementi nepromenjeni, sile NM i ML su kao poluprečnik TP, a efekti u vezi sa periodom (prema Kor. 2, Lem. X) su kao sile povezane sa kvadratom perioda tela P. Ovo su linearna odstupanja tela P, te su stoga uglovna odstupanja onakva kako izgledaju posmatrano iz centra T (tj., kretanja apsida i čvorova i sva prividna odstupanja po longitudi i latitudi) približno kao kvadrat vremena revolucije pri svakoj revoluciji tela P. Neka ovi odnosi budu sastavljeni sa odnosima iz Kor. 14, u bilo kom sistemu tela T, P i S, gde se P okreće u blizini, a T se okreće oko S na velikoj udaljenosti, tada će uglovna odstupanja tela P, posmatrano iz centra T, pri svakoj revoluciji tela P biti direktno proporcionalna kvadratu perioda tela P i obrnuto kvadratu perioda tela T. Stoga će srednje kretanje linije apside biti u datom odnosu prema srednjem kretanju čvorova, a oba ova kretanja biće direktno proporcionalna periodu tela P i obrnuto proporcionalna kvadratu perioda tela T. Porast ili smanjenje ekscentriciteta i nagiba orbite PAB ne uzrokuje nikakve primetne promene u kretanjima apsida i čvorova, osim ako su taj porast ili smanjenje zaista veliki.

Kor. 17. Pošto je linija LM nekada veća a nekada manja od poluprečnika PT, neka srednja veličina sile LM bude izražena tim poluprečnikom PT, i tada će ta srednja sila biti prema srednjoj sili SK ili SN (koje takođe mogu biti izražene preko ST) kao dužina PT prema dužini ST. Ali je srednja sila SN ili ST, pomoću koje se telo T drži u orbiti koju opisuje oko S, prema sili pomoću koje se telo P drži u orbiti oko T u odnosu sastavljenom od odnosa poluprečnika ST prema poluprečniku PT i dvostrukog odnosa perioda tela P oko T prema periodu tela T oko S. I, *ex aequo*, srednja sila LM je prema sili kojom se telo P drži u orbiti oko T (ili pomoću koje isto telo P može da se kreće na rastojanju PT u istom periodu oko nepomične tačke T) u istom dvostrukom odnosu perioda. Periodi su stoga poznati, zajedno sa rastojanjem PT, kao i srednja sila LM; i pošto je ta sila poznata, približno je poznata takođe i sila MN, vrlo približno, po analogiji sa linijama PT i MN.

Kor. 18. Prema istim zakonima po kojim telo P rotira oko tela T, pretpostavimo mnoštvo fluidnih tela koja se kreću oko T na istim rastojanjima od njega, i da ih je toliko mnogo, da svi postanu dodirni jedni sa drugim, tako da čine fluidni prsten ili obruč kružnog oblika, koji je koncentričan telu T, onda će i nekoliko delova ovog prstena, krećući se po istim zakonima kao telo P, prići bliže, i kretati se brže u konjukciji i opoziciji sa telom S, nego u kvadraturama. A čvorovi ovog prstena, ili njegovi preseci sa ravni orbite tela S ili T, nalaziće se u sizigijama ali će van sizigija biti odvučeni unatrag, ili *retrogradno* sa najvećom brzinom u kvadraturama, i sporije na drugim mestima. Nagib ovog prstena će takođe varirati i njegova osa će oscilovati pri svakoj revoluciji, a po završetku revolucije vratiće se u prvobitan položaj, osim što će biti malo pomerena zbog precesije čvorova.

Kor. 19. Pretpostavimo sada sferno telo T, sačinjeno od nekog materijala koji nije fluidan, koje je uvećano, i koje se sa svake strane prostire do tog prstena, i da je prokopan kanal sa vodom oko celog njegovog obima, i da se ova sfera okreće ravnomerno oko svoje ose u istom vremenskom periodu. S obzirom na to da se ova voda ubrzava i usporava pri okretanju (kao u prethodnom Korolaru), ona će biti brža u sizigijama i sporija u kvadraturama, nego površina globusa i stoga će opadati i teći u svom kanalu kao što to radi more. Ako bi privlačenje tela S bilo oduzeto, voda ne bi imala nikakav priliv i odliv usled okretanja oko mirnog centra globusa. Isti je slučaj sa globusom koji se kreće ravnomerno unapred po pravoj liniji i koji u međuvremenu rotira oko svog centra (prema Kor. 5 Zakona kretanja), kao i sa globusom koji se uniformno privlači van svog pravolinijskog pravca (prema Kor. 6 istog Zakona). Ali neka sada telo S deluje na njega i zbog nejednakog privlačenja voda će poprimiti novo kretanje, jer će deo vode najbliži telu biti jače privučen, a deo koji je dalji slabije. I sila LM će privlačiti vodu na dole u kvadraturama i potisnuti je najviše u sizigijama, a sila KL će je povući na gore u sizigijama, zadržati njeno spuštanje i podići je najviše u kvadraturama toliko koliko kretanje priliva i odliva može biti usmereno vodenim kanalom, malo zaostajući usled trenja.



Kor. 20. Ako sada prsten postane čvrst i ako se globus smanji, kretanja priliva i odliva će prestati, ali će se oscilujuće kretanje nagiba i precesije održati. Neka globus ima zajedničku osu sa prstenom, neka izvršava svoje revolucije u istom vremenu, neka svojom površinom dodiruje unutrašnji deo prstena i neka prianja uz njega. Tada će globus učestvovati u kretanju prstena i ceo ovaj spoj će oscilovati, a čvorovi će se kretati unatrag, jer je globus, kako ćemo sada pokazati, savršeno neosetan za sve uticaje. Najveći ugao nagiba samog prstena je kada su čvorovi u sizigijama. Zato tokom napredovanja čvorova ka kvadraturama, on nastoji da smanji taj nagib i tim nastojanjem utiče na kretanje celog globusa. Globus zadržava ovo predato kretanje, sve dok prsten ne uništi ovo kretanje suprotnim uticajem i preda mu novo kretanje u suprotnom smeru. I ovim putem će se najveće kretanje nagiba koji se smanjuje desiti kada su čvorovi u kvadraturama, a najmanji ugao nagiba će biti u oktantima posle kvadratura; i, ponovo, najveće kretanje reklinacije će se desiti kada su čvorovi u sizigijama, a najveći ugao reklinacije u oktantima koji slede. Isti je slučaj sa globusom bez ovog prstena ako je u ekvatorijalnoj oblasti malo viši ili malo gušći nego što je u polarnoj oblasti jer je višak te materije u oblastima blizu ekvatora zamena za prsten. Iako bi trebalo pretpostaviti da je centripetalna sila ovog globusa nekako povećana, tako da svi njegovi delovi teže ka dole, kao što delovi naše Zemlje gravitiraju ka centru, fenomen ovog i prethodnog Korolara će teško biti promenjen, osim što će mesta najveće i najmanje visine vode biti drugačija, jer se voda sada ne drži više u orbiti pomoću centrifugalne sile, već pomoću kanala kroz koji protiče. I, osim toga, sila LM najviše povlači vodu na dole u kvadraturama, a sila KL ili NM – LM je najviše povlači na gore u sizigijama. I ove sile zajedno prestaju da povlače vodu na dole, počinju da je povlače na gore u oktantima pre sizigija, prestaju da povlače vodu na gore i počinju da povlače vodu na dole u oktantima posle sizigija. I zato se najveća visina vode može ostvariti u blizini oktanta nakon sizigija, a najmanja visina u blizini oktanta nakon kvadratura toliko koliko se kretanje porasta ili spuštanja koje je uzrokovano ovim silama može putem *vis insita* vode produžiti malo duže, ili zaustaviti malo ranije zbog prepreka u kanalu.

Kor. 21. Iz istog razloga zbog kog suvišna materija u ekvatorijalnoj oblasti uzrokuje kretanje čvorova unatrag i stoga što se povećanjem te materije pojačava kretanje unatrag, a smanjenjem

smanjuje otklanjanjem nestaje, a sledi da, ako se oduzme više od te suvišne materije, tj., ako globus postane ili manji, ili gustine blizu ekvatora ređe nego blizu polova, uzrokovaće kretanje čvorova *direktno*.

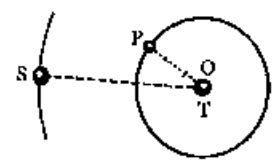
Kor. 22. Stoga je na osnovu kretanja čvorova poznat sastav globusa. Tj., ako globus nepromenljivo zadrži iste polove i ako je kretanje (čvorova) *retrogradno*, postojaće višak materije u blizini ekvatora, ili manjak ako je *direktno*. Pretpostavimo uniforman i tačno sferan globus koji na početku miruje u praznom prostoru. Zatim nekim poticajem koso na njegovu površinu neka je pomeren iz mesta i primi kretanje koje je delimično kružno i delimično napred desno. Pošto je ovaj globus savršeno jednak za sve ose koje prolaze kroz njegov centar i pošto nema veću sklonost ka jednoj osi ili ka jednom položaju ose nego ka bilo kom drugom, jasno je da svojom silom neće nikada promeniti svoju osu, ili njen nagib. Neka sada na ovaj globus deluje koso novi poticaj na isti deo njegove površine kao i ranije. Pošto se dejstvo poticaja ne menja time što se desio ranije ili kasnije, jasno je da će ova dva poticaja, koja su uzastopno delovala, prouzrokovati isto kretanje kao da su delovali u istom trenutku; tj., isto je kretanje ako se na globus deluje jednostavnom silom sastavljenom od te dve sile (prema Kor. 2, Zakona), tj., čini jednostavno kretanje oko ose datog nagiba. I lakoća je ista ako je drugi poticaj načinjen na bilo koji drugi deo ekvatora prvog kretanja i ako bi prvi poticaj bio na bilo kom mestu na ekvatoru kretanja koje bi nastalo samo dejstvom drugog poticaja. Stoga, kada oba poticaja deluju na bilo kom mestu; jer će ovi poticaji proizvesti isto kružno kretanje kao da deluju zajedno, od jednom, na mestu preseka ekvatora tih kretanja, koja bi nastala zbog svakog ponaosob.

Stoga, homogen i savršen globus neće zadržati nekoliko različitih kretanja, već će ujediniti sve što je na njega delovalo i svesti ih na jedno, rotirajući dok god u njoj leži, stalno sa jednostavnim i uniformnim kretanjem oko jedne date ose, sa nagibom stalno nepromenljivim. A nagib ose, ili brzina rotacije, neće biti promenjeni centripetalnom silom. Jer, ako pretpostavimo da je globus podeljen u dve hemisfere, bilo kojom ravni koja prolazi kroz njegov centar, i kroz centar ka kome je sila usmerena, ta sila će uvek delovati na obe hemisfere podjednako i stoga neće naginjati globus ni na bilo koju stranu u odnosu na kretanje oko svoje ose. Ali neka je sada dodata gomila nove materije kao planina, bilo gde između polova i ekvatora, i ovo će, stalnom težnjom da se odmakne

od centra kretanja, poremetiti kretanje globusa, i uzrokovati da polovi lutaju po površini, opisujući krugove oko sebe i njihovih suprotnih tačaka. Ovo veliko pomeranje polova se ne može ispraviti, osim ako bi se ta planina postavila ili u neki od polova, u kom slučaju bi, prema Kor. 21, čvorovi ekvatora išli napred; ili u ekvatorijalnu oblast, u kom slučaju bi, prema Kor. 20, čvorovi išli unatrag; ili, na kraju, dodavanjem nove količine materije sa druge strane ose, čime bi planina bila uravnotežena u kretanju koje uzrokuje. Tada će čvorovi ili ići napred ili natrag, ako su planina i ova sveže dodata materija bliže polu ili ekvatoru.

PROPOZICIJA LXVII. TEOREMA XXVII

Ako su pretpostavljeni isti zakoni privlačenja, tvrdim da će spoljašnje telo S, pomoću poluprečnika povučenih do tačke O, zajedničkog centra gravitacije unutrašnjih tela P i T, opisati oko tog centra površine koje su više proporcionalne sa vemenima, kao i orbitu koja se više približava obliku elipse, sa žižom u tom centru, pre nego što bi to telo moglo da opiše oko središnjeg i najvećeg tela T pomoću poluprečnika povučenih do tog tela.



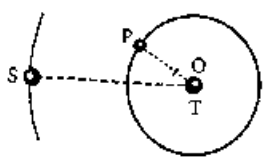
Privlačenja tela S prema T i P sačinjavaju njegovu apsolutno privlačenje, koje je više usmereno prema O, zajedničkom centru gravitacije tela T i P, nego prema najvećem telu T; i koje je bliže obrnutoj proporcionalnosti kvadrata rastojanja SO, nego kvadratu rastojanja ST, što će biti jasno uz malo razmatranja.

PROPOZICIJA LXVIII. TEOREMA XXVIII

Ako je pretpostavljen isti zakon privlačenja, tvrdim da će spoljašnje telo S, pomoću poluprečnika povučenih do O, zajedničkog centra gravitacije spoljašnjih tela P i T, opisati oko tog centra površine koje su više proporcionalne sa vremenima, kao i orbitu koja se više približava obliku elipse, sa žižom u tom centru, ako na središnje i najveće telo deluju ova privlačenja isto kao i na ostala tela, pre nego u slučaju kad je to

telo ili u stanju mirovanja ili ako na njega ne deluje sila privlačenja, ili ako je mnogo više ili mnogo manje privučeno, ili ako na njega sila deluje mnogo više ili mnogo manje.

Ovo se može dokazati na isti način kao i Prop. LXVI, ali ipak složenijim rasuđivanjem, koje ću zbog toga preskočiti. Biće dovoljno na sledeći način to razmotriti. Iz postavki prethodne Propozicije jasno je da je centar, prema kome teži telo S na koje deluju dve sile zajedno, veoma blizu zajedničkom centru gravitacije ta dva druga tela. Ako se taj centar poklapa sa zajedničkim centrom, štaviše, ako je zajednički centar gravitacije sva tri tela u stanju mirovanja, onda će telo S, s jedne strane, i zajednički centar gravitacije, s druge strane, opisati istinske elipse oko zajedničkog nepokretnog centra. Ovo sledi iz Kor. 2 Prop. LVIII, upoređeno sa onim što je pokazano u Prop. LXIV i LXV. Ovo precizno eliptično kretanje biće malo poremećeno rastojanjem centra dva tela od centra prema kome teži treće telo S. Ako tome dodamo i kretanje ka zajedničkom centru ta tri tela, onda će smetnje biti povećane. Prema tome, smetnja je najmanja kad je zajednički centar tri tela u stanju mirovanja, tj., kad je središnje i najveće telo T privučeno prema istom zakonu kao i ostala tela, a smetnja je uvek najveća kad zajednički centar tri tela, posle umanjenja kretanja tela T, počinje da se pomera, i kad se sve više i više pomera.



Kor. Ako više manjih tela kruži oko jednog velikog, lako je zaključiti da će se opisane orbite približiti elipsama; opisivanja površina biće ujednačenija, ako se sva tela međusobno privlače i deluju jedno na drugo sa silama ubrzanja koje su direktno proporcionalne sa njihovim apsolutnim silama, a obrnuto proporcionalne sa kvadratima rastojanja i ako je žiža svake orbite ponaosob smeštena u zajedničkom centru gravitacije svih unutrašnjih tela, (tj., ako je žiža prve i središnje orbite smeštena u centru gravitacije najvećeg i središnjeg tela; žiža druge orbite u zajedničkom centru gravitacije dva središnja tela; žiža treće orbite u zajedničkom centru gravitacije tri središnja tela, i tako dalje) – onda je središnje telo u stanju mirovanja i uzima se za zajedničku žižu svih orbita.

PROPOZICIJA LXIX. TEOREMA XXIX

U sistemu od nekoliko tela A, B, C, D, itd. ako bilo koje od tih tela, recimo A, privlači sva druga tela B, C, D, itd., sa silama ubrzanja koje su obrnuto proporcionalne sa kvadratima rastojanja od tela koje privlači, i ako drugo telo, recimo B, takođe privlači ostala tela A, C, D, itd., sa silama koje su obrnuto proporcionalne sa kvadratima rastojanja od tela koje privlači – onda će se apsolutne sile tela koja privlače, A i B, međusobno odnositi kao sama ta tela, A i B, kojima te sile i pripadaju.

Prema pretpostavci, ubrzavajuća privlačenja svih tela B, C i D ka A međusobno su jednaka na jednakim rastojanjima. Na isti način, ubrzavajuća privlačenja svih tela ka B takođe su jednaka na jednakim rastojanjima. Međutim, apsolutna sila privlačenja tela A odnosi se prema apsolutnoj sili privlačenja tela B kao što se ubrzavajuće privlačenje svih tela ka A odnosi prema ubrzavajućem privlačenju svih tela ka B na jednakim rastojanjima. U takvom odnosu je i ubrzavajuće privlačenje tela B ka A i ubrzavajuće privlačenje tela A ka B. Ubrzavajuće privlačenje tela B ka A odnosi se prema ubrzavajućem privlačenju tela A ka B kao masa tela A prema masi tela B, jer su pokretačke sile, koje su (prema Definiciji II, VII i VIII) proporcionalne sa silama ubrzanja i masama privučenih tela zajedno, međusobno jednake prema Zakonu III. Prema tome, apsolutna sila privlačenja tela A odnosi se prema apsolutnoj sili privlačenja tela B kao što se masa tela A odnosi prema masi tela B. Q.E.D.

Kor. 1. Ako svako telo iz sistema A, B, C, D itd. pojedinačno privlači sva druga tela silama ubrzanja koje su obrnuto proporcionalne sa kvadratima rastojanja od tela koje privlači, onda će apsolutne sile svih tih tela međusobno biti proporcionalne sa masama tih tela.

Kor. 2. Sličnim rasuđivanjem, ako svako telo iz sistema A, B, C, D itd. pojedinačno privlači sva druga tela silama ubrzanja, koje su ili obrnuto proporcionalne ili direktno proporcionalne sa bilo kojim stepenom rastojanja do tela koje privlači, ili koje su definisane bilo kojim zajedničkim zakonom pomoću međusobnog rastojanja tela koja se privlače – onda je jasno da su apsolutne sile ovih tela proporcionalne sa masama tih tela.

Kor. 3. U sistemu tela, čije se sile umanjuju proporcionalno sa kvadratima rastojanja i u kom manja tela kruže oko najvećeg po elipsama, sa zajedničkom žižom u centru tog velikog tela, čiji je oblik izuzetno precizan – štaviše, ako povučenim poluprečnicima do tog velikog tela opisuju površine koje su tačno proporcionalne sa vremenima – onda će se apsolutne sile tela međusobno odnositi, ili tačno ili veoma blizu, kao mase tih tela, i obrnuto. Ovo sledi iz Korolara Prop. XLVIII, upoređeno sa Kor. 1 ove propozicije.

SHOLIJA

Ove propozicije prirodno nas vode ka analogiji između centripetalnih sila i centralnih tela prema kojima su ove sile usmerene. Razumno je pretpostaviti da sile koje su usmerene prema telima zavise od prirode i veličine tih tela, kao što i proizlazi iz eksperimenata sa magnetima. I kad se takvi slučajevi dese, onda izračunavamo privlačenja tela tako što svakom njihovom delu dodeljujemo odgovarajuću silu, koje onda zajedno sabiramo. Ovde koristim reč privlačenje uopšteno kao nešto što proizlazi iz međusobnog prilaženja tela, bilo da se to nastojanje pojavljuje iz delovanja samih tela, kada uzajamno teže ili deluju jedno na drugo podstaknuta emitovanim energijama, bilo da se pojavljuje usled delovanja etera ili vazduha, ili bilo kog medijuma, materijalnog ili nematerijalnog, koji na bilo koji način prisiljavaju tela, koja su tu smeštena, da se kreću jedno prema drugom.

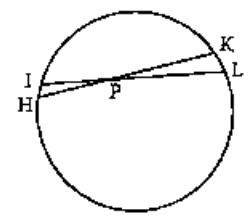
U tom uopštenom smislu koristim i reč impuls, pri čemu u ovoj studiji ne definišem vrste ili fizička svojstva sila, već istražujem veličine i njihove matematičke odnose, kao što je objašnjeno u definicijama. U matematici istražujemo veličine sila sa njihovim proporcijama koje su posledica bilo kojih pretpostavljenih uslova. Zatim, kada uđemo u sferu fizike, mi poredimo te proporcije sa prirodnim pojavama, kako bismo prepoznali koji uslovi tih sila odgovaraju nekolikim vrstama privlačne sposobnosti tela. Kada su ove pripreme urađene, sa većom sigurnošću možemo razmatrati fizičke vrste, uzroke i odnose među silama. Sada ćemo videti kojim silama sferna tela, koja se sastoje iz delova obdarenih sa moćima privlačenja, kao što je gore navedeno, moraju uzajamno delovati jedno na drugo i kakve vrste kretanja iz toga slede.

ODELJAK XII

O privlačnim silama sfernih tela

PROPOZICIJA LXX. TEOREMA XXX

Ako ka svakoj tački na sfernoj površini teže jednake centripetalne sile, koje opadaju sa kvadratom rastojanja do tih tačaka, tvrdim da čestica smeštena unutar te površine neće biti privučena tim silama na bilo kom mestu.

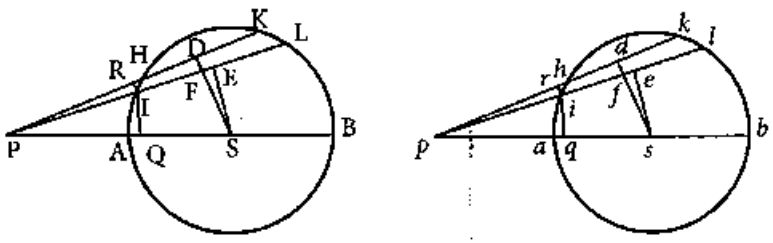


Neka je HIKL ta sferna površina, a P korpuskula koja je smeštena u njenoj unutrašnjosti. Neka su kroz P, prema ovoj površini, povučene dve linije HK i IL, koje presecaju veoma male lukove HI i KL. Pošto su (prema Kor. 3 Leme VII) trouglovi HPI o LPK slični, onda će ti lukovi biti proporcionalni sa rastojanjima HP i LP, a bilo koji veoma mali delovi na HI i KL sferne površine, koji su ograničeni pravim linijama koja prolazi kroz P, biće proporcionalni sa kvadratima tih rastojanja. Prema tome, sile ovih veoma malih delova, koje deluju na telo P, međusobno su jednake. Sile su direktno proporcionalne sa delovima, a obrnuto proporcionalne sa kvadratima rastojanja. Ova dva odnosa sačinjavaju odnos jednakosti. Zbog toga se privlačenja, koja su jednaka prema suprotnim delovima, poništavaju. Sličnim rasuđivanjem, sva privlačenja preko cele sferne površine poništena su suprotnim privlačenjima. Zato na telo P neće delovati ta privlačenja ni sa jedne strane. Q.E.D.

PROPOZICIJA LXXI. TEOREMA XXXI

Pod istim pretpostavkama tvrdim da je čestica, koja je smeštena van sferne površine, privučena prema centru sfere silom koja je obrnuto proporcionalna sa kvadratom rastojanja do tog centra.

Neka su AHKB i *ahkb* dve jednake sferne površine koje su opisane oko centara S i *s*, sa prečnicima AB i *ab* i neka su P i *p* dve čestice koje su smeštene van sfere na produžecima tih prečnika. Neka su iz čestica kroz P i *p* povučene linije PHK, PIL, *phk* i *pil*,



koje sa velikih krugova AHB i *ahb* odsecaju jednake lukove HK, *hk*, IL i *il* i neka su na te linije spuštene normale SD, *sd*, SE, *se*, IR i *ir*, od kojih SD i *sd* seku PL i *pl* u tačkama F i *f*. Takođe, neka su na prečnike spuštene normale IQ i *iq*. Neka su uglovi DPE i *dpe* beskonačno mali i pošto su DS i *ds*, ES i *es* jednake, onda se i linije PE, PF i *pe*, *pf*, kao i odsečci DF i *df* mogu smatrati jednakima jer je njihov granični odnos, kada uglovi DPE i *dpe* nestaju zajedno, jednak sa odnosom jednakosti. Na osnovu ovih pretpostavki, PI će se prema PF odnositi kao RI prema DF, a *pf* prema *pi* kao *df* ili DF prema *ri* i, *ex aequo*, PI × *pf* prema PF × *pi* kao RI prema *ri*, tj. (prema Kor. 3 Leme VII) kao što se luk IH odnosi prema luku *ih*. Zatim, PI se prema PS odnosi kao IQ prema SE, a *ps* prema *pi* kao *se* ili SE prema *iq* i, *ex aequo*, PI × *ps* prema PS × *pi* kao IQ prema *iq*. Množenjem ovih proporcija, $PI^2 \times pf \times ps$ se prema $pi^2 \times PF \times PS$ odnosi kao IH × IQ prema *ih* × *iq*, tj., kao što se kružne površine koje su opisane lukom IH, dok polukrug AKB kruži oko prečnika AB, odnose prema kružnim površinama koje su opisane lukom *ih*, dok polukrug *akb* kruži oko prečnika *ab*. Sile, čijim dejstvom ove površine privlače čestice P i *p* u pravcu linija koje teže ka tim površinama, prema hipotezi, direktno su proporcionalne sa samim tim površinama, a obrnuto proporcionalne sa kvadratom rastojanja tih površina od čestica, tj., odnose se kao *pf* × *ps* prema PF × PS. A te sile odnose se prema svojim kosim delovima koji (prema rastavljanju sila, kao što je navedeno u Kor. 2 Zakona kretanja) teže ka centrima u pravcu linija PS i *ps* kao što se PI odnosi prema PQ i *pi* prema *pq*, tj. (usled sličnih trouglova PIQ i PSF, *piq* i *psf*) kao PS prema PF i kao *ps* prema *pf*. Odatle sledi, *ex aequo*, da se privlačenje čestice P ka S odnosi prema privlačenju čestice *p* ka *s* kao $\frac{PI \times pf \times ps}{PS}$ prema $\frac{pf \times PF \times PS}{ps}$, tj., kao ps^2 prema PS^2. Sličnim rasuđivanjem, sile pomoću kojih površine, koje su opisane revolucijom lukova KL i *kl*, privlače te čestice, odnosiće se kao ps^2 prema PS^2. I u istom odnosu nalaziće se sile svih kružnih površina na

koje se svaka sferna površina može razdeliti uzimajući da je *sd* uvek jednako sa SD i *se* uvek jednako sa SE. Zbog toga će se, prema slaganju, sile celokupnih sfernih površina koje deluju na te čestice nalaziti u tom istom odnosu. Q.E.D.

PROPOZICIJA LXXII. TEOREMA XXXII

Ako prema nekoliko tačaka na sferi teže jednake centripetalne sile, koje se umanjuju proporcionalno sa kvadratima rastojanja do tih tačaka i ako je poznata gustina sfere kao i odnos prečnika sfere prema rastojanju čestice od njenog centra – tvrdim da je sila, kojom se privlači čestica, proporcionalna sa poluprečnikom sfere.

Zamislimo da su dve čestice pojedinačno privučene dvema sferama, prva sa prvom, a druga sa drugom, i da je njihovo rastojanje od centara sfera proporcionalno sa prečnicima sfera, kao i da je sfera razložena na slične veoma male delove, koji su raspoređeni na sličan način u odnosu na čestice. Onda će se privlačenje jedne čestice ka pojedinačnim veoma malim delovima jedne sfere, prema privlačenjima druge čestice ka odgovarajućem broju sličnih veoma malih delova druge sfere, nalaziti u odnosu koji se sastoji iz direktne proporcije samih tih veoma malih delova i obrnute proporcije kvadrata rastojanja. Međutim, ovi veoma mali delovi proporcionalni su sa sferama, tj., sa prečnicima na kub, a rastojanje je proporcionalno sa prečnicima, dok je proizvod gorepomenutih odnosa jednak odnosu jednog prečnika prema drugom. Q.E.D.

Kor. 1. Ako se čestice kreću po krugovima oko sfera, koje se sastoje iz materije jednako privučene i ako su rastojanja od centara sfera proporcionalna sa njihovim prečnicima, onda će periodična vremena biti jednaka.

Kor. 2. I, *vice versa*, ako su periodična vremena jednaka, rastojanja će biti proporcionalna sa prečnicima. Ova dva korolara proizlaze iz Kor. 3 Prop. IV.

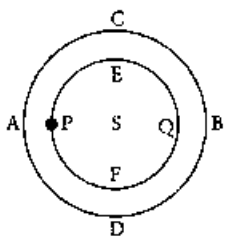
Kor. 3. Ako do pojedinačnih tačaka bilo koja dva čvrsta tela, sličnog oblika i jednake gustine, teže jednake centripetalne sile koje opadaju sa kvadratom rastojanja do tih tačaka, onda će sile, kojima su korpuskule koje su smeštene na sličan način u odnosu

na ta dva čvrsta tela privučene njima, biti proporcionalne sa prečnicima čvrstih tela.

PROPOZICIJA LXXIII. TEOREMA XXXIII

Ako do pojedinačnih tačaka date sfere teže jednake centripetalne sile koje opadaju sa kvadratom rastojanja do tih tačaka, tvrdim da je čestica, koja se nalazi unutar sfere, privučena silom koja je proporcionalna sa rastojanjem do centra.

Neka se na sferi ABCD, opisanoj oko centra S, nalazi čestica P i oko istog centra S, sa poluprečnikom SP, zamislimo opisanu unutrašnju sferu PEQF. Jasno je da (prema Prop. LXX) koncentrične sferne površine, iz kojih se sastoji razlika AEBF sfere, uopšte ne utiču na telo P, jer su njihova privlačenja poništena suprotnim privlačenjima. Zbog toga, preostaje samo privlačenje unutrašnje sfere PEQF, koje je (prema Prop. LXXII) proporcionalno sa rastojanjem PS. Q.E.D.



SHOLIJA

Pod površinama, iz kojih sam ovde zamislio da se sastoje čvrsta tela, ne podrazumevam čisto matematičke površine, već krugove ekstremno tanke, tako da je njihova debljina jednaka nuli, tj., podrazumevam prolazne krugove iz kojih će se sfera na kraju sastojati, kad je broj krugova povećan, a njihova debljina beskrajno umanjena. Na sličan način, pod tačkama iz kojih se navodno sastoje linije, površine i čvrsta tela, podrazumevamo jednake veoma male delove, čije su veličine potpuno neznatne.

PROPOZICIJA LXXIV. TEOREMA XXXIV

Prema istim pretpostavkama, tvrdim da je čestica, koja se nalazi van sfere, privučena silom koja je obrnuto proporcionalna sa kvadratom rastojanja do centra.

Ako pretpostavimo da je sfera podeljena na bezbrojne koncentrične sferne površine, onda će privlačenje čestice, koje se pojavljuje iz pojedinačnih površina, biti obrnuto proporcionalno sa kvadratom rastojanja čestice od centra sfere (prema Prop. LXXI). A prema slaganju, zbir tih privlačenja, tj., privlačenje čestice prema celokupnoj sferi, nalaziće se u istom odnosu. Q.E.D.

Kor. 1. Privlačenja homogenih sfera na jednakim rastojanjima od centra biće proporcionalna sa samim sferama. Prema Prop. LXXII, ako su rastojanja proporcionalna sa prečnicima sfera, sile će biti proporcionalne sa prečnicima. Ako je najveće rastojanje umanjeno u takvom odnosu, posle čega su rastojanja jednaka, u tom će slučaju privlačenje biti uvećano za odnos koji je jednak prethodnom odnosu na kvadrat, pa će se, zbog toga, prema drugom privlačenju odnositi kao prečnici na kub, tj., kao odnosi sfera.

Kor. 2. Na bilo kom rastojanju, privlačenja su proporcionalna sa sferama primenjenih na kvadratima rastojanja.

Kor. 3. Ako je čestica, koja je smeštena van homogene sfere, privučena silom koja je obrnuto proprocionalna sa kvadratom njenog rastojanja od centra i ako se sfera sastoji iz privlačnih čestica, onda će sila svake čestice opadati proporcionalno kvadratu rastojanja do svake od tih čestica.

PROPOZICIJA LXXV. TEOREMA XXXV

Ako prema pojedinačnim tačkama date sfere teže jednake centripetalne sile koje opadaju proporcionalno sa kvadratom rastojanja do tih čestica – tvrdim da će bilo koja druga slična sfera biti privučena prvoj sferi sa silom koja je obrnuto prporcionalna sa kvadratom rastojanja do centara.

Prvilačenje svake čestice obrnuto je proporcionalno sa kvadratom njenog rastojanja od centra sfere (pema Prop. LXXIV) i zbog toga je isto kao i kad bi sila privlačenja proizlazila iz jedne jedine čestice smeštene u centru ove sfere. Ovo privlačenje je isto toliko jako koliko i privlačenje iste čestice, ako ona privlači pojedine čestice druge sfere takvom silom, kojom ona sama privlači tu česticu. Privlačenje čestice će biti (prema Prop. LXXIV) obrnuto proporcionalno sa kvadratom njenog rastojanja od centra sfere i stoga je privlačenje sfere, koja je jednaka njoj, takođe u istom odnosu. Q.E.D.

Kor. 1. Privlačenja sfera prema drugim homogenim sferama proporcionalna su sa privučenim sferama podeljenih na kvadrate rastojanja njihovih centara do centara onih koje privlače.

Kor. 2. Isto će se desiti i u slučaju kad privučena sfera takođe privlači. Pojedinačne tačke jedne sfere privlače pojedinačne tačke druge istom silom kojom su one same privučene. Prema tome, pošto je u svim privlačenjima (prema Zakonu III) isto delovanje na privučenu tačku i na tačku koja privlači, onda će one svojim međusobnim privlačenjima obrazovati dve uzajamne sile privlačenja, a proporcija će ostati ista

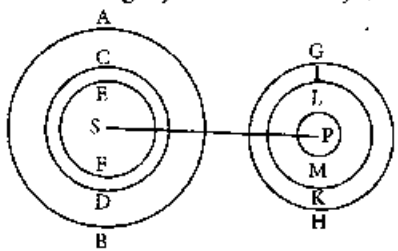
Kor. 3. Sve što je gore navedeno, a što se tiče kretanja tela oko žiže konusnog odeljka, moći će da se primeni i na slučaj kad je privučena sfera smeštena u žiži, dok se tela kreću van sfere.

Kor. 4. Sve što je do sada dokazano, a što se tiče kretanja tela oko centra konusnih odeljaka, moći će da se primeni i na slučaj kad su kretanja izvedena unutar sfere.

PROPOZICIJA LXXVI. TEOREMA XXXVI

Ako su sfere, koje su na bilo koji način različite (recimo, prema gustini materije ili prema sili privlačenja), u istom odnosu od centra do obima, i ako su svugde slične, na bilo kom datom rastojanju od centra i na svim stranama oko njega, i ako sila privlačenja svake tačke opada proporcionalno sa kvadratom rastojanja do privučenog tela – tvrdim da će celokupna sila, kojom jedna od ovih sfera privlači drugu, biti obrnuto proporcionalna sa kvadratom rastojanja među centrima.

Zamislimo nekoliko koncentričnih i sličnih sfera AB, CD, EF itd., koje, kada je unutrašnja dodata spoljašnjoj, mogu sačinjavati materiju koja je gušća prema centru, a kad je oduzeta, mogu sačinjavati slabiju i retku materiju. Onda će, prema Prop. LXXV, ove sfere privlačiti druge slične koncentrične sfere GH, IK, LM itd., silama koje su obrnuto proporcionalne sa kvadratom rastojanja SP. Prema slaganju ili oduzimanju, zbir svih tih sila, ili prevladavanje jedne sile u odnosu na druge, tj., ukupna sila kojom će celokupna sfera AB (koja je sačinjena od bilo kojih koncentričnih sfera ili od njihovih razlika) privući celokupnu sferu GH (koja je sačinjena od bilo kojih



koncentričnih sfera ili od njihovih razlika) – nalaziće se u istom odnosu. Ako je broj koncentričnih sfera povećan *in infinitum*, tako da se gustina materije zajedno sa silom privlačenja može, krećući se od obima prema centru, povećati ili umanjiti u skladu sa bilo kojim datim zakonom i ako je dodavanjem materije, koja ne poseduje silu privlačenja, nadoknađen nedostatak gustine, tako da sfere mogu zadobiti bilo koji željeni oblik, onda će sila, kojom jedna od ovih sfera privlači drugu, i dalje biti, kao prema ranijem rasuđivanju, obrnuto proporcionalna sa kvadratom rastojanja. Q.E.D.

Kor. 1. Ako se nekoliko sfera ove vrste, koje su slične u svakom pogledu, međusobno privlače, onda će ubrzavajuća privlačenja jedne prema drugoj, na bilo kojim jednakim rastojanjima centara, biti proporcionalna sa privučenim sferama.

Kor. 2. Na različitim rastojanjima, te sile biće proporcionalne sa privučenim sferama primenjih na kvadrate rastojanja između centara.

Kor. 3. Pokretačka privlačenja ili međusobne težine sfera, na jednakim rastojanjima biće proporcionalna sa privučenim telom i telom koje privlači zajedno, tj., sa proizvodom množenja sfera.

Kor. 4. Na različitim rastojanjima, ona će biti direktno proporcionalna sa tim proizvodom, a obrnuto proporcionalna sa kvadratima rastojanja između centara.

Kor. 5. Ove proporcije važe i u slučaju kada se privlačenje javlja iz svojstva privlačenja obe sfere koje uzajamno deluju jedna na drugu, jer će privlačenje biti udvostručeno konjunkcijom sila, dok proporcija ostaje ista.

Kor. 6. Ako ovakve sfere kruže oko drugih koje su u stanju mirovanja, svaka oko svake, onda će rastojanja između centara tela koja miruju i tela koja kruže biti proporcionalna sa prečnicima tela koja miruju, a periodična vremena će biti jednaka.

Kor. 7. Ako su periodična vremena jednaka, onda će rastojanja biti proporcionalna sa prečnicima.

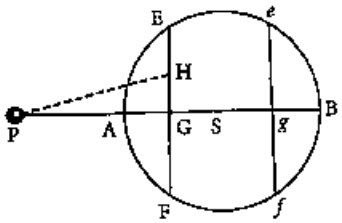
Kor. 8. Sve što je iznad navedeno, a što se tiče kretanja tela oko žiža konusnih odeljaka, može da se primeni i na slučaj kad je sfera koja privlači i koja je bilo kog oblika i stanja poput gorepomenute, smeštena u žiži.

Kor. 9. Takođe, može se primeniti i na slučaj kada tela koja kruže privlače sfere koje su bilo kog oblika i stanja poput goreopisane.

PROPOZICIJA LXXVII. TEOREMA XXXVII

Ako do pojedinačnih tačaka na sferi teže centripetalne sile koje su proporcionalne sa rastojanjima tačaka do privučenih tela – tvrdim da je složena sila, kojom se dve sfere uzajamno privlače, proporcionalna sa rastojanjem između centara sfera.

Slučaj 1. Neka je AEBF sfera, S njen centar, P privučena čestica, PASB osa sfere koja prolazi kroz centar čestice, EF i *ef* dve ravni koje seku sferu, koje su normalne u odnosu na osu i koje su na jednakim rastojanjima od centra sfere, jedna s jedne strane, a druga s druge, G i *g* tačke preseka ravni i ose i neka je H bilo koja tačka u ravni EF. Centripetalna sila kojom tačka H deluje na česticu P i koja je usmerena u pravcu linije PH, proporcionalna je sa rastojanjem PH; ako ta sila (prema Kor. 2 Zakona) deluje u pravcu linije PG ili prema centru S, onda je proporcionalna sa dužinom PG. Prema tome, sila svih tačaka u ravni EF (tj. cele te ravni) kojom je čestica P privučena ka centru S, proporcionalna je sa rastojanjem PG pomnoženim sa brojem tih tačaka, tj., sa telom zahvaćenim tom ravni EF na rastojanju PG. I na isti način, sila ravni *ef*, kojom je čestica P privučena prema centru S, proporcionalna je sa proizvodom ravni sa njenim rastojanjem Pg, ili sa proizvodom njoj jednake ravi EF i rastojanja Pg; zbir sila obe ravni proporcionalan je sa proizvodom ravni EF i zbira rastojanja PG + Pg, tj., sa proizvodom ravni EF i dvostrukog rastojanja PS centra i čestice, tj., sa proizvodom dvostruke ravni EF i rastojanja PS, ili sa proizvodom zbira jednakih ravni EF + *ef* sa istim tim rastojanjem. Istim rasuđivanjem, sile svih ravni na celokupnoj sferi, koje su sa svake strane jednako udaljene od centra sfere, proporcionalne su sa proizvodom zbira tih ravni i rastojanja PS; tj., sa celokupnom sferom i rastojanjem PS zajedno. Q.E.D.

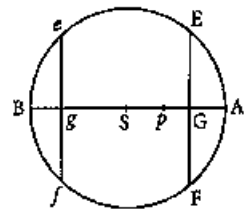


Slučaj 2. Neka čestica P privlači sferu AEBF. Istim rasuđivanjem sledi da je sila, kojom je sfera privučena, proporcionalna sa rastojanjem PS. Q.E.D.

Slučaj 3. Zamislimo neku drugu sferu koja se sastoji iz beskonačnog broja čestica P. Pošto je sila kojom je svaka čestica privučena proporcionalna sa rastojanjem čestice od centra prve sfere i sa istom tom sferom zajedno, pa je zbog toga ista kao kada bi sve proizašle iz jedne jedine čestice smeštene u centru sfere, onda će celokupna sila kojom su privučene sve čestice na drugoj sferi, tj. kojom je ta cela sfera privučena, biti ista kao i kada bi ta sfera bila privučena silom koja proizlazi iz jedne jedine čestice smeštene u centru prve sfere i zbog toga je proporcionalna sa rastojanjem između centara sfera. Q.E.D.

Slučaj 4. Ako se sfere uzajamno privlače, onda će sila biti udvostručena, dok će proporcija ostati ista. Q.E.D.

Slučaj 5. Neka je čestica *p* smeštena unutar sfere AEBF. Pošto je sila privlačenja ravni *ef* ka čestici proporcionalna sa proizvodom tela zahvaćenim tom ravni i rastojanja *pg*, i pošto je njoj suprotna sila ravni EF proporcionalna sa proizvodom tela zahvaćenim tom ravni i rastojanja Pg, onda će sila, koju sačinjavaju obe te sile, biti proporcionalna sa razlikom tih proizvoda, tj., sa zbirom jednakih ravni pomnoženih sa polovinom razlike rastojanja, tj., sa tim zbirom pomnoženim sa rastojanjem *p*S čestica od centra sfere. Istim rasuđivanjem, privlačenje svih ravni EF i *ef*, preko cele sfere, tj., privlačenje celokupne sfere, proporcionalno je sa zbirom svih ravni, ili sa celokupnom sferom i rastojanjem *p*S čestica od centra sfere. Q.E.D.



Slučaj 6. Ako je iz beskonačnog broja čestica *p*, sastavljena sfera koja je smeštena unutar prve sfere AEBF, može se dokazati, kao i ranije, da će privlačenje, bilo jedne sfere prema drugoj, bilo uzajamno privlačenje obe sfere jedne prema drugoj, biti proporcionalno sa rastojanjem *p*S između centara. Q.E.D.

PROPOZICIJA LXXVIII. TEOREMA XXXVIII

Ako su sfere tokom prelaza od centra prema obimu na bilo koji način različite i nejednake, a slične na svim stranama okolo pri svim datim rastojanjima od centra i ako je sila privlačenja svake tačke proporcionalna sa rastojanjem tela koje je privučeno – tvrdim da je celokupna sila, kojom se dve sfere ove vrste uzajamno privlače, proporcionalna sa rastojanjem između centara tih sfera.

Ovo sledi iz prethodne Propozicije, na isti način kao što Propozicija LXXVI sledi iz Propozicije LXXV.

Kor. Sve što smo pokazali u propozicijama X i LXIV o kretanjima tela oko centara konusnih odeljaka, može se primeniti i na slučaj kad sva privlačenja proizlaze iz sile sfernih tela sa goreopisanim svojstvima, pa su privučena tela sfere iste vrste.

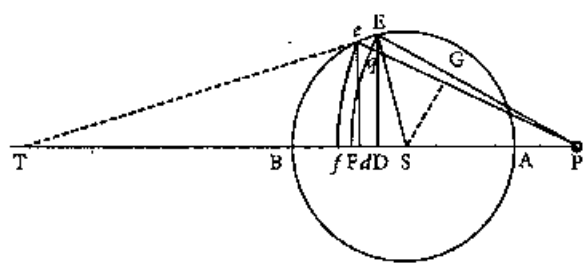
SHOLIJA

Objasnio sam dva osnovna slučaja privlačenja: kada centripetalna sila opada proporcionalno sa kvadratom rastojanja, ili kada se povećava proporcionalno sa rastojanjem, uzrokujući da tela u oba slučaja kruže po konusnim presecima i sačinjavajući sferna tela čije centripetalne sile slede isti zakon povećanja ili umanjenja pri udaljavanju od centra kao što to čine i sile čestica, što je zaista vredno pažnje. Bilo bi zamorno objašnjavati ostale slučajeve, čiji su zaključci manje elegantni i značajni, na način na koji sam objasnio prethodne. Radije biram da ih sve razumem i odredim sledećim opštim metodom.

LEMA XXIX

Ako je oko centra S opisan bilo koji krug, recimo AEB, a oko centra P dva kruga EF i *ef* koji seku prvi u tačkama E i *e*, a liniju PS u tačkama F i *f* i ako na PS spustimo normale ED i *ed* – tvrdim da je, ako je rastojanje između lukova EF i *ef* beskonačno umanjeno, granični odnos linije D*d* prema prolaznoj liniji F*f* jednak odnosu linije PE prema liniji PS.

Ako linija P*e* seče luk EF u tački *q* i ako je prava linija E*e*, koja se poklapa sa prolaznim lukom E*e*, produžena i seče pravu liniju PS u tački T, i ako je iz S prema PE spuštena normala SG, onda će

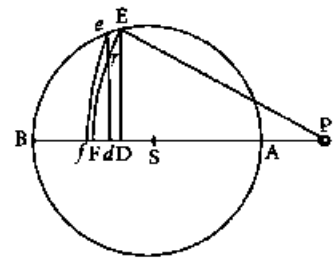


se, usled sličnih trouglova DTE, *d*Te i DES, D*d* prema E*e* odnositi kao DT prema TE, ili kao DE prema ES, a pošto su trouglovi E*eq* i ESG slični (prema Lemi VIII, i Kor. 3 Leme VII), onda će se E*e* prema *eq* ili F*f* odnositi kao ES prema SG i, *ex aequo*, D*d* prema F*f* odnosiće se kao DE prema SG; tj., usled sličnih trouglova PDE i PGS, kao što se PE odnosi prema PS. Q.E.D.

PROPOZICIJA LXXIX. TEOREMA XXXIX

Ako pretpostavimo da se širina površine, recimo EF*fe*, beskonačno umanjuje, gotovo da nestaje i da ista ta površina, svojom revolucijom oko ose PS, opisuje sferno konkavno-konveksno čvrsto telo, kao i da prema pojedinačnim njemu jednakim česticama teži jednaka centripetalna sila – tvrdim da će onda sila, kojom to telo privlači česticu smeštenu u tački P, biti proporcionalna sa proizvodom $DE^2 \times Ff$ i sile, kojom date čestice u ravni F*f* privlače istu tu česticu.

Na početku, razmotrićemo silu sferne površine FE, koja je stvorena revolucijom luka FE, i koju na bilo kom mestu, recimo *r*, seče linija *de*; onda će prstenast deo površine stvorene revolucijom luka *r*E biti proporcionalan sa linijicom D*d*, dok poluprečnik sfere PE ostaje isti, kao što je Arhimed pokazao u svojoj knjizi *O sferi i cilindru*. A sila ove površine, koja deluje u pravcu linija PE ili P*r* smeštenih na konusnoj površini, biće proporcionalna sa tom prstenastom površinom, tj., sa linijicom D*d* ili, što je isto, sa pravougaonikom pod datim poluprečnikom PE sfere i linijice D*d*. Međutim, ta sila, koja deluje u pravcu linije PS i koja teži prema centru S, biće manja u odnosu PD prema PE i zbog toga će biti proporcionalna sa PD × D*d*. Ako pretpostavimo da je linija DF podeljena na bezbrojne, male i jednake, delove, od kojih je svaki označen sa D*d*, onda će površina FE takođe biti podeljena na isti broj jednakih prstenova, čije će sile biti proporcionalne sa zbirom svih pravougaonika PD × D*d*, tj., sa $\frac{1}{2}PF^2 - \frac{1}{2}PD^2$, i zbog toga sa DE^2. Ako je površina FE pomnožena sa visinom F*f*, onda će sila tela EF*fe*, koja deluje na kor-

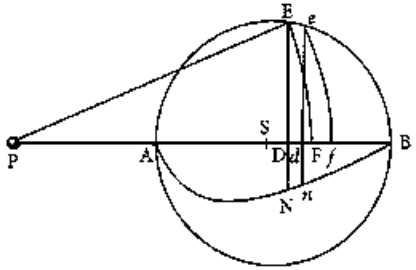


puskulu P, biti proporcionalna sa $DE^2 \times Ff$, tj., ako je data sila s kojom bilo koja data čestica Ff deluje na česticu na rastojanju PF. Međutim, ako ta sila nije data, onda će sila tela EF*fe* biti proporcionalna sa proizvodom tela $DE^2 \times Ff$ i te sile koja nije data. Q.E.D.

PROPOZICIJA LXXX. TEOREMA XL

Ako prema pojedinačnim jednakim tačkama sfere ABE, opisane oko centra S, teže jednake centripetalne sile; i ako su iz pojedinačnih tačaka D na osi sfere AB, na kojoj je smeštena čestica P, podignute normale DE koje seku sferu u tački E, i ako su na tim normalama položene dužine DN koje su proporcionalne sa veličinom $\frac{DE^2 \times PS}{PE}$ i silom, kojom čestice sfere smeštene na osi deluju na česticu P na rastojanju PE – onda tvrdim da je celokupna sila, kojom je čestica P privučena ka sferi, proporcionalna sa površinom ANB, koja je ograničena osom sfere AB i krivom linijom ANB, položajem tačke N.

Pod pretpostavkom da važe postavke iz prethodne Leme i Teoreme, zamislićemo da je osa sfere AB podeljena na bezbrojne jednake čestice D*d*, i da je cela sfera podeljena na isto toliko sfernih konkavno-konveksnih slojeva EF*fe*, pri čemu ćemo podići normalu *dn*. Prema poslednjoj Teoremi, sila kojom sloj EF*fe* privlači česticu P proporcionalna je sa $DE^2 \times Ff$ i silom jedne čestice koja deluje na rastojanju PE ili PF, zajedno. Prema poslednjoj Lemi, D*d* se prema F*f* odnosi kao PE prema PS, pa je zato F*f* jednaka sa $\frac{PS \times Dd}{PE}$, a $DE^2 \times Ff$ jednako je sa $Dd \times \frac{DE^2 \times PS}{PE}$ i zbog toga je sila sloja EF*fe* proporcionalna sa veličinom $Dd \times \frac{DE^2 \times PS}{PE}$ i silom čestice koja deluje na rastojanju PF, zajedno, tj., prema pretpostavci, sa $DN \times Dd$, ili sa prolaznom površinom DN*nd*. Prema tome, sile svih slojeva, koje deluju ka čestici P, proporcionalne su sa svim površinama DN*nd*, tj., celokupna sila sfere biće proporcionalna sa celom površinom ANB. Q.E.D.



Kor. 1. Ako centripetalna sila koja teži ka pojedinačnim česticama ostaje uvek ista na svim rastojanjima i ako je DN proporcionalna sa $\frac{DE^2 \times PS}{PE^3}$, onda je celokupna sila kojom sfera privlači korpuskulu proporcionalna sa površinom ANB.

Kor. 2. Ako je centripetalna sila čestica obrnuto proporcionalna sa rastojanjem do čestice koja je njome privučena i ako je DN proporcionalna sa $\frac{DE^2 \times PS}{PE^4}$, onda će sila, kojom celokupna sfera privlači česticu P, biti proporcionalna sa površinom ANB.

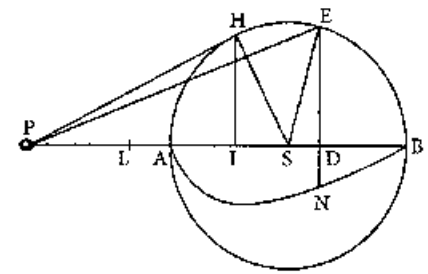
Kor. 3. Ako je centripetalna sila čestica obrnuto proporcionalna sa kubnim rastojanjem do čestice koja je njome privučena i ako je DN proporcionalna sa $\frac{DE^2 \times PS}{PE^5}$, onda će sila, kojom celokupna sfera privlači česticu, biti proporcionalna sa površinom ANB.

Kor. 4. I univerzalno, ako se pretpostavi da je centripetalna sila, koja teži ka pojedinačnim česticama sfere, obrnuto proprocionalna sa veličinom V i ako je $\frac{DE^2 \times PS}{PE \times V}$, onda će sila, kojom celokupna sfera privlači korpuskulu P, biti proporcionalna sa površinom ANB.

PROPOZICIJA LXXXI. PROBLEM XLI

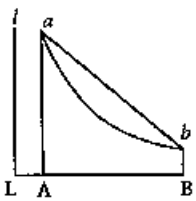
Neophodno je izmeriti površinu ANB, zadržavajući prethodne pretpostavke.

Neka je iz tačke P povučena prava linija PH koja dodiruje sferu u tački H i neka je do ose PAB spuštena normala HI, koja polovi PI u tački L. Tada je (prema Prop. XII, Knjige II, *Elem.*) PE^2 jednako sa $PS^2 + SE^2 + 2PSD$. Međutim, pošto su trouglovi SPH i SHI slični, onda je SE^2 ili SH^2 jednako sa pravougaonikom PSI. Prema tome, PE^2 je jednako sa proizvodom PS i PS + SI + 2SD, tj., sa proizvodom PS i 2LS +2SD, odnosno sa PS x 2LD. Dalje, DE^2 je jednako sa $SE^2 - SD^2$, ili sa $SE^2 - LS^2 + 2SLD - LD^2$, tj., sa $2SLD - LD^2 - ALB$. Jer, $LS^2 - SE^2$ ili $LS^2 - SA^2$ (prema Prop. VI, Knjige II, *Elem.*) jednako je sa pravougaonikom ALB. Ako umesto DE^2 napišemo $2SLD - LD^2 - ALB$, onda će se veličina, koja je (prema Kor. 4 prethodne Prop.) proporcionalna sa dužinom ordinate DN, razložiti na tri dela $\frac{2SLD \times PS}{PE \times V} - \frac{LD^2 \times PS}{PE \times V} - \frac{ALB \times PS}{PE \times V}$, a ako umesto V napišemo veličinu obrnutog odnosa centripetalne sile i umesto

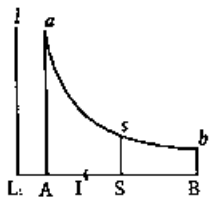


PE geometrijske sredine PS i 2LD, onda će sva tri dela postati ordinate istom broju krivih linija, čije su površine otkrivene uobičajenim metodom. Q.E.D.

Primer 1. Ako je centripetalna sila koja teži ka pojedinačnim česticama sfere obrnuto proporcionalna sa rastojanjem i ako umesto V napišemo PE a umesto PE^2 veličinu 2PS × LD, onda će DN postati jednako sa $SL - \frac{1}{2} LD - \frac{ALB}{2LD}$. Ako pretpostavimo da je DN jednako sa dvostrukom veličinom, $2SL - LD - \frac{ALB}{LD}$, tada će 2SL, poznat deo ordinate, pri povlačenju do dužine AB, opisivati pravougaonu površinu 2SL × AB, a neodređen deo LD, koji je povučen normalno na istu tu dužinu sa stalnim kretanjem, na takav način da svojim kretanjem može, ili povećenjem ili umanjenjem, uvek ostati jednako sa dužinom LD, opisaće površinu $\frac{LB^2 - LA^2}{2}$, tj., površinu SL × AB, koja, kad je uzeta iz prethodne površine 2SL × AB, ostavlja površinu SL × AB. Međutim, treći deo $\frac{ALB}{LD}$, koji je povučen na isti način, sa stalnim kretanjem, normalno na istu dužinu, opisivaće površinu hiperbole, koja kad se oduzme od površine SL × AB, ostavlja traženu površinu ANB. Odatle proizlazi postavka Problema. Na tačkama L, A i B podići ćemo normale L*l*, A*a* i B*b*, tako da je A*a* jednako sa LB, a B*b* jednako sa LA. Kroz tačke *a* i *b* opisaćemo hiperboličnu krivu *ab* s asimptotama L*l* i LB. Pošto je povučena tetiva *ba*, ograničiće površinu *aba* jednaku sa traženom površinom ANB.

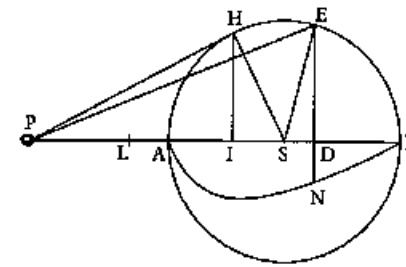


Primer 2. Ako je centripetalna sila, koja teži ka pojedinačnim česticama sfere, obrnuto proporcionalna sa kubnim rastojanjem, ili (što je isto) sa odnosom tog kubnog rastojanja i bilo koje date ravni i ako umesto V napišemo $\frac{PE^3}{2AS^2}$, a 2PS × LD umesto PE^2, onda će DN postati proporcionalno sa $\frac{SL \times AS^2}{PS \times LD} - \frac{AS^2}{2PS} - \frac{ALB \times AS^2}{2PS \times LD^2}$, tj. (pošto su PS, AS i SI neprekidno proporcionalne) sa $\frac{LSI}{LD} - \frac{1}{2} SI - \frac{ALB \times SI}{2LD^2}$. Ako povučemo ta tri dela po dužini AB, prvi deo $\frac{LSI}{LD}$ stvoriće površinu hiperbole; drugi deo $\frac{1}{2}$SI površinu $\frac{1}{2}$AB × SI; treći $\frac{ALB \times SI}{2LD^2}$ površinu $\frac{ALB \times SI}{2LA} - \frac{ALB \times SI}{2LB}$, tj., $\frac{1}{2}$AB × SI. Ako iz prve površine oduzmemo zbir druge i treće, preostaće nam tražena površina ANB. Odatle proizlazi postavka Problema. Na tačkama L, A, S i B podignućemo normale L*l*, A*a*, S*s* i B*b*, od kojih je recimo S*s* jednaka sa SI i kroz tačku *s*, s asimptotama L*l* i B*b*, opisaćemo hiperbolu *asb* koja seče



normale A*a* i B*b* u tačkama *a* i *b*; i ako od hiperbolične površine A*asb*B oduzmemo pravougaonik 2ASI, ostaće nam tražena površina ANB.

Primer 3. Ako centripetalna sila, koja teži ka pojedinačnim česticama sfere, opada proporcionalno sa četvrtim stepenom rastojanja do čestica i ako umesto V napišemo $\frac{PE^4}{2AS^3}$, a $\sqrt{2PS + LD}$ umesto PE, onda će DN postati proporcionalna sa $\frac{SI^2 \times SL}{\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LD^3}} - \frac{SI^2}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LD}} - \frac{SI^2 \times ALB}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LD^5}}$.



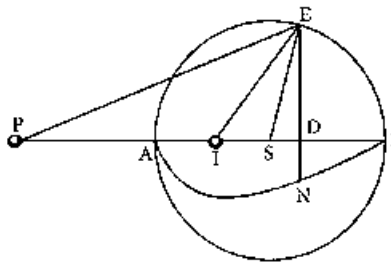
Kada su ova tri dela pomnožena sa dužinom AB, ona daju površine kao što su $\frac{2SI^2 \times SL}{\sqrt{2SI}}$ puta $\left[\frac{1}{\sqrt{LA}} - \frac{1}{\sqrt{LB}}\right]$; iz $\frac{SI^2}{\sqrt{2SI}}$ puta $[\sqrt{LA} - \sqrt{LB}]$; kao i $\frac{SI^2 \times ALB}{3\sqrt{2SI}}$ puta $\left[\frac{1}{\sqrt{LA^3}} - \frac{1}{\sqrt{LB^3}}\right]$. A one posle skraćivanja postaju $\frac{2SI^2 \times SL}{LI}$, SI^2 i $SI^2 + \frac{2SI^2}{3LI}$. A ako iz prve oduzmemo poslednju, dobićemo $\frac{4SI^2}{3LI}$. Prema tome, ukupna sila, kojom je čestica P privučena prema centru sfere, proporcionalna je sa $\frac{SI^2}{PI}$, tj. obrnuto je proporcionalna sa $PS^3 \times PI$. Q.E.I.

Istim metodom može se odrediti i privlačenje čestice koja je smeštena unutar sfere, no sledeća Teorema nudi efikasniji postupak.

PROPOZICIJA LXXXII. TEOREMA XLI

Ako su SI, SA i SP neprekidno proporcionalne na sferi opisanoj oko centra S s poluprečnikom SA, tvrdim da je odnos privlačenja čestice unutar sfere na bilo kom mestu I prema privlačenju čestice van sfere na mestu P, jednak odnosu koji se sastoji iz kvadratnog korena odnosa IS i PS, rastojanja do centra i kvadratnog korena odnosa centripetalnih sila koje teže ka centru na tim mestima P i I.

Prema tome, ako su centripetalne sile čestica sfere obrnuto proporcionalne sa rastojanjima čestice, onda će sila kojom je čestica, koja je smeštena u tački I, privučena prema celokupnoj sferi, prema sili, kojom je čestica privučena iz tačke P, biti u odnosu sastavljenom iz kvadratnog korena odnosa rastojanja SI prema SP, i kvadratnog korena odnosa centripetalne sile položaja I, bilo koje čestice u centru, prema centripetalnoj sili položaja P, iste te



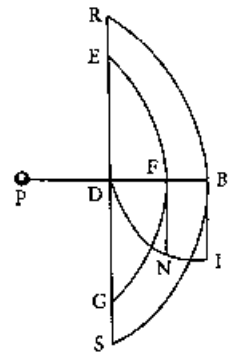
čestice u centru, tj., kvadratni koren međusobnog recipročnog odnosa rastojanja SI prema SP. Ova dva odnosa čine odnos jednakosti, a zbog toga su privlačenja, stvorena u položajima I i P, jednaka. Sličnim proračunom dobijamo da je odnos privlačenja u I prema privlačenju u P jednak sa odnosom rastojanja SP prema poluprečniku SA sfere, ako su sile čestica sfere obrnuto proporcionalne sa kvadratima rastojanja. Ako su te sile obrnuto proporcionalne sa rastojanjima na kub, onda će se privlačenja u I i P međusobno odnositi kao SP^2 prema SA^2; ako su obrnuto proporcionalne sa četvrtim stepenom rastojanja, privlačenja će se međusobno odnositi kao SP^3 prema SA^3. Pošto je u ovom poslednjem slučaju pronađeno da je privlačenje u P obrnuto proporcionalno sa $PS^3 \times PI$, onda će privlačenje u I biti obrnuto proporcionalno sa $SA^3 \times PI$, tj., pošto je SA^3 dato, ono će biti obrnuto proporcionalno sa PI. I progresija je ista *in infinitum*. Dokaz ove teoreme glasi:

Zadržavajući prethodne postavke, i pošto se čestica nalazi na bilo kom mestu P, pronaći ćemo da je ordinata DN proporcionalna sa $\frac{DE^2 \times PS}{PE \times V}$. Prema tome, ako povučemo IE, onda će ta ordinata za bilo koje drugo mesto čestice, recimo I, postati (*mutatis mutandis*) proporcionalna sa $\frac{DE^2 \times IS}{IE \times V}$. Ako pretpostavimo da se centripetalne sile, koje teku iz bilo koje tačke sfere, recimo E, na rastojanjima IE i PE, međusobno odnose kao PE^n prema IE^n (gde *n* označava indeks stepena PE i IE), onda će te ordinate postati proporcionalne sa $\frac{DE^2 \times PS}{PE \times PE^n}$ i sa $\frac{DE^2 \times IS}{IE \times IE^n}$, čiji je međusobni odnos jednak odnosu $PS \times IE \times IE^n$ prema $IS \times PE \times PE^n$. Pošto su SI, SE i SP u stalnoj proporciji, onda su trouglovi SPE i SEI slični i odatle sledi da se IE prema PE odnosi kao IS prema SE ili SA. Ako umesto odnosa IE prema PE napišemo odnos IS prema SA, onda će odnos ordinata postati $PS \times IE^n$ prema $SA \times PE^n$. Međutim, odnos PS prema SA jednak je kvadratnom korenu iz odnosa rastojanja PS i SI, a odnos IE^n prema PE^n (pošto je IE prema PE jednako sa IS prema SA) jednak je kvadratnom korenu iz odnosa sila na rastojanjima PS i IS. Prema tome, ordinate, sa površinama koje te ordinate opisuju, kao i sa privlačenjima koja su proporcionalna sa njima, nalaziće se u odnosu koji se sastoji iz tih pomenutih odnosa. Q.E.D.

PROPOZICIJA LXXXIII. PROBLEM XLII

Pronaći silu kojom je čestica, koja je smeštena u centru sfere, privučena prema bilo kom segmentu te sfere.

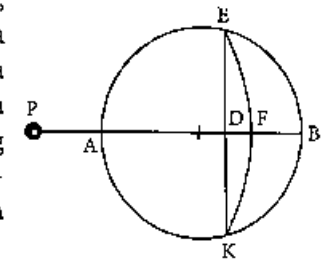
Neka je P telo koje se nalazi u centru sfere, a RBSD segment koji je sadržan između ravni RDS i sferne površine RBS. Neka je, u tački F, DB presečena sfernom površinom EFG opisanom iz centra P i neka je segment podeljen na delove BREFGS i FEDG. Pretpostavimo da segment nije čisto matematička, već fizička površina, koja ima neku potpuno neznatnu debljinu. Neka je ta debljina označena sa O. Onda će (prema Arhimedovom dokazu) ta površina biti proporcionalna sa $PF \times DF \times O$. Ako pretpostavimo da su sile privlačenja čestica sfere obrnuto proporcionalne sa stepenom rastojanja, čiji indeks je *n*, onda će sila, kojom površina EFG privlači telo P, biti proporcionalna sa $\frac{DE^2 \times O}{PF^n}$, tj., sa $\frac{2DF \times O}{PF^{n-1}} - \frac{DE^2 \times O}{PF^n}$ (prema Prop. LXXIX). Neka je normala FN, pomnožena sa O, proporcionalna sa ovom veličinom, onda će krivolinijska površina BDI, koju će ordinata FN povučena kroz dužinu DB opisivati sa neprekidnim kretanjem, biti proporcionalna sa celokupnom silom kojom potpuni segment RBSD privlači telo P. Q.E.I.



PROPOZICIJA LXXXIV. PROBLEM XLIII

Pronaći silu kojom je čestica, koja je smeštena van centra sfere na osi bilo kog segmenta, privučena tim segmentom.

Neka je telo P, koje je smešteno na osi ADB segmenta EBK, privučeno tim segmentom. Oko centra P, sa intervalom PE, neka je opisana sferna površina EFK, koja deli segment na dva dela EBKFE i EFKDE. Kada pomoću Prop. LXXXI pronađemo silu prvog dela, a pomoću Prop. LXXXIII silu drugog dela, onda će zbir tih sila biti sila celog segmenta EBKDE. Q.E.I.



SHOLIJA

Pošto su objašnjena privlačenja sfernih tela, sledi da razmotrimo zakone privlačenja drugih tela koja se na sličan način sastoje iz privlačnih čestica. Međutim, podrobnije razmatranje nije neophodno. Biće dovoljno da dodamo pojedine opšte propozicije koje se tiču sila takvih tela i kretanja koja iz toga proizlaze, jer je znanje o tim stvarima od male upotrebne vrednosti za filozofska istraživanja.

ODELJAK XIII

O silama privlačenja tela koja nisu sfernog oblika

PROPOZICIJA LXXXV. TEOREMA XLII

Ako je telo privučeno drugim telom i ako je njihovo privlačenje mnogo jače kada se međusobno graniče, nego kada su razdvojena veoma malim intervalom, onda će, prilikom udaljavanja tela koje se privlači, sile čestica tela koje privlači opadati za odnos koji je veći od kvadrata rastojanja čestica.

Jer, ako se sile umanjuju proporcionalno sa kvadratima rastojanja od čestica, privlačenje prema sfernom telu, koje je (prema Prop. LXXIV) obrnuto proporcionalno sa kvadratima rastojanja privučenog tela od centra sfere, neće se osetno povećati usled kontakta, a još će se i manje uvećati ako se privlačenje, tokom udaljavanja privučenog tela, smanjuje za manju proporciju. Zbog toga je ova Propozicija očigledna u pogledu sfera koje se privlače. A slučaj je isti i u pogledu konkavnih sfernih krugova koji privlače spoljašnja tela. Još i u većem stepenu odnosi se na krugove koji privlače tela koja su smeštena unutar njih, jer su privlačenja koja su rasuta preko šupljina tih krugova (prema Prop. LXX) uništena suprotnim privlačenjima, pa zbog toga ni nemaju uticaja, čak ni na mestu kontakta. Ako sa tih sfera i sfernih krugova uklonimo bilo koje delove koji su udaljeni od mesta kontakta i ako bilo gde dodamo nove delove, onda možemo proizvoljno promeniti oblike tela koja se privlače. Međutim, pošto su delovi, koji su dodati ili uklonjeni, udaljeni od mesta kontakta, oni neće prouzrokovati značajan višak privlačenja koje je posledica dodira dvaju tela. Prema tome, Propozicija se može primeniti za tela svih oblika. Q.E.D.

PROPOZICIJA LXXXVI. TEOREMA XLIII

Ako sile čestica, od kojih je sačinjeno privlačno telo, pri udaljavanju privlačnog tela opadaju proporcionalno sa trećim ili višim stepenom rastojanja od čestica, onda će privlačenje biti mnogo jače u tački dodira nego kad su telo koje privlači i privučeno telo međusobno razdvojeni ma kako malim intervalom.

Iz rešenja Problema XLI, koje je izloženo u drugom i trećem Primeru, sledi da je privlačenje beskonačno povećano kada privučene čestice dodirnu privlačnu sferu ove vrste. Isto će se pojaviti (upoređujući zajedno te primere i Teoremu XLI) i prilikom privlačenja tela načinjenim prema konkavno-konveksnim krugovima, bez obzira na to da li su privučena tela smeštena van krugova ili unutar njihovih šupljina. I dodajući ili uklanjajući sa tih sfera i krugova bilo koju privlačnu materiju, bilo gde izvan mesta kontakta, tako da privlačna tela mogu zadobiti bilo koji zadati oblik, Propozicija se može primeniti na sva tela univerzalno. Q.E.D.

PROPOZICIJA LXXXVII. TEOREMA XLIV

Ako dva tela, koja su međusobno slična i koja se sastoje od materije jednako privlačne, odvojeno privlače dve čestice proporcionalne sa tim telima, onda će se, slično tom odnosu, ubrzavajuća privlačenja čestica prema odgovarajućim telima odnositi kao ubrzavajuća privlačenja čestica prema česticama tela, koje su proporcionalne sa tim telima i koje su na sličan način smeštene u njima.

Ako pretpostavimo da su tela podeljena na čestice koje su proporcionalne sa telima i na sličan način smešten tamo, onda će se privlačenje ka bilo kojoj čestici jednog tela prema privlačenju ka odgovarajućoj čestici u drugom telu odnositi kao što se privlačenja ka pojedinačnim česticama prvog tela odnose prema privlačenjima ka pojedinačnim odgovarajućim česticama drugog tela. Pomoću slaganja dobijamo da je privlačenje ka prvom telu prema privlačenju ka drugom telu u istom tom odnosu. Q.E.D.

Kor. 1. Prema tome, ako sile privlačenja čestica, pri povećavanju rastojanja privučenih čestica, opadaju proporcionalno sa bilo kojim stepenom rastojanja, onda će ubrzavajuća privlačenja ka tim

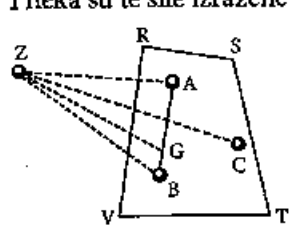
telima biti direktno proporcionalna sa telima, a obrnuto proporcionalna sa tim stepenima rastojanja. Ako sile čestica opadaju proporcionalno sa kvadratom rastojanja od privučenih čestica i ako su tela proporcionalna sa A^3 i B^3, pa su zbog toga i kubne strane tela i rastojanja privučenih čestica od tela, proporcionalne sa A i B, onda će ubrzavajuća privlačenja ka telima biti proporcionalna sa $\frac{A'}{A^2}$ i $\frac{B'}{B^2}$, tj., sa A i B, kubnim stranama tih tela. Ako sile čestica opadaju proporcionalno sa kubnim rastojanjem od privučenih čestica, ubrzavajuća privlačenja ka celim telima biće proporcionalna sa $\frac{A'}{A^3}$ i $\frac{B'}{B^3}$, tj., biće jednaka. Ako sile opadaju proporcionalno sa četvrtim stepenom rastojanja, privlačenja ka celim telima biće proporcionalna sa $\frac{A'}{A^4}$ i $\frac{B'}{B^4}$, tj., obrnuto proporcionalna sa kubnim stranama A i B. Isto tako nalazimo i u drugim slučajevima.

Kor. 2. S druge strane, iz sila pomoću kojih slična tela privlače čestice na sličan način smeštene, može se dobiti odnos opadanja sila privlačenja čestica prilikom udaljavanja privučenih čestica od njih; i ako je tako, onda je opadanje ili direktno ili obrnuto proporcionalno sa bilo kojim stepenom rastojanja.

PROPOZICIJA LXXXVIII. TEOREMA XLV

Ako su sile privlačenja jednakih čestica bilo kog tela proporcionalne sa rastojanjem mesta od čestica, onda će sila celog tela težiti ka svom centru gravitacije i biće jednaka sa silom lopte, koja se sastoji iz slične i jednake materije, a čiji se centar nalazi u centru gravitacije.

Neka čestice A i B tela RSTV privlače bilo koju česticu Z silom koja je, pod pretpostavkom da su čestice međusobno jednake, proporcionalna sa rastojanjima AZ i BZ. Međutim, ako čestice nisu međusobno jednake, onda je sila proporcionalna sa tim česticama i njihovim rastojanjima AZ i BZ zajedno, ili (ako mogu tako reći) sa proizvodom tih čestica i gorepomenutih rastojanja AZ i BZ. I neka su te sile izražene samim tim proizvodima A × AZ i B × BZ.



Spojićemo AB i neka je ta prava presečena u tački G tako da se AG prema BG može odnositi kao čestica B prema čestici A. Onda će G biti zajednički centar gravitacije čestica A i B. Sila A × AZ će se (prema Kor. 2 Zakona) razložiti na

sile A × GZ i A × AG, a sila B × RZ na sile B × GZ i B × BG. Pošto su sile A × AG i B × BG jednake, jer je A proporcionalno sa B i BG proporcionalno sa AG, i pošto su suprotnog smera, one se međusobno poništavaju. Preostaju sile A × GZ i B × GZ. One teže iz Z prema centru G i sačinjavaju silu (A + B) × GZ, tj., takvu silu kao kad bi privlačne čestice A i B bile smeštene u njihovom centru gravitacije G, obrazujući tu malu loptu.

Takvim rasuđivanjem, ako se doda treća čestica C i ako se njena sila sastoji iz sile (A + B) × GZ koja teži prema centru G, onda će sila koja odatle proističe težiti prema zajedničkom centru gravitacije te lopte u G i te čestice C, tj., prema zajedničkom centru gravitacije tri čestice A, B i C, i biće ista, ako bi ta lopta i čestica C bili smešteni u tom zajedničkom centru, obrazujući tako veću loptu; tako možemo nastaviti *in infinitum*. Prema tome, celokupna sila svih čestica bilo kog tela RSTV biće takva, ako tom telu, bez otklanjanja njegovog centra gravitacije, damo oblik lopte. Q.E.D.

Kor. Odatle sledi da će kretanje privučenog tela Z biti isto ako bi privlačno telo RSTV bilo sferno, a ako bi to privlačno telo bilo ili u stanju mirovanja ili ako bi se kretalo ravnomerno pravolinijski, onda bi se privučeno telo kretalo po elipsi i njegov centar bi bio u centru gravitacije privlačnog tela.

PROPOZICIJA LXXXIX. TEOREMA XLVI

Ako postoji nekoliko tela koja se sastoje iz jednakih čestica čije sile su proporcionalne sa rastojanjima do mesta svake od njih, onda će sila koja se sastoji od svih sila pomoću kojih je bilo koja čestica privučena, težiti ka zajedničkom centru gravitacije privlačnih tela; sila bi bila ista kao kada bi se ta privlačna tela, sa njihovim očuvanim zajedničkim centrom gravitacije, sjedinila i tako oblikovala loptu.

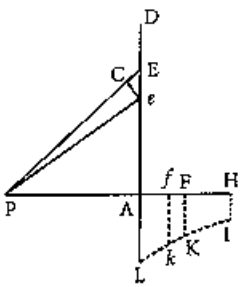
Ova Propozicija može se dokazati na isti način kao i prethodna.

Kor. Zbog toga će kretanje privučenog tela biti isto kao kada bi se privlačna tela, sa njihovim očuvanim zajedničkim centrom gravitacije, sjedinila i tako oblikovala loptu. I, prema tome, ako je zajednički centar gravitacije privlačnih tela ili u stanju mirovanja ili se kreće ravnomerno pravolinijski, onda će se privučeno telo kretati po elipsi i njegov centar bi bio u zajedničkom centru gravitacije privlačnih tela.

PROPOZICIJA XC. PROBLEM XLIV

Ako prema nekoliko tačaka bilo kog kruga teže jednake centripetalne sile, koje se ili povećavaju ili opadaju u zavisnosti od rastojanja, onda je neophodno pronaći silu koja privlači česticu i koja je smeštena bilo gde na pravoj liniji koja se nalazi pod pravim uglovima u odnosu na ravan tog kruga u njegovom centru.

Pretpostavimo da je krug opisan oko centra A sa bilo kojim poluprečnikom AD u ravni u odnosu na koju je prava linija AP



normalna i neka je neophodno pronaći silu kojom je čestica P privučena prema tom krugu. Neka je prava linija PE povučena iz bilo koje tačke E na krugu prema privučenoj čestici P. Na pravoj liniji PA uzmimo da je PF jednaka sa PE i neka je normala FK, koja je podignuta u tački F, proporcionalna sa silom kojom tačka E privlači česticu P. Neka je kriva linija IKL položaj tačke K i neka ta kriva linija seče ravan kruga u tački L. Na liniji PA uzmimo da je PH jednaka sa PD i ako podignemo normalu HI koja seče tu krivu u tački I, onda će privlačenja čestice P prema krugu biti proporcionalno sa proizvodom površine AHIL na visini AP. Q.E.I.

Na AE neka je uzeta veoma mala linija E*e*. Spojićemo P*e*, a na PE, PA uzmimo da su PC, P*f* jednaki sa P*e*. Pošto je pretpostavljeno da je FK proporcionalna sa silom, kojom bilo koja tačka E na prstenu opisanom oko centra A sa intervalom AP u navedenoj ravni privlači ka sebi telo P, pa je, zbog toga, sila kojom ta tačka privlači telo P ka A proporcionalna sa $\frac{AP \times FK}{PE}$, a sila, kojom ceo prsten privlači telo P ka A, proporcionalna je sa prstenom i $\frac{AP \times FK}{PE}$ zajedno, a taj prsten je, takođe, proporcionalan sa pravougaonikom pod poluprečnikom AE i širinom E*e*, dok je taj pravougaonik (pošto su PE i AE, kao i E*e* i CE proporcionalni), jednak sa pravougaonikom PE × CE ili PE × F*f* – sila, kojom taj prsten privlači telo P ka A, biće proporcionalna sa PE × F*f* i $\frac{AP \times FK}{PE}$ zajedno, tj., sa sadržajem pod F*f* × F*k* × AP, ili sa površinom FK*kf* prevučenom po dužini AP. Prema tome, zbir svih sila kojima svi prstenovi, na krugu opisanom oko centra A sa intervalom AD, privlače telo P

prema A, proporcionalan je sa celom površinom AHIKL pomnoženom sa dužinom AP. Q.E.D.

Kor. 1. Stoga, ako sile tačaka opadaju sa kvadratom rastojanja, tj., ako je FK jednako sa $\frac{1}{PF^2}$, pa je zato površina AHIKL jednaka sa $\frac{1}{PA} - \frac{1}{PH}$, onda će privlačenje čestice P prema krugu biti proporcionalno sa $1 - \frac{PA}{PH}$, tj., sa $\frac{AH}{PH}$.

Kor. 2. I uopšte, ako su sile tačaka na rastojanjima D obrnuto proporcionalne sa bilo kojim stepenom D^n rastojanja, tj., ako je FK proporcionalno sa $\frac{1}{D^n}$, pa je zato površina AHIKL proporcionalna sa $\frac{1}{PA^{n-1}} - \frac{1}{PH^{n-1}}$, onda će privlačenje čestice P ka krugu biti proporcionalno sa $\frac{1}{PA^{n-1}} - \frac{PA}{PH^{n-1}}$.

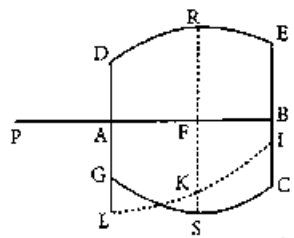
Kor. 3. Ako se prečnik kruga poveća *in infinitum*, i ako je broj *n* veći od jedinice u tom će slučaju privlačenje čestice P ka celokupnoj beskonačnoj ravni biti obrnuto proporcionalno sa PA^{n-2}, jer drugi član $\frac{PA}{PH^{n-1}}$ nestaje.

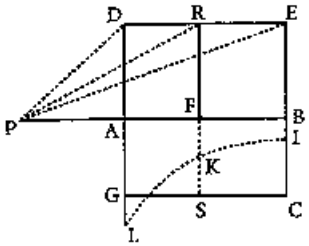
PROPOZICIJA XCI. PROBLEM XLV

Pronaći privlačenje čestice, koja je smeštena na osi okruglog tela, kada prema nekoliko njegovih tačaka teže jednake centripetalne sile koje opadaju sa bilo kojim stepenom rastojanja.

Neka je čestica P, koja je smeštena na osi AB čvrstog tela DECG, privučena ka tom telu. Neka to telo seče bilo koji krug, recimo RFS, normalno u odnosu na osu i neka je na poluprečniku FS, u bilo kojoj ravni PALKB koja prolazi kroz osu, uzeta (prema Prop. XC) dužina FK proporcionalna sa silom kojom je čestica P privučena ka tom krugu. Neka položaj tačke K bude kriva linija LKI, koja dodiruje ravni krajnjih krugova AL i BI u tačkama L i I, pa će tada privlačenje čestice P prema čvrstom telu biti proporcionalno sa površinom LABI. Q.E.I.

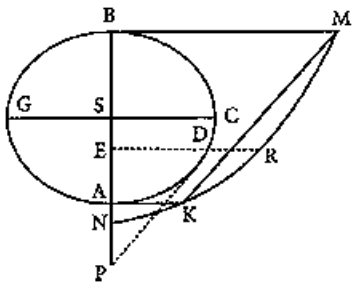
Kor. 1. Prema tome, ako je čvrsto telo cilindar, koji je opisan paralelogramom ADEB koji kruži oko ose AB, i ako su centripetalne sile, koje teže ka nekoliko tačaka, obrnuto proporcionalne sa kvadratima rastojanja od tačaka, privlačenje čestice P prema ovom cilindru biće proporcionalno sa AB – PE + PD. A ordinata FK će biti (prema Kor. 1, Prop. XC) proporcionalna sa $1 - \frac{PF}{PR}$. Prvi deo 1 ove veličine





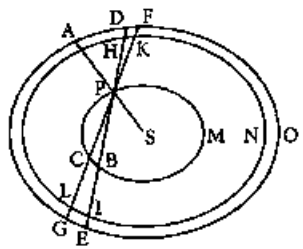
prevučen po dužini AB opisuje površinu 1 × AB, a drugi deo $\frac{PF}{PR}$ prevučen po dužini PB opisuje površinu 1 × (PE – AD) kao što lako može biti pokazano iz kvadrature krive LKI; na sličan način, isti deo prevučen po dužini PA opisuje površinu 1 × (PD – AD), a kad je prevučen po dužini AB, onda razlika od PB i PA opisuje 1 × (PE – PD), razliku površina. Ako od prvog sadržaja 1 × AB oduzmemo poslednji sadržaj 1 × (PE – PD), ostaće površina LABI jednaka sa 1 × (AB – PE + PD). Zbog toga je sila, pošto je proporcionalna sa ovom površinom, jednaka sa AB – PE + PD.

Kor. 2. Takođe je poznata i sila kojom sferoid AGBC privlači bilo koje telo P spoljašnje smešteno na njegovoj osi AB. Neka je



NKRM konusni presek čija ordinata ER, koja je normalna na PE, može uvek biti jednaka sa dužinom linije PD, neprekidno povučenom do tačke D u kojoj ta ordinata seče sferoid. Iz vrhova A i B sferoida neka su do ose AB podignute normale AK i BM, jednake sa AP i BP, tim redom i spojićemo KM, odsecajući segment KMRK. Neka je S centar sferoida, a SC njegov najveći poluprečnik. Tada će se sila kojom sferoid privlači telo P odnositi prema sili kojom sfera, koja je opisana sa prečnikom AB, privlači isto telo kao što se $\frac{AS \times CS^2 - PS \times KMRK}{PS^2 + CS^2 - AS^2}$ odnosi prema $\frac{AS^3}{3PS^2}$. Proračunima zasnovanim na istim principima mogu se pronaći sile segmenata sferoida.

Kor. 3. Ako je čestica smeštena unutar sferoida i na njegovoj osi, onda će privlačenje biti proporcionalno sa njenim rastojanjem od centra. To se može lako zaključiti ukoliko se uzme u obzir činjenica da li se čestica nalazi na osi ili na bilo kom datom prečniku. Neka je AGOF privlačeći sferoid, S njegov centar, a P telo koje je privučeno. Neka su kroz telo P povučeni poluprečnik SPA i dve prave linije DE i FG koje seku sferoid u tačkama D i E, F i G i neka su



PCM i HLN površine dva unutrašnja sferoida koje su jednake i koncentrične sa spoljašnjom, od kojih prva prolazi kroz telo P i seče prave linije DE, FG u B i C, a druga seče iste prave linije u H i I, K i L. Ako sferoidi imaju jednu zajedničku osu, delovi pravih linija, koje su presečene na obe strane DP i BE, FP i CG, DH i IE, FK i LG, biće međusobno jednake, jer su prave linije DE, PB i HI prepolovljene u istoj tački, a takođe i prave linije FG, PC i KL. Zamislimo da DPF i EPG predstavljaju suprotne konuse opisane beskonačno malim vertikalnim uglovima DPF i EPG, kao i da su linije DH i EI beskonačno male. Onda će se, usled jednakosti linija DH i EI, delovi konusa DHKF i GLIE, koji su isečeni sferoidnim površinama, međusobno odnositi kao kvadrati rastojanja od tela P i zbog toga će jednako privlačiti česticu. Sličnim rasuđivanjem, ako su mesta DPF i EGCB podeljena na delove površinama bezbrojnih sličnih sferoida koji su koncentrični u odnosu na prethodni i koje imaju jednu zajedničku osu, onda će svi ti delovi sa obe strane jednako privlačiti telo P prema suprotnim delovima. Stoga su sile konusa DPF i konusnog segmenta EGCB jednake i međusobno se poništavaju usled njihove suprotnosti. A slučaj je isti u vezi sa silama svih materija koje su smeštene van unutrašnjeg sferoida PCBM. Prema tome, telo P je privučeno samo unutrašnjim sferoidom PCBM i zato se (prema Kor. 3 Prop. LXXII) njegovo privlačenje odnosi prema sili, kojom je telo A privučeno celom sferoidom AGOD, kao što se rastojanje PS odnosi prema rastojanju AS. Q.E.D.

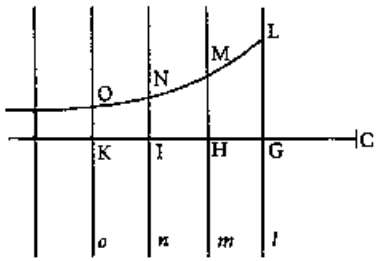
PROPOZICIJA XCII. PROBLEM XLVI

Pošto je dato privučeno telo, neophodno je pronaći stepen opadanja centripetalnih sila koje teže ka nekoliko njegovih tačaka.

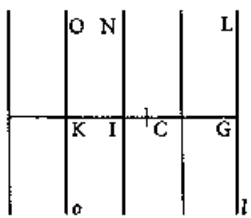
Dato telo mora oblikovati sferu, cilindar, ili neku pravilnu figuru čiji se zakoni privlačenja, koji odgovaraju bilo kom stepenu opadanja, mogu pronaći pomoću Prop. LXXX, LXXXI i XCI. Onda se, eksperimentima, moraju pronaći sile privlačenja na nekoliko različitih rastojanja, a iz zakona privlačenja prema celom telu, koji je poznat, izvodi se traženi stepen opadanja sila iz nekoliko njegovih delova.

PROPOZICIJA XCIII. TEOREMA XLVII

Ako je telo s jedne strane ravan, a na svim drugim stranama beskonačno produženo, i ako se sastoji iz jednakih čestica koje jednako privlače, i čije sile, pri udaljavanju od tela, opadaju proporcionalno sa bilo kojim stepenom koji je veći od kvadrata rastojanja, i ako je čestica, smeštena prema bilo kom delu ravni, privučena silom celog tela – tvrdim da će sila privlačenja celog tela, pri udaljavanju od njegove površine, opadati proporcionalno sa stepenom rastojanja čestice od ravni i sa indeksom koji je za 3 manji od indeksa stepena rastojanja.



Slučaj 1. Neka je LG*l* ravan kojom je ograničeno telo. Neka se telo nalazi na onoj strani ravni koja je okrenuta prema I i neka je podeljeno na bezbrojne ravni *m*HM, *n*IN, *o*KO, itd. paralelne sa GL. Neka je, na početku, privučeno telo C smešteno van tela. Neka je povučena prava CGHI normalna u odnosu na te bezbrojne ravni i neka sile privlačenja tačaka tela opadaju u odnosu bilo kog stepena rastojanja čiji indeks je broj n koji nije manji od 3. Zbog toga je (prema Kor. 3 Prop. XC) sila kojom bilo koja ravan *m*HM privlači tačku C obrnuto proporcionalna sa CH^{n-2}. Ako u ravni *m*HM uzmemo da je dužina HM obrnuto proporcionalna sa CH^{n-2}, onda će sila biti proporcionalna sa HM. Na sličan način, ako u nekoliko ravni *l*GL, *n*IN, *o*KO, itd. uzmemo da su dužine GL, IN, KO, itd. obrnuto proporcionalne sa CG^{n-2}, CI^{n-2}, CK^{n-2}, itd., onda će sile tih ravni biti proporcionalne sa tim dužinama, pa će zbir sila biti proporcionalan sa zbirom dužina, tj., sila celog tela biće proporcionalna sa površinom GLOK koja je beskonačno produžena prema OK. Međutim, ta površina je (prema poznatim metodama kvadratura) obrnuto proporcionalna sa CG^{n-3}, pa je zato sila celog tela obrnuto proporcionalna sa CG^{n-3}. Q.E.D.



Slučaj 2. Sada, neka je čestica C smeštena na toj strani ravni *l*GL koja se nalazi van tela i neka je rastojanje CK jednako sa rastojanjem CG. U tom slučaju deo tela LG*l*oKO, koje je ograničeno paralelnim ravnima *l*GL i *o*KO, neće privući česticu C, smeštenu u sredini, na ovaj ili onaj način, jer će se suprotne akcije suprotnih tačaka međusobno poništiti zbog njihove jednakosti. Zbog toga je čestica C privučena samo silom tela koje je smešteno izvan ravni OK. Ta sila je (prema Slučaju 1) obrnuto proporcionalna sa CK^{n-3}, tj., pošto su CG i CK jednaki, ona je obrnuto proporcionalna sa CK^{n-3}. Q.E.D.

Kor. 1. Prema tome, ako je telo LGIN ograničeno sa obe strane sa dve beskonačne paralelne ravni LG i IN, njegova sila privlačenja je poznata onda kada od sile privlačenja celog beskonačnog tela LGKO oduzmemo silu privlačenja udaljenog dela NIKO koji je beskonačno produžen prema KO.

Kor. 2. Ako je udaljeni deo odbačen, jer je njegovo privlačenje beznačajno u poređenju sa privlačenjem bližeg dela, tada će privlačenje tog bližeg dela, pri povećavanju rastojanja, opadati približno sa stepenom CG^{n-3}.

Kor. 3. Stoga, ako bilo koje konačno telo, s jedne strane ograničeno sa ravni, privlači česticu koja je smeštena u oblasti blizu sredine te ravni, i ako je rastojanje čestice i ravni izuzetno malo u poređenju sa dimenzijama privlačnog tela, i ako se privlačno telo sastoji iz homogenih čestica čije sile privlačenja opadaju proporcionalno sa bilo kojim stepenom rastojanja koji je veći od četvrtog stepena, tada će sila privlačenja celog tela opadati približno proporcionalno sa stepenom gorenavedenog izuzetno malog rastojanja i čiji je indeks manji za 3 od indeksa prethodnog stepena. Međutim, ova tvrdnja ne odnosi se na telo koje se sastoji iz čestica čije sile privlačenja opadaju u odnosu kubnog stepena rastojanja, jer je, u tom slučaju, privlačenje udaljenijeg dela neograničenog tela, iz Korolara 2, uvek beskonačno veće od privlačenja bližeg dela.

SHOLIJA

Ako je telo privučeno normalno u odnosu na datu ravan i ako je neophodno pronaći kretanje tela iz datog zakona privlačenja, onda će Problem biti rešen tako što će se potražiti (pomoću Prop. XXXIX) kretanje tela koje pada pravolinijski prema toj ravni i, zatim, slaganjem (pomoću Kor. 2 Zakona) tog kretanja sa ravnomernim kretanjem koje se izvodi u pravcu linija koje su paralelne sa tom ravni. Nasuprot tome, ako je neophodno pronaći zakon pri-

vlačenja koja teže prema ravni u normalnim pravcima i koja mogu prouzrokovati da se tela kreću po bilo kojoj datoj krivoj liniji, onda će Problem biti rešen tako što će se postupati u skladu sa načinom iz Problema III.

Međutim, operacije se mogu pojednostaviti razlaganjem ordinata na konvergovane nizove. Ako na bazu A ordinatno primenimo dužinu B pod bilo kojim datim uglom, i ako je ta dužina proporcionalna sa bilo kojim stepenom baze $A^{\frac{m}{n}}$, i ako je potrebno potražiti silu kojom telo, koje je ili privučeno prema bazi ili se odvodi od nje u pravcu te ordinate, može da se kreće po krivoj liniji koju ta ordinata uvek opisuje svojim krajevima – onda pretpostavljam da je baza povećana veoma malim delom O, pa razlažem ordinatu $(A+O)^{\frac{m}{n}}$ na beskonačne nizove $A^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} OA^{\frac{m-n}{n}} + \frac{mm-mn}{2nn} OOA^{\frac{m-2n}{n}}$ itd. i pretpostavljam da je sila proporcionalna sa članom ovih nizova u kome je O na drugom stepenu, tj. sa članom $\frac{mm-mn}{2nn} OOA^{\frac{m-2n}{n}}$. Prema tome, tražena sila je proporcionalna sa $\frac{mm-mn}{2nn} A^{\frac{m-2n}{n}}$, ili, što je isto, sa $\frac{mm-mn}{nn} B^{\frac{m-2n}{m}}$. Ako ordinata opisuje parabolu i ako je $m = 2$, a $n = 1$, onda će sila biti proporcionalna sa datom veličinom $2B^0$, te je stoga ta sila poznata. Prema tome, delovanjem date sile telo će se kretati po paraboli, kao što je Galilej i dokazao. Ako ordinata opisuje hiperbolu, i ako je $m = 0 - 1$, a $n = 1$, sila će biti proporcionalna sa $2A^{-3}$ ili $2B^3$; stoga, kada je sila proporcionalna sa ordinatom na kub, telo će se kretati po hiperboli. Izostavljajući ovakve vrste propozicija, preći ću na neke druge koje se tiču kretanja kojima se do sada nisam bavio.

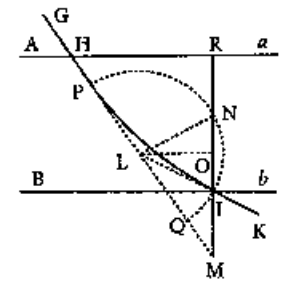
ODELJAK XIV

O kretanju veoma malih tela koja, pod dejstvom centripetalnih sila, teže ka nekoliko delova bilo kog veoma velikog tela

PROPOZICIJA XCIV. TEOREMA XLVIII

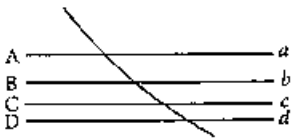
Ako su dve slične sredine međusobno razdvojene prostorom koji je ograničen paralelnim ravnima i ako je telo tokom prolaska kroz taj prostor privučeno ili podstaknuto normalno prema bilo kojoj od tih sredina, a da na njega ne deluje niti ga ometa bilo koja druga sila, i ako su privlačenja svugde ista na

jednakim rastojanjima od bilo koje od tih ravni, uzete prema istoj strani ravni – tvrdim da će se sinus incidencije na jednoj od ravni nalaziti u datom odnosu sa sinusom emergencije iz druge ravni.



Slučaj 1. Neka su A*a* i B*b* dve paralelne ravni i neka se telo spušta na prvu ravan A*a* u pravcu linije GH; neka je tokom celokupnog prelaska kroz središnji prostor privučeno ili podstaknuto prema sredini incidencije, tako da tim delovanjem opisuje krivu liniju HI i neka izlazi u pravcu linije IK. Neka je tamo podignuta IM, normalno u odnosu na B*b* ravan emergencije, koja seče liniju incidencije GH produženu u M, a ravan incidencije A*a* u R, neka je linija emergencije KI produžena i neka seče HM u L. Oko centra L, sa intervalom LI, neka je opisan krug koji seče HM u P i Q, a produžetak MI u tački N; ako je, na početku, pretpostavljeno da su privlačenje ili impuls ravnomerni, onda će kriva HI (prema onome što je Galilej dokazao) biti parabola, čije je svojstvo takvo da su pravougaonik pod datim žižnim parametrom i linija IM jednaki sa HM^2; štaviše, linija HM biće prepolovljena u L. Ako iz L do MI pustimo da padne normala LO, onda će MO i OR biti jednaki, a ako njima dodamo jednake linije ON i OI, onda će celine MN i IR takođe biti jednake. Pošto je IR data, poznata je i MN, pa je dat i odnos pravougaonika NMI i pavougaonika pod žižnim parametrom i IM, tj., prema HM^2. Međutim, pravougaonik NMI jednak je sa pravougaonikom PMQ, tj., prema razlici kvadrata ML^2 i PL^2 ili LI^2, a HM^2 ima dat odnos sa $4ML^2$; zbog toga je dat odnos $ML^2 - LI^2$ prema ML^2, a prema konverziji odnosa LI^2 prema ML^2, kao i njegov kvadratni koren, dat je i odnos LI prema ML. Međutim, u svakom trouglu, kao što je recimo LMI, sinusi uglova proporcionalni su sa suprotnim stranama. Zbog toga je poznat odnos sinusa ugla incidencije LMR prema sinusu ugla emergencije LIR. Q.E.D.

Slučaj 2. Sad, neka telo neprekidno prolazi kroz nekoliko prostora ograničenih paralelnim linijama A*ab*B, B*bc*C, itd. i neka na njih deluje sila koja je ravnomerna u svakom prostoru, ali koja je različita u različitim prostorima; prema onome što je upravo po-

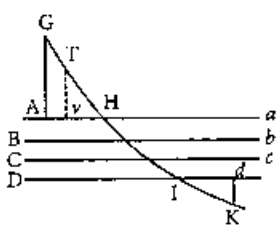


kazano, sinus ugla incidencije u prvoj ravni A*a* nalaziće se u datom odnosu sa sinusom ugla emergencije iz druge ravni B*b*, a taj sinus incidencije u drugoj ravni B*b* nalaziće se u datom odnosu sa sinusom emergencije iz treće ravni C*c*, dok će sinus prema sinusu emergencije iz četvrte ravni biti u datom odnosu i tako dalje *in infinitum*. Prema jednakosti, sinus incidencije u prvoj ravni nalazi se u datom odnosu prema sinusu emergencije iz poslednje ravni. Sada, neka su intervali ravni umanjeni, a neka je njihov broj beskonačno uvećan, tako da delovanje privlačenja ili impulsa, koje se vrši prema bilo kom određenom zakonu, može postati neprekidno, pa će odnos sinusa incidencije na prvu ravan i sinusa emergencije iz poslednje ravni, pošto su poznati, takođe biti poznat. Q.E.D.

PROPOZICIJA XCV. TEOREMA XLIX

Prema istim pretpostavkama, tvrdim da se brzina tela pre incidencije odnosi prema njegovoj brzini posle emergencije kao što se sinus emergencije odnosi prema sinusu incidencije.

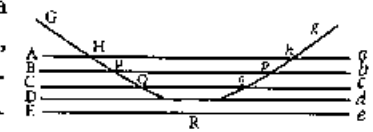
Uzmimo da su AH i I*d* jednaki i podignimo normale AG i *d*K koje seku linije incidencije i emergencije GH i IK u G i K. Na GH uzmimo da je TH jednako sa IK i na ravan A*a* pustimo da padne normala Tv. Prema Kor. 2 Zakona kretanja, neka je kretanje tela razloženo na dva, jedno normalno u odnosu na ravni A*a*, B*b*, C*c*, itd., a drugo paralelno sa njima. Sila privlačenja ili impuls, koja deluje u smeru normalnim sa tim ravnima, neće uopšte promeniti kretanje u paralelnim pravcima i zbog toga će telo, koje nastavlja sa svojim kretanjem, u jednakim vremenima proći kroz jednake paralelne intervale koji leže između linija AG i tačke H i između tačke I i linije *d*K, tj., opisaće linije GH i IK u jednakim vremenima. Zbog toga se brzina pre incidencije odnosi prema brzini posle emergencije kao što se GH odnosi prema IK ili TH, tj., kao AH ili I*d* prema vH, tj. (ako pretpostavimo da su TH ili IK poluprečnici) kao sinus emergencije prema sinusu incidencije. Q.E.D.



PROPOZICIJA XCVI. TEOREMA L

Prema istim pretpostavkama kao i prema tome da je kretanje pre incidencije brže od kretanja posle incidencije, tvrdim da će telo, ako je linija incidencije neprekidno nagnuta, na kraju biti odbijeno i da će ugao odbijanja biti isti sa uglom incidencije.

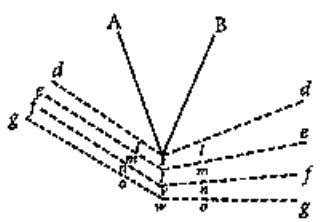
Zamislimo da telo, koje prolazi između paralelnih ravni A*a*, B*b*, C*c* itd., opisuje parabolične lukove kao što je gore navedeno i neka su ti lukovi HP, PQ, QR, itd. Neka je nagnutost linije incidencije GH u prvoj ravni A*a* takva da sinus incidencije prema poluprečniku kruga, čiji je on sinus, može biti u istom odnosu kao što je odnos tog sinusa incidencije prema sinusu emergencije iz ravni D*d* u prostor D*d*eE i pošto je sada sinus emergencije postao jednak sa poluprečnikom, onda će ugao emergencije biti prav ugao, pa će se linija emergencije poklapati sa ravni D*d*. Neka telo dosegne ovu ravan u tački R i pošto se linija emergencije poklapa sa tom ravni, očigledno je da telo ne može nastaviti dalje prema ravni E*e*. Međutim, ono ne može produžiti dalje ni na liniji emergencije R*d*, jer je neprekidno privučena ili podstaknuta prema sredini incidencije. Ono će se, zbog toga, vratiti između ravni C*c* i D*d* opisujući luk parabole QR*q*, čije se teme (prema onome što je Galilej dokazao) nalazi u R, presecajući ravan C*c* pod istim uglom u *q*, kao što je ranije presecao u Q; zatim, krećući se po paraboličnim lukovima *qp*, *ph* itd., koji su slični i jednaki sa prethodnim lukovima QP, PH, itd., preseći će ostale ravni pod istim uglovima u *p*, *h*, itd. kao i ranije u P, H itd. i na kraju će se pojaviti sa istom nagnutošću u *h* sa kojom se na početku sudarila sa tom ravni u H. Zamislimo sada da su intervali ravni A*a*, B*b*, C*c*, D*d*, E*e* itd. beskonačno umanjeni, a da je broj beskonačno uvećan, tako da delovanje privlačenja ili impulsa, koje se vrši prema bilo kom određenom zakonu, može postati neprekidno – onda će, na kraju, ugao emergencije ostati uvek isti sa uglom incidencije. Q.E.D.



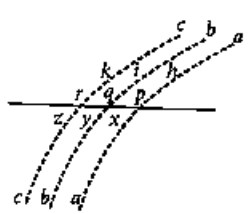
SHOLIJA

Ova privlačenja imaju veliku sličnost sa odbijanjem i prelamanjem svetlosti koji su u datom odnosu sečica, kao što je otkrio

Snelijus (W. Snellius) a potom i u datom odnosu sinusa, kao što je izložio Dekart (R. Descartes). Iz pojava Jupiterovih satelita i iz posmatranja mnogih astronoma, sada je izvesno da se svetlost postepeno rasprostire i da joj je potrebno sedam ili osam minuta da pređe od Sunca do Zemlje. Štaviše, zraci svetlosti koji se nalaze u našem vazduhu (kao što je nedavno otkrio Grimaldi [Grimaldus] puštanjem svetlosti u tamnu prostoriju kroz malu rupu, što sam takođe i ja probao) tokom prolaska u blizini uglova tela, bilo da su providna ili neprovidna (kao što su okrugle ili pravougaone ivice zlata, srebra ili metalnih novčića, ili noževa, ili polomljenih delova kamena ili stakla) savijeni su oko tih tela tako kao da su privučeni prema njima, a oni zraci, koji se tokom prolaska najviše približe telima, najviše su savijeni tako da izgleda kao da su najviše privučeni, što sam takođe pažljivo posmatrao. Zraci koji prolaze na većim rastojanjima, najmanje su savijeni, a oni na još većim rastojanjima malo su savijeni na suprotnu stranu i formiraju tri trake boja. Neka figura *s* predstavlja oštricu noža ili bilo koju drugu vrstu



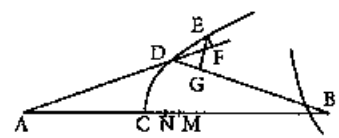
klina AsB i neka su *gowog*, *fnunf*, *emtme*, *dlsld* zraci koji su savijeni prema nožu u lukovima *owo*, *nvn*, *mtm*, *lsl* čije je savijanje veće ili manje s obzirom na njihovo rastojanje od noža. Pošto je ovo savijanje zrakova izvedeno u vazduhu bez noža, sledi da su zraci koji padaju na nož prvo savijeni u vazduhu i pre nego što su dotakli nož. Slučaj je isti u vezi sa zrakovima koji padaju na staklo. Prelamanje, zbog toga, nije načinjeno u tački incidencije, već postepeno, neprekidnim savijanjem zrakova, koje je učinjeno delimično u vazduhu pre nego što dodirnu staklo, a delimično unutar stakla (ukoliko ne grešim) posle ulaska zraka u staklo, kao što je predstavljeno zracima *ckzc*, *biyb*, *ahxa*, koji padaju na *r*, *q*, *p* i koji su savijeni između *k* i *z*, *i* i *y*, *h* i *x*. Zbog sličnosti između rasprostiranja zrakova svetlosti i kretanja tela, mislio sam da nije pogrešno dodati naredne propozicije za optičke svrhe, a koje se uopšte ne tiču prirode zrakova svetlosti, ili ispitivanja u vezi sa tim da li su oni tela ili ne, već se tiču određivanja putanja tela koja izuzetno podsećaju na putanje zrakova.



PROPOZICIJA XCVII. PROBLEM XLVII

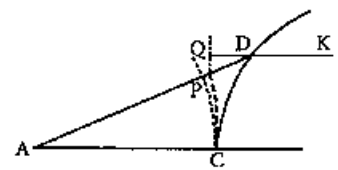
Ako pretpostavimo da je sinus incidencije na bilo kojoj površini u datom odnosu sa sinusom emergencije i da je savijanje puteva onih tela u blizini tih površina izvedeno u veoma kratkom prostoru, koji se može smatrati tačkom – onda je neophodno odrediti takvu površinu koja bi mogla uzrokovati da se sve čestice, koje proizlaze iz bilo kog datog mesta, konverguju u drugom datom mestu.

Neka je A mesto iz kog se čestice odvajaju, a B mesto gde bi one trebalo da se konverguju. Neka je CDE kriva linija koja svojom revolucijom oko ose AB opisuje traženu površinu. Neka su D i E bilo koje dve tačke te krive, a EF, EG normale koje padaju na puteve tela AD i DB. Neka tačka D prilazi tački E i neka se poklapa sa njom. Tada će krajnji odnos linije DF, kojom je AD povećana, prema liniji DG, kojom je DB umanjena, biti isti kao i odnos sinusa incidencije prema sinusu emergencije. Prema tome, dat je odnos povećanja linije AD prema umanjenju linije DB i ako je bilo gde na osi AB uzeta tačka C kroz koju mora proći kriva CDE, i ako je CM, povećanje od AC, uzeto u tom datom odnosu prema CN, umanjenje od BC, i ako su iz centara A i B, sa intervalima AM i BN, opisana dva kruga koja se međusobno seku u D – onda će ta tačka D dodirnuti traženu krivu CDE i to dodirivanje na bilo kom proizvoljnom mestu, odrediće tu krivu. Q.E.I.



Kor. 1. Ukoliko se tačke A ili B udaljavaju ponekad *in infinitum*, a ponekad se kreću prema drugim delovima tačke C, dobićemo sve one figure koje je Dekart (Cartesius) izložio u svojoj *Optici* i *Geometriji*, a koje se tiču prelamanja. Metod pronalaženja tih figura Dekart je smatrao podesnim za skrivanje, a u ovoj Propoziciji on je otvoreno izložen.

Kor. 2. Ako bi telo, koje se spušta na bilo koju površinu CD, u pravcu prave linije AD, povučene prema bilo kom zakonu, trebalo da se pojavi u pravcu bilo koje druge prave linije DK i ako iz tačke C povučemo krive linije CP i CQ, koje su uvek normalne na AD i DK, onda će se povećanja linija PD i QD, a zbog

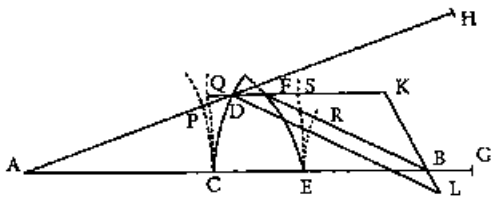


toga i samih linija PD i QD, koje su stvorene tim povećanjima, međusobno odnositi kao sinusi incidencije i emergencije, i *e contra*.

PROPOZICIJA XCVIII. PROBLEM XLVIII

Prema istim pretpostavkama, ako je oko ose AB opisana bilo koja privlačna površina, kao što je recimo CD, pravilna ili nepravilna i kroz koju moraju proći tela koja izlaze iz bilo kog mesta A – onda je neophodno pronaći drugu privlačnu površinu EF, koja bi mogla načiniti da se tela konverguju u datom mestu B.

Neka linija koja spaja AB seče prvu površinu u C, a drugu u E i neka je tačka D uzeta proizvoljno. Ako pretpostavimo da se odnos sinusa incidencije na prvoj površini prema sinusu emergencije iz iste te površine, kao i odnos sinusa emergencije iz druge površine prema sinusu incidencije na istoj toj površini, nalaze u nekom datom odnosu veličine M prema bilo kojoj drugoj datoj veličini N i



ukoliko produžimo AB do G, tako da se BG prema CE može odnositi kao M – N prema N, a AD prema H, tako da AH može biti jednako sa AG, a DF prema K, tako da se DK može odnositi prema DH kao N prema M. Ako spojimo KB i oko centra D, sa intervalom DH, opišemo krug koji seče KB produženu u L i ukoliko povučemo BF paralelno sa DL – u tom će slučaju tačka F dodirnuti liniju EF, koja će, pošto je okrenuta oko ose AB, opisati tražene površine. Q.E.F.

Zamislimo da su linije CP i CQ svuda normalne sa AD i DF, a linije ER i ES sa FB i FD, tim redom, tako da je QS uvek jednaka sa CE. Tada će se (prema Kor. 2. Prop. XCVII) PD odnositi prema QD kao M prema N i zbog toga kao DL prema DK ili FB prema FK, divizijom kao DL – FB ili PH – PD – FB prema FD ili FQ – QD, a slaganjem kao PH – FB prema FQ, tj. (pošto su PH i CG, kao i QS i CE jednake) kao CE + BG – FR prema CE – FS. Međutim, pošto se BG prema CE odnosi kao M – N prema N, sledi takođe

da se CE + BG prema CE odnosi kao M prema N, a, prema tome, divizijom, FR se prema FS odnosi kao M prema N i zato (prema Kor. 2 Prop. XCVII), površina EF čini da se telo, koje na nju pada u pravcu DF, kreće po liniji FR do mesta B. Q.E.D.

SHOLIJA

Na isti način možemo postupati i sa tri ili više površina. Međutim, od svih oblika, sferna su najpodobnija za optičke svrhe. Ako je objektiv teleskopa sastavljen iz dva stakla sfernih oblika i ako sadrži vodu između njih, nije neverovatno da bi se greške prelamanja, načinjene na krajnjim delovima površina stakla, mogle ispraviti dovoljno precizno pomoću prelamanja vode. Takve objektive treba odabrati pre nego eliptična ili hiperbolična stakla, ne samo zato što mogu da se oblikuju sa većom lakoćom i preciznošću, već i zato što bi se snopovi zraka, koji su smešteni van ose stakla, njima preciznije prelomili. Međutim, različita prelomljivost različitih zrakova prava je prepreka koja ometa optiku u tome da bude savršena za sferne ili bilo koje druge oblike. Ako greške koje odatle proizlaze ne mogu da se isprave, sav trud utrošen na ispravljanje drugih, prilično je uzaludan.

KNJIGA II

O KRETANJU TELA

ODELJAK I

O kretanju tela na koje deluje otpor koji je proporcionalan sa brzinom

PROPOZICIJA I. TEOREMA I

Ako na telo deluje otpor koji je proporcionalan sa njegovom brzinom, onda će izgubljeno kretanje usled otpora biti proporcionalno sa prostorom koje telo pređe tim kretanjem.

Pošto je izgubljeno kretanje u svakoj jednakoj čestici vremena proporcionalno sa brzinom, tj., sa česticom prostora koje telo pređe, onda ćemo slaganjem dobiti da je izgubljeno kretanje u ukupnom vremenu proporcionalo sa ukupnim pređenim prostorom. Q.E.D.

Kor. Prema tome, ako se telo, koje je lišeno gravitacije, pokreće usled sile inercije samo po slobodnim prostorima i ako je poznato i ukupno kretanje na početku kao i kretanje koje preostaje posle određenog dela puta, onda će takođe biti poznat i ukupan prostor koji telo može opisati u beskonačnom vremenu. Jer, taj prostor se prema prostoru upravo opisanom odnosi kao ukupno kretanje na početku prema izgubljenom delu tog kretanja.

LEMA I

Veličine, proporcionalne sa svojim razlikama, neprekidno su proporcionalne.

Neka se A prema A – B odnosi kao B prema B – C i kao C prema C – D, itd., onda će se konverzijom A prema B odnositi kao B prema C i kao C prema D, itd. Q.E.D.

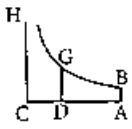
PROPOZICIJA II. TEOREMA II

Ako na telo deluje otpor proporcionalan sa njegovom brzinom, i ako se kreće u sličnoj sredini samo pomoću sile inercije, i ako su uzeta jednaka vremena, onda će brzine na početku svakog vremena biti u geometrijskoj progresiji, a prostori koji su opisani u svakom vremenu biće proporcionalni sa brzinama.

Slučaj 1. Ako je vreme podeljeno na jednake intervale i ako pretpostavimo da na početku svakog intervala otpor deluje samo sa jednim jedinim impulsom koji je proporcionalan sa brzinom, onda će opadanje brzine u svakom intervalu vremena biti proporcionalno samoj brzini. Prema tome, brzine su proporcionalne svojim razlikama, pa su zbog toga (prema Lemi I Knjige II) neprestano proporcionalne. Zato, ako se iz jednakog broja intervala sastavljaju bilo koji jednaki delovi vremena, onda će brzine na početku tih vremena biti proporcionalne sa članovima u neprekidnoj progresiji, koji su uzeti kao intervali, svugde izostavljajući jednak broj srednjih članova. Međutim, odnosi ovih članova sastavljeni su iz jednakih odnosa srednjih članova jednako ponovljenih, pa su zbog toga jednaki. Prema tome, pošto su proporcionalne sa tim članovima, brzine su u geometrijskoj progresiji. Neka su ti jednaki intervali vremena umanjeni i neka je njihov broj uvećan *in infinitum*, tako da impuls otpora može postati neprekidan, onda će brzine na počecima jednakih vremena, koja su uvek neprekidno proporcionalna, u ovom slučaju takođe biti neprekidno proporcionalne. Q.E.D.

Slučaj 2. Deljenjem, razlike brzina, tj., delova brzina izgubljenih u svakom vremenu, biće proporcionalne sa celinama; međutim, prostori opisani u svakom vremenu biće proporcionalni sa izgubljenim delovima brzina (prema Prop. I Knjige I), pa su zbog toga proporcionalni i sa celinama. Q.E.D.

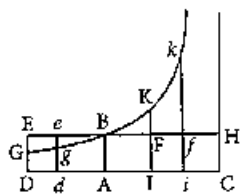
Kor. Prema tome, ako je prema pravougaonim asimptotama AC, CH opisana hiperbola BG, i ako su AB, DG povučene normalno na asimptotu AC, i ako su na samom početku kretanja i brzina tela i otpor sredine izražene pomoću bilo koje date linije AC, a



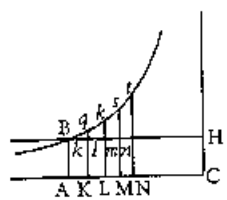
posle izvesnog vremena, pomoću neodređene linije DC, onda se vreme može izraziti površinom ABGD, a prostori opisani u tom vremenu pomoću linije AD. Jer, ako se pri kretanju tačke D, ta površina ravnomerno povećava na isti način kao i vreme, onda će se prava linija DC umanjivati u geometrijskom nizu na isti način kao i brzina, pa će i delovi prave linije AC, opisani u jednakim vremenima, opadati u istom odnosu.

PROPOZICIJA III. PROBLEM I

Definisati kretanje tela koje u sličnoj sredini ide prema gore ili prema dole po pravoj liniji, i koje doživljava otpor proporcionalno sa svojom brzinom, i na koje deluje ravnomerna sila gravitacije.



Dok se telo kreće prema gore, neka je gravitacija predstavljena bilo kojim datim pravougaonikom BACH, a neka je otpor sredine, na početku penjanja, predstavljen pravougaonikom BADE, koji je uzet sa suprotne strane prave linije AB. Kroz tačku B, sa pravougaonim asimptotama AC, CH, opisaćemo hiperbolu, koja seče normale DE, *de*, u G i *g*. Onda će telo koje se kreće prema gore u vrmenu DG*gd* opisati prostor EG*ge*, u vremenu DGBA prostor celokupnog penjanja EGB, u vremenu ABKI prostor spuštanja BFK, a u vremenu IK*ki* prostor spuštanja KF*fk*, a brzine tela (koje su proporcionalne sa otporom sredine) u ovim periodima vremena bile bi ABED, AB*ed*, O, ABFI, AB*fi*, odgovarajućim redom, a najveća brzina koju telo može dostići prilikom spuštanja biće BACH.



Ako je pravougaonik BACH podeljen na bezbrojne pravougaonike A*k*, KI, L*m*, M*n*, itd. koji bi bili proporcionalni sa povećanjem brzina stvorenih u isto toliko jednakih vremena, onda će O, A*k*, A*l*, A*m*, A*n*, itd. biti proporcionalni sa celokupnim brzinama, pa stoga (prema pretpostavci) i sa otporima sredine na početku svakog od jednakih vremena. Neka se AC prema AK, ili ABHC prema AB*k*K, odnosi kao što se sila gravitacije odnosi prema otporu na početku drugog vremena. Potom, ako iz sile gravitacije oduzmemo

otpore, onda će ABHC, K*k*HC, L*l*HC, M*m*HC, itd. biti proporcionalni sa apsolutnim silama koje su delovale na telo na početku svakog vremena, a zbog toga (prema Zakonu I) biće proporcionalni i sa povećanjima brzina, tj. sa pravougaonicima A*k*, K*l*, L*m*, M*n*, itd., pa su zato (prema Lemi I, Knjige II) oni u geometrijskoj progresiji. Zbog toga, ako su prave linije K*k*, L*l*, M*m*, N*n*, itd. produžene tako da seku hiperbolu u *q*, *r*, *s*, *t*, itd., onda će površine AB*q*K, K*qr*L, L*rs*M, M*st*N, itd. biti jednake, i zbog toga analogne jednakim vremenima i jednakim silama gravitacije. Međutim, površina AB*q*K se (prema Kor. 3 Leme VII i VIII, Knjige I) prema površini B*kq* odnosi kao K*q* prema $\frac{1}{2}$ *kq*, ili kao AC prema $\frac{1}{2}$ AK, tj., kao što se sila gravitacije odnosi prema otporu u sredini prvog vremena. Sličnim rasuđivanjem, površine *q*KL*r*, *r*LM*s*, *s*MN*t*, itd. odnose se prema površinama *qklr*, *rlms*, *smnt*, itd. kao što se sile gravitacije odnose prema otporima u sredini drugog, trećeg, četvrtog vremena, i tako dalje. Prema tome, pošto su jednake površine BAK*q*, *q*KL*r*, *r*LM*s*, *s*MN*t*, itd. analogne sa silama gravitacije, onda će površine B*kq*, *qklr*, *rlms*, *smnt*, itd. biti analogne sa otporima u sredini svakog vremena, tj. (prema pretpostavci) analogne brzinama, pa tako i opisanim prostorima. Ako uzmemo zbir analognih veličina, onda će površine B*kq*, B*lr*, B*ms*, B*nt*, itd. biti analogne celokupnim opisanim prostorima; takođe, površine AB*q*K, AB*r*L, AB*s*M, AB*t*N, itd. biće analogne vremenima. Zbog toga će telo, tokom spuštanja, u bilo kom vremenu AB*r*L opisati prostor B*lr*, a u vremenu L*r*tN opisaće prostor *rlnt*. Slično dokazivanje važi i za kretanje prema gore. Q.E.D.

Kor. 1. Prema tome, najveća brzina koju telo može dostići tokom padanja odnosi se prema brzini koja je dostignuta u bilo kom datom vremenu kao što se data sila gravitacije koja neprekidno deluje na njega odnosi prema sili otpora koja joj se suprotstavlja na kraju tog vremena.

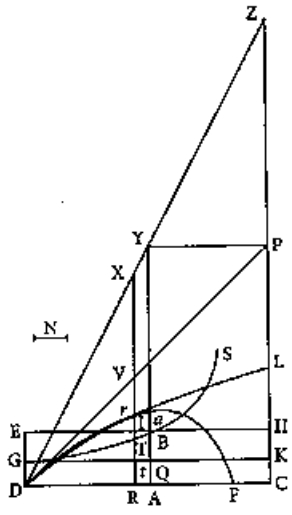
Kor. 2. Međutim, ako se vreme povećava aritmetičkom progresijom, zbir te najveće brzine i brzine tokom podizanja, kao i njihova razlika tokom padanja, opada geometrijskom preogresijom.

Kor. 3. Takođe, razlike prostora, koje su opisane u jednakim razlikama vremena, opadaju u istoj geometrijskoj progresiji.

Kor. 4. Prostor opisan telom jeste razlika dva prostora, od kojih je jedan proporcionalan sa vremenom uzetim na početku padanja, a drugi sa brzinom, a koji su (prostori) na početku padanja međusobno jednaki.

PROPOZICIJA IV. PROBLEM II

Ako pretpostavimo da je sila gravitacije u bilo kojoj sličnoj sredini ravnomerna i ako teži normalno prema ravni horizonta onda ćemo u tbj sredini definisati kretanje projektila koje trpi otpor koji je proporcionalan sa njegovom brzinom.



Neka projektil ide iz bilo kog mesta D u pravcu prave linije DP i neka se njegova brzina na početku kretanja tumači kao dužina DP. Neka se iz tačke P spusti normala PC na horizontalnu liniju DC i presecimo DC u tački A tako da se DA može odnositi prema AC kao što se otpor sredine, koji se pojavljuje iz kretanja prema gore na samom početku, odnosi prema sili gravitacije; ili, što je isto, tako da se pravougaonik stranica DA i DP može odnositi prema onom pravougaoniku stranica AC i CP kao što se celokupni otpor na početku kretanja odnosi prema sili gravitacije. Sa asimptotama DC, CP opisaćemo hiperbolu GTBS koja seče normale DG i AB u G i B; dovršićemo paralelogram DGKC i neka njegova strana GK seče AB u tački Q. Uzmimo da se linija N odnosi prema QB kao što se DC odnosi prema CP; iz bilo koje tačke R prave linije DC podignimo RT normalno u odnosu na nju, tako da seče hiperbolu u tački T, a prave linije EH, GK, DP u tačkama I, *t* i V; na toj normali uzmimo da je V*r* jednako sa $\frac{tGT}{N}$, ili (što je isto) uzmimo da je R*r* jednako sa $\frac{GTIE}{N}$; tada će, u vremenu DRTG, projektil stići do tačke *r* opisujući krivu liniju D*ra*F, koja je lokus tačke *r*, a odatle će dostići svoju najveću visinu *a* na normali AB; posle toga uvek se približava asimptoti PC. Brzina projektila u bilo kojoj tački *r* biće proporcionalna sa odnosom tangente *r*L i krive. Q.E.I.

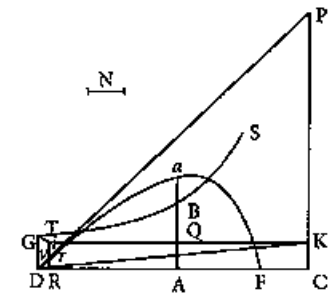
Jer N se prema QB odnosi kao DC prema CP ili kao DR prema RV, i zato je RV jednako sa $\frac{DR \times QB}{N}$, a R*r* (tj., RV – V*r*, ili $\frac{DR \times QB - tGT}{N}$) jednako je sa $\frac{DR \times AB - RDGT}{N}$. Potom, neka je vreme predstavljeno površinom RDGT i neka se (prema zakonima, Kor. 2) razlikuju dva kretanja tela – horizontalno i vertikalno. Pošto je otpor proporcionalan sa brzinom, neka je i on podeljen na dva dela koja

su proporcionalna i suprotna sa delovima kretanja: zbog toga će dužina opisana horizontalnim kretanjem biti (prema Prop. II, Knjige II) proporcionalna sa linijom DR, a visina (prema Prop. III, Knjige II) biće proporcionalna sa površinom DR × AB – RDGT, tj., sa linijom R*r*. Međutim, na samom početku kretanja, površina RDGT jednaka je sa pravougaonikom DR × AQ, pa će se zbog toga linija R*r* (ili $\frac{DR \times AB - DR \times AQ}{N}$) odnositi prema DR kao što se AB – AQ ili QB odnosi prema N, tj., kao što se CP odnosi prema DC, kao što se kretanje prema gore odnosi prema horizontalnom kretanju na samom početku. Pošto je R*r* uvek proporcionalno sa visinom, a DR sa dužinom, i pošto se R*r* prema DR na početku odnosi kao visina prema dužini, odatle sledi da se R*r* uvek odnosi prema DR kao visina prema dužini, kao i to da će se telo kretati po liniji D*ra*F, koja je lokus tačke *r*. Q.E.D.

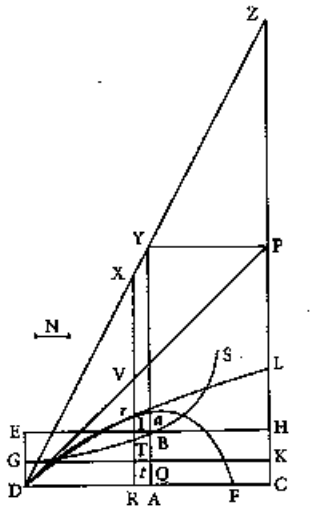
Kor. 1. Prema tome, R*r* jednaka je sa $\frac{DR \times AB}{N} - \frac{RDGT}{N}$ i ako je linija RT produžena do X tako da RX može biti jednaka sa $\frac{DR \times AB}{N}$, tj., ako je paralelogram ACPY dovršen i ako je povučena linija DY koja seče CP u Z, a RT produžena sve dok ne preseče DY u X – onda će X*r* biti jednaka sa $\frac{RDGT}{N}$ i na taj način proporcionalna sa vremenom.

Kor. 2. Ako su bezbrojne linije CR ili, što je isto, bezbrojne linije ZX uzete u geometrijskoj progresiji, onda će biti isto toliko linija X*r* u aritmetičkoj progresiji. Prema tome, kriva D*ra*F lako se može crtati pomoću logaritamske tablice.

Kor. 3. Ako pri vrhu D i prečnika DG, koji je produžen prema dole, konstruišemo parabolu čiji se žižni parametar odnosi prema 2DP kao što se celokupni otpor na početku kretanja odnosi prema sili gravitacije, tada će brzina, kojom telo treba da se kreće od mesta D u pravcu prave linije DP, tako da u ravnomernoj otpornoj sredini opisuje krivu D*ra*F, biti ista kao i ona brzina kojom telo treba da se kreće od tog istog mesta D tako da opisuje parabolu u neotpornoj sredini. Jer, na samom početku kretanja, žižni parametar ove parabole jeste $\frac{DV^2}{Vr}$, a V*r* jeste $\frac{tGT}{N}$ ili $\frac{DR \times Tt}{2N}$. Međutim, prava linija koja, ako je povučena, dodiruje hiperbolu GTS u tački G, paralelna je sa DK i zbog toga je T*t* jednako sa $\frac{CK \times DR}{DC}$, a N je jednako sa $\frac{QB \times DC}{CP}$. Prema tome, V*r* jednako je



sa $\frac{DR^2 \times CK \times CP}{2DC^2 \times QB}$, tj. (pošto su DR i DC, DV i DP proporcionalni) Vr jednako je sa $\frac{DV^2 \times CK \times CP}{2DP \times QB}$, pa je žižni parametar $\frac{DV^2}{Vr}$ jednak sa $\frac{2DP^2 \times QB}{CK \times CP}$, tj. (pošto su QB i CK, DA i AC proporcionalni) jednak je sa $\frac{2DP^2 \times DA}{AC \times CP}$, pa se zbog toga odnosi prema 2DP kao što se DP × DA odnosi prema CP × AC, tj., kao otpor prema gravitaciji. Q.E.D.



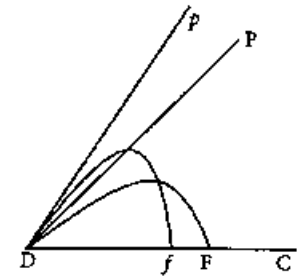
Kor. 4. Prema tome, ako je telo bačeno iz bilo kog mesta D sa datom brzinom i u pravcu prave linije DP date prema položaju, i ako je dat otpor sredine na početku kretanja, onda se može pronaći kriva D*ra*F koju to telo opisuje. Jer, kao što je dobro poznato, pošto je data brzina, dat je i žižni parametar parabole. I ako uzmemo da se 2DP prema tom žižnom parametru odnosi kao što se sila gravitacije odnosi prema sili otpora, onda je poznata i linija DP. Zatim, ako presečemo DC u A, tako da je odnos CP × AC prema DP × DA isti kao i odnos sile gravitacije prema otporu, onda će biti poznata i tačka A. Odatle je, takođe, poznata i kriva D*ra*F.

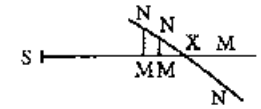
Kor. 5. Nasuprot tome, ako je kriva D*ra*F data, biće poznate i brzina tela i otpor sredine u svakom mestu *r*. Jer, pošto je dat odnos CP × AC prema DP × DA, dat je i otpor sredine na početku kretanja i žižni parametar parabole, a odatle je poznata i brzina na početku kretanja. Zatim, iz dužine tangente L poznata je i brzina koja je njoj proporcionalna, kao i otpor koji je proporcionalan sa brzinom u bilo kom mestu *r*.

Kor. 6. Međutim, pošto se dužina 2DP prema žižnom parametru parabole odnosi kao gravitacija prema otporu u tački D i pošto se pri povećanju brzine u istom odnosu povećava i otpor, s tim što se žižni parametar parabole povećava kao kvadrat brzine, onda je jasno da se dužina 2DP povećava samo u tom jednostavnom odnosu i da je zbog toga uvek proporcionalna sa brzinom, a da se neće ni povećati ni umanjiti promenom ugla CDP, osim ukoliko se ne promeni i sama brzina.

Kor. 7. Odatle sledi metod za približno određivanje krive D*ra*F fenomenološki, a potom i određivanje otpora i brzine s kojom je telo bačeno. Neka su dva slična i jednaka tela bačena s istom brzinom

iz tačke D pod različitim uglovima CDP i CD*p* i neka su poznata mesta F i *f* na kojima će ta tela pasti u horizontalnoj ravni DC. Onda, uzimajući bilo koju dužinu za DP ili D*p*, pretpostavimo da je otpor u D u bilo kom odnosu prema gravitaciji i neka je taj odnos izražen bilo kojom dužinom SM. Potom ćemo, računanjem, iz te pretpostavljene dužine DP pronaći dužine DF i D*f*, a iz odnosa $\frac{Ff}{DF}$, dobijenog računom, oduzećemo isti odnos nađen eksperimentom, i neka je razlika predstavljena normalom MN.





Ponovićemo isto to po drugi i treći put, uvek uzimajući novu vrednost SM za odnos otpora prema gravitaciji, kao i novu vrednost razlike MN. Povući ćemo pozitivne razlike na jednoj strani prave linije SM, a negativne na drugoj strani, a kroz tačke N, N, N povući ćemo pravilnu krivu NNN, koja seče pravu liniju SMMM u X, pa će onda SX predstavljati istinski odnos otpora prema gravitaciji, koji je i trebalo odrediti. Iz ovog odnosa proračunom se određuje dužina DF, a dužina, koja se prema pretpostavljenoj dužini DP odnosi kao što se dužina DF, poznata iz eksperimenta, odnosi prema upravo pronađenoj dužini DF, biće istinska dužina DP. Pošto je ovo poznato, imaćemo i krivu liniju D*ra*F koju telo opisuje kao i brzinu i otpor tela u svakom mestu.

SHOLIJA

Međutim, pretpostavka da je otpor tela proporcionalan sa brzinom više je matematička nego fizička pretpostavka. U sredinama lišenih svih tvrdoća, otpori tela proporcionalni su sa kvadratom brzina. Delovanjem bržeg tela, kretanje koje je srazmerno sa većom brzinom preneseno je na istu veličinu sredine tokom manje vremena, a tokom jednakog vremena, usled veće veličine perturbovane sredine, prenesena je količina kretanja koja je proporcionalna kvadratu brzine, dok je otpor (prema Zakonu II i III) proporcionalan sa prenesenom količinom kretanja. Prema tome, sada ćemo videti koja se kretanja pojavljuju iz ovog zakona otpora.

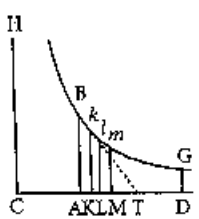
ODELJAK II

O kretanju tela na koja deluje otpor proporcionalan kvadratu njihovih brzina

PROPOZICIJA V. TEOREMA III

Ako na telo deluje otpor koji je proporcionalan kvadratu njegove brzine, i ako se kreće po inerciji samo kroz sličnu sredinu, i ako su vremena uzeta u geometrijskoj progresiji, krećući se od manjih ka većim članovima – tvrdim da su brzine na početku svakog vremena obrnuto proporcionalne sa tom geometrijskom progresijom, a da su prostori, koji su opisani u svakom od tih vremena, jednaki.

Pošto je otpor sredine proporcionalan sa kvadratom brzine i pošto je umanjenje brzine proporcionalno sa otporom, onda će, ukoliko je vreme podeljeno na bezbroj jednakih intervala, kvadrati brzina na početku svakog od vremena biti proporcionalni sa razlikama tih istih brzina. Neka su ti intervali vremena AK, KL, LM, itd. uzeti na pravoj liniji CD i ukoliko podignemo normale AB, K*k*, L*l*, M*m*, itd. koje seku opisanu hiperbolu B*klm*G sa centrom u C i sa pravougaonim asimptotama CD, CH u tačkama B, *k*, *l*, *m*, itd. – onda će se AB prema K*k* odnositi kao CK prema CA, a oduzimanjem, AB – K*k* prema K*k* odnosiće se kao što se AK odnosi prema CA i, naizmenično, AB – K*k* prema AK odnosiće se kao što se K*k* odnosi prema CA, a, prema tome, kao AB × K*k* prema AB × CA. Pošto su AK i AB × CA poznati, onda je AB – K*k* proporcionalno sa AB × K*k* i, konačno, kada se AB i K*k* poklapaju, onda će biti proporcionalno sa AB^2. Sličnim rasuđivanjem, K*k* – L*l*, L*l* – M*m*, itd. biće proporcionalni sa Kk^2, Ll^2, itd. Prema tome, kvadrati linija AB, K*k*, L*l*, M*m*, itd. proporcionalni su sa svojim razlikama i, zbog toga, pošto je gore pokazano da su kvadrati brzina proporcionalni sa razlikama tih brzina, i njihove progresije će biti slične. Iz ovoga takođe sledi da su površine opisane ovim linijama u sličnoj progresiji kao i prostori opisani tim brzinama. Prema tome, ako je brzina na početku prvog vremena AK predstavljena linijom AB, brzina na početku drugog vremena KL linijom K*k*, a dužina opisana tokom prvog vremena površinom AK*k*B, onda će svaka naredna brzina biti predstavljena sledećim linijama L*l*, M*m*, itd., a opisane dužine površinama K*l*, L*m*, itd. Slaganjem dobijamo da će, ako je celokupno vreme predstavljeno kao zbir delova tog vremena AM, celokupna opisana dužina biti predstavljena kao zbir svojih delova AM*m*B. Zamislimo sada da je vreme AM podeljeno na delove AK, KL, LM, itd. tako da CA, CK, CL, CM, itd. mogu biti u geometrijskoj progresiji – onda će ti delovi biti u istoj progresiji i brzine AB, K*k*, L*l*, M*m*, itd. biće u istoj ali obrnutoj progresiji, a opisani prostori A*k*, K*l*, L*m*, itd. biće jednaki. Q.E.D.



Kor. 1. Otuda se čini da će, ako je vreme predstavljeno kao bilo koji deo AD asimptote, a brzina na početku vremena kao ordinata AB, brzina na kraju tog vremena biti predstavljena kao ordinata DG, a celokupni prostor biće opisan susednom hiperboličnom površinom ABGD, dok će prostor, koji telo može opisati tokom istog vremena AD, sa prvom brzinom AB i u neotpornoj sredini, pomoću pravougaonika AB × AD.

Kor. 2. Prema tome, poznat je prostor opisan u otpornoj sredini, tako što se prema prostoru opisanom sa ravnomernom brzinom AB u neotpornoj sredini odnosi kao hiperbolična površina ABGD prema pravougaoniku AB × AD.

Kor. 3. Otpor sredine takođe je poznat tako što je, na samom početku kretanja, učinjen jednakim sa ravnomernom centripetalnom silom, koja može stvoriti brzinu AB u vremenu AC, za telo koje pada kroz neotpornu sredinu. Ako se povuče BT tako da dodiruje hiperbolu u B i tako da seče asimptotu u T, onda će prava linija AT biti jednaka sa AC i izraziće vreme tokom kog prvi otpor, koji se ravnomerno nastavlja, može poništiti celokupnu brzinu AB.

Kor. 4. Odatle je takođe poznat i odnos tog otpora i sile gravitacije, ili bilo koje druge date centripetalne sile.

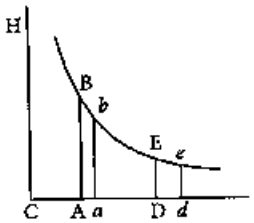
Kor. 5. I obrnuto, ako je poznat odnos otpora sa bilo kojom datom centripetalnom silom, poznato je i vreme AC tokom kog centripetalna sila koja je jednaka sa otporom može proizvesti bilo koju brzinu kao što je AB. Odatle je poznata i tačka B kroz koju će se opisati hiperbola sa asimptotama CH i CD, a takođe i prostor ABGD koje telo, na početku svog kretanja sa brzinom AB, može opisati u bilo kom vremenu AD u sličnoj otpornoj sredini.

PROPOZICIJA VI. TEOREMA IV

Homogena i jednaka sferna tela, za razliku od otpora koji su proporcionalni sa kvadratom brzina, i koja

se kreću samo po inerciji, opisaće jednake prostore i izgubiće delove svojih brzina proporcionalne sa celinama tokom vremena koja su obrnuto proporcionalna sa brzinama na početku.

Na pravougaonim asimptotama CD i CH opisaćemo bilo koju hiperbolu B*b*E*e* koja seče normale AB, *ab*, DE i *de* u tačkama B, *b*, E i *e*. Neka su početne brzine predstavljene pomoću normala AB i DE, a vremena pomoću linija A*a* i D*d*. Prema tome, A*a* se prema D*d* odnosi (prema pretpostavci) kao DE prema AB, a takođe i (prema prirodi hiperbole) kao CA prema CD, a slaganjem, kao i C*a* prema C*d*. Zbog toga su površine AB*ba* i DE*ed*, tj., opisani prostori, međusobno jednaki, a prve brzine AB i DE proporcionalne su sa poslednjim *ab* i *de*, pa su zato, oduzimanjem, proporcionalne sa delovima izgubljenih brzina, AB – *ab* i DE – *de*.



PROPOZICIJA VII. TEOREMA V

Ako su sferna tela suočena sa otporom proporcionalnim sa kvadratima njihovih brzina, tokom vremena koja su direktno proporcionalna sa prvim kretanjem, a obrnuto proporcionalna sa prvim otporima, ona će izgubiti delove svojih kretanja proporcionalno sa celinama i opisaće prostore proporcionalne sa tim vremenima i prvim brzinama zajedno.

Jer, delovi izgubljenih kretanja proporcionalni su otporima i vremenima zajedno. Prema tome, pošto ti delovi mogu biti proporcionalni sa celinama, onda otpor i vreme zajedno moraju biti proporcionalni sa kretanjem. Zbog toga će vreme biti direktno proporcionalno sa kretanjem, a obrnuto proporcionalno sa otporom. Ukoliko u tom odnosu uzmemo interval vremena, onda će tela uvek gubiti delove svojih kretanja proporcionalno sa celinama, pa će zato uvek zadržati brzine koje su proporcionalne sa njihovim prvim brzinama. I pošto je poznat odnos brzina, uvek će se opisivati prostori koji su proporcionalni sa prvim brzinama i vremenima zajedno. Q.E.D.

Kor. 1. Prema tome, ako na tela, pri jednakim brzinama, deluje otpor koji je proporcionalan sa kvadratom njihovih prečnika, onda će homogene lopte, koje se kreću bilo kojim brzinama i koje opisuju prostore proporcionalne sa njihovim prečnicima, gubiti delove svojih kretanja proporcionalno sa njihovim celinama. Jer, kretanje svake lopte biće proporcionalno sa njenom brzinom i masom zajedno, tj., sa brzinom i kubnim prečnikom; otpor će biti (prema pretpostavci) proporcionalan sa kvadratom prečnika i kvadratom brzine zajedno; vreme će (prema ovoj pretpostavci) biti direktno proporcionalno sa prvobitnim odnosom, a obrnuto sa potonjim odnosom, tj., direktno proporcionalno sa prečnikom, a obrnuto sa brzinom; zato će prostor, koji je proporcionalan sa vremenom i brzinom, biti proporcionalan sa prečnikom.

Kor. 2. Ako na tela, jednakih brzina, deluje otpor koji je u polukubnom odnosu sa njihovim prečnicima, onda će homogene lopte, koje se kreću bilo kojim brzinama i koje opisuju prostore koji su u polukubnom odnosu sa prečnicima, gubiti delove svojih kretanja proporcionalno sa njihovim celinama.

Kor. 3. Uopšteno, ako na tela, jednakih brzina, deluje otpor proporcionalan sa bilo kojim stepenom prečnika, onda će prostori, u kojima homogene lopte krećući se bilo kojom brzinom gube delove svojih kretanja proporcionalno sa celinama, biti proporcionalni sa kubnim prečnicima primenjenim na taj stepen. Neka ti prečnici budu D i E i ukoliko su otpori, pri pretpostavci da su brzine jednake, proporcionalni sa D^n i E^n, onda će prostori, u kojima lopte koje se kreću bilo kojim brzinama i koje gube delove svojih kretanja proporcionalno sa celinama, biti proporcionalni sa D^{3-n} i E^{3-n}. Iz ovoga sledi da će homogene lopte koje su proporcionalne sa opisanim prostorima zadržati svoje brzine u istom međusobnom odnosu kao na početku kretanja.

Kor. 4. Sada, ako lopte nisu homogene, onda se prostor opisan gušćom loptom mora povećati u srazmeri s gustinom. Jer, kretanje pri jednakim brzinama proporcionalno je sa gustinom, pa se i vreme (prema ovoj propoziciji) uvećava direktno proporcionalno kretanju, a opisan prostor proporcionalno vremenu.

Kor. 5. I, ako se lopte kreću u različitim sredinama, prostor se u sredini koja se, *caeteris paribus*, najviše opire mora umanjiti proporcionalno sa tim većim otporom. Jer, vreme će (prema ovoj propoziciji) biti umanjeno proporcionalno sa uvećanim otporom, a prostor proporcionalno sa vremenom.

LEMA II

Moment bilo kog proizvoda jednak je momentima bilo koje strane u proizvodu pomnožene sa indeksima stepena tih strana i njihovim koeficijentima neprekidno.

Proizvodom nazivam bilo koju veličinu koja nije nastala sabiranjem ili oduzimanjem različitih delova, već koja je, u aritmetici, stvorena ili proizvedena množenjem, deljenjem ili izvođenjem korena iz bilo kog člana, a koja je u geometriji nastala pronalaženjem obima i strana, ili ekstrema i geometrijskih sredina. Veličine ove vrste jesu proizvodi, koeficijenti, koreni, pravougaonici, kvadrati, kocke, kvadratne i kubne strane i slično. I te veličine smatram da su promenljive i neodređene i da se, takoreći, smanjuju ili povećavaju neprekidnim kretanjem ili fluksom; pod njihovim kratkotrajnim povećanjem ili umanjenjem podrazumevam naziv *momenti*; pri tome se povećanja mogu proceniti kao dodati ili pozitivni momenti, a umanjenja kao oduzeti ili negativni. Međutim, pod tim ne treba podrazumevati konačne intervale. Konačni intervali nisu momenti, već sáme količine stvorene momentima. Njih bi trebalo shvatiti kao tek početne principe konačnih veličina. Niti mi u ovoj Lemi razmatramo veličine momenata, već samo njihove tek nastale, prve proporcije. Ista stvar bi bila ako bismo umesto momenata uzeli brzine povećanja i umanjenja (koje se, takođe, mogu nazvati kretanjima, promenama i protocima količina), ili bilo koju konačnu veličinu koja je proporcionalna tim brzinama. Koeficijent bilo koje stvorene strane jeste veličina koja je dobijena primenjujući proizvod na tu stranu.

Zbog toga je smisao ove Leme taj da će, ako se momenti bilo koje veličine A, B, C, itd. povećavaju ili umanjuju neprekidnim fluksom, ili ako brzine promena koje su proporcionalne sa njima označimo sa *a*, *b*, *c*, itd., moment ili promena stvorenog pravougaonika AB biti $aB + bA$; moment stvorenog obima ABC biće $aBC + bAC + cAB$; a momenti stvorenih stepena A^2, A^3, A^4, $A^{\frac{1}{2}}$, $A^{\frac{3}{2}}$, $A^{\frac{2}{3}}$, A^{-1}, A^{-2} i $A^{-\frac{1}{2}}$ biće $2aA$, $3aA^2$, $4aA^3$, $\frac{1}{2}aA^{-\frac{1}{2}}$, $\frac{3}{2}aA^{\frac{1}{2}}$, $\frac{2}{3}aA^{-\frac{1}{3}}$, $-aA^{-2}$, $-2aA^{-3}$, $-\frac{1}{2}aA^{\frac{3}{2}}$, tim redom; i, uopšte, moment bilo kog stepena A^n biće $\frac{n}{m}aA^{n-m}$. Takođe, moment stvorene veličine A^2B biće $2aAB + bA^2$; moment stvorene veličine $A^3B^4C^2$ biće $3aA^2B^4C^2 + 4bA^3B^3C^2 + 2cA^3B^4C$; a moment stvorene veličine $\frac{A^3}{B^2}$ ili A^3B^{-2} biće $3aA^2B^{-2} - 2bA^3B^{-3}$; i tako dalje. Lema je dokazana na sledeći način.

Slučaj 1. Bilo koji pravougaonik, kao što je AB, koji se povećava neprekidnim fluksom, i kome još uvek nedostaje pola njegovih momenata $\frac{1}{2}a$ i $\frac{1}{2}b$ na stranama A i B, on je $A^{-\frac{1}{2}}a \times B^{-\frac{1}{2}}b$, ili $AB^{-\frac{1}{2}}aB^{\frac{1}{2}}bA + \frac{1}{4}ab$; međutim, čim mu se strane A i B povećaju drugom polovinom momenata, onda on postaje $A + \frac{1}{2}a \times B + \frac{1}{2}b$, ili $AB - \frac{1}{2}aB - \frac{1}{2}bA + \frac{1}{4}ab$. Ako od ovog pravougaonika oduzmemo prethodni pravougaonik, ostaće nam višak $aB + bA$. Zbog toga je, sa celokupnim povećanjem strana *a* i *b*, stvoreno povećanje pravougaonika $aB + bA$. Q.E.D.

Slučaj 2. Ako pretpostavimo da je AB uvek jednako sa G, onda će moment obima ABC ili GC (prema Slučaju 1) biti $gC + cG$, tj. (ako umesto G i *g* stavimo AB i $aB + BA$) onda će biti $aBC + bAC + cAB$. A slično je rasuđivanje i za obime bilo kojih strana. Q.E.D.

Slučaj 3. Ako pretpostavimo da su strane A, B i C uvek međusobno jednake, onda će moment $aB + bA$ od A^2, tj., pravougaonika AB, biti $2aA$; a moment $aBC + bAC + cAB$ od A^3, tj., obima ABC, biće $3aA^2$. A istim rasuđivanjem dobijamo da moment bilo kog stepena A^n jeste naA^{n-1}. Q.E.D.

Slučaj 4. Prema tome, pošto je $\frac{1}{A} \times A$ jednako I, onda će moment $\frac{1}{A}$ pomnožen sa $A + \frac{1}{A}$ pomnoženo sa *a* biti jednak momentu 1, tj., nuli. Zbog toga je moment $\frac{1}{A}$ ili A^{-1} jednak sa $-\frac{a}{A^2}$. I uopšte, pošto je $\frac{1}{A^n} \times A^n$ jednako 1, onda će moment $\frac{1}{A^n}$ pomnožen sa $A^n + \frac{1}{A^n}$ pomnoženo sa naA^{n-1} biti jednak nuli. I zato će moment $\frac{1}{A^n}$ ili A^{-n} biti $-\frac{na}{A^{n+1}}$. Q.E.D.

Slučaj 5. I pošto je $A^{\frac{1}{2}} \times A^{\frac{1}{2}}$ jednako A, onda će moment $A^{\frac{1}{2}}$ pomnožen sa $2A^{\frac{1}{2}}$ biti jednak *a* (prema Slučaju 3); zato će moment $A^{\frac{1}{2}}$ biti $\frac{a}{2A^{\frac{1}{2}}}$ ili $\frac{1}{2}aA - \frac{1}{2}$. I, uopšte, ako uzmemo da je A^n jednako sa B, onda će A^m biti jednako sa B^n, pa će zato maA^{m-1} biti jednako sa nbB^{n-1}, a maA^{-1} jednako sa nbB^{-1}, ili sa nbA^{-n}; prema tome, $\frac{m}{n}aA^{\frac{m}{n}-1}$ jednako je sa *b*, tj., jednako je sa momentom $A^{\frac{m}{n}}$. Q.E.D.

Slučaj 6. Zbog toga, moment bilo koje stvorene veličine A^mB^n jeste moment $A^m \times B^n$, zajedno sa momentom $B^n \times A^m$, tj., $maA^{m-1}B^n + A^mnbB^{n-1}$, pri čemu indeksi stepena *m* i *n* mogu biti celi brojevi ili razlomci, pozitivni ili negativni. Rasuđivanje je isto za obime sa većim stepenima. Q.E.D.

Kor. 1. Otuda, kod veličina koje su neprestano proporcionalne, ako je dat jedan član, onda će momenti ostalih članova biti proporcionalni sa istim tim članovima pomnoženim sa brojem njihovih međusobnih intervala i datim članom. Ako su A, B, C, D, E i F neprekidno proporcionalni, i ako je dat član C, onda će momenti

ostalih članova biti među sobom proporcionalni sa – 2A, –B, D, 2E, 3F.

Kor. 2. Ako su od četiri proporcionala data dva srednja, onda će momenti ekstrema biti proporcionalni sa tim ekstremima. Isto se podrazumeva za strane bilo kog datog pravougaonika.

Kor. 3. Ako su dati zbir ili razlika dva kvadrata, onda će momenti strana biti obrnuto proporcionalni sa stranama.

SHOLIJA

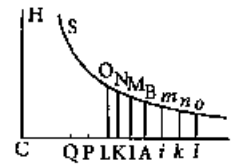
U svom pismu gospodinu Dž. Kolinsu (J. Collins), 10. decembra 1672. godine, opisujući metod tangenti, za koji sam pretpostavljao da je isti sa Sluzijusovim (Slusius) metodom i koji u to vreme nije publikovan, dodao sam sledeće reči:

Ovo je jedna posebnost ili pre Korolar jednog opšteg metoda, koja se proteže bez ikakvih problematičnih kalkulacija ne samo na povlačenje tangenti na bilo koje krive linije, bilo geometrijske ili mehaničke, ili na bilo šta drugo što je u vezi sa pravim linijama ili drugim krivim, već i na rešavanje drugih teško razumljivih vrsta problema o krivinama, površinama, dužinama, centrima gravitacije krivih, itd., pri čemu nije ograničena, (kao što je to Hadenova [Hudden] *metoda „de Maximis & Minimis") na jednačine koje ne sadrže iracionalne veličine. Ovaj metod ispripletao sam sa drugim koji se odnose na rešavanje jednačina pomoću beskonačnih nizova.*

Toliko o tom pismu. A te poslednje reči odnose se na studiju koju sam sačinio na tu temu godine 1671. Osnove za taj opšti metod sadržane su u prethodnoj Lemi.

PROPOZICIJA VIII. TEOREMA VI

Ako se telo, koje se nalazi u uniformnoj sredini i na koje ravnomerno deluje sila gravitacije, podiže ili spušta po pravoj liniji, i ako se ceo opisan prostor može podeliti na jednake delove, i ako na početku svakog tog dela (dodavanjem ili oduzimanjem sile otpora sredine od sile gravitacije, u zavisnosti od toga da li se telo podiže ili spušta) sakupimo apsolutne sile – onda tvrdim da su te apsolutne sile u geometrijskoj progresiji.



Neka je sila gravitacije predstavljena datom linijom AC; sila otpora neodređenom linijom AK; apsolutna sila pri padanju tela razlikom KC; brzina tela linijom AP, koja će biti geometrijska sredina između AK i AC, pa je prema tome proporcionalna sa kvadratnim korenom otpora; povećanje otpora načinjen u datom intervalu vremena lineolom KL; a istovremeno povećanje brzine lineolom PQ. Oko centra C sa pravougaonim asimptotama CA i CH opisaćemo hiperbolu BNS koja seče podignute normale AB, KN i LO u tačkama B, N i O. Pošto je AK jednako sa AP^2, onda će moment KL jednog biti jednak momentu 2APQ drugog, tj., jednak sa AP × KC zato što je povećanje PQ brzine (prema Zakonu II) proporcionalno sa stvorenom silom KC. Ako odnos KL bude složen sa odnosom KN, onda će pravougaonik KL × KN postati proporcionalan sa AP × KC × KN, tj. (pošto je dat pravougaonik KC × KN) sa AP. Međutim, kada se tačke K i L podudaraju, krajnji odnos hiperbolične površine KNOL prema pravougaoniku KL × KN postaje odnos jedinice. Prema tome, ta hiperbolična kratkotrajna površina proporcionalna je sa AP. Zbog toga je cela hiperbolična površina ABOL sačinjena iz delova KNOL koji su uvek proporcionalni sa brzinom AP i zato je i sama proporcionalna sa prostorom opisanim tom brzinom. Ako je sada ta površina podeljena na jednake delove kao što su ABMI, IMNK, KNOL, itd. onda će apsolutne sile AC, IC, KC, LC, itd. biti u geometrijskoj progresiji. I sličnim rasuđivanjem, ako tokom podizanja tela uzmemo na suprotnoj strani tačke A jednake površine A*bmi*, *imnk*, *knol*, itd. onda se ispostavlja da su apsolutne sile AC, *i*C, *k*C, *l*C, itd. neprekidno proporcionalne. Prema tome, ako su svi prostori pri podizanju ili padanju tela uzeti da su jednaki, onda će apsolutne sile *l*C, *k*C, *i*C, AC, IC, KC, LC, itd. biti neprekidno proporcionalne. Q.E.D.

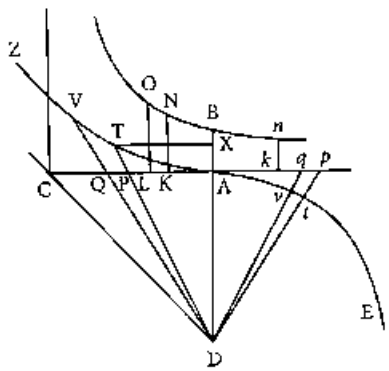
Kor. 1. Ako je opisan prostor predstavljen hiperboličnom površinom ABNK, tada se sila gravitacije, brzina tela i otpor sredine mogu predstaviti linijama AC, AP i AK, tim redom i *vice versa*.

Kor. 2. Najveća brzina koju telo može ikada da dostigne pri beskonačnom padanju biće predstavljena linijom AC.

Kor. 3. Prema tome, ako je poznat otpor sredine koji odgovara bilo kojoj datoj brzini, onda će se pronaći najveća brzina tako što ćemo uzeti da se prema toj datoj brzini odnosi kao kvadratni koren iz odnosa sile gravitacije prema poznatom otporu sredine.

PROPOZICIJA IX. TEOREMA VII

Ako uzmemo u obzir ono što je gore dokazano, i ako su tangente uglova sektora kruga i sektora hiperbole uzete tako da su proporcionalne sa brzinama, i ako je poluprečnik podesne veličine – onda tvrdim da će vreme podizanja do najvišeg mesta biti proporcionalno sa sektorom kruga, a vreme padanja sa najvišeg mesta sa sektorom hiperbole.

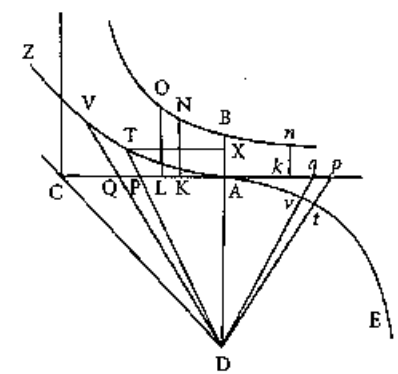


Neka je do prave linije AC, koja predstavlja silu gravitacije, povučena normala AD jednake dužine. Iz centra D sa poluprečnikom AD opisaćemo četvrtinu kruga A*t*E i pravougaonu hiperbolu AVZ čija je osa AK, teme A i asimptota DC. Ako povučemo D*p* i DP, onda će kružni sektor A*t*D biti proporcionalan sa svim vremenima podizanja do najvišeg mesta, a hiperbolični sektor ATD biće proporcionalan sa svim vremenima padanja iz najvišeg mesta, pod pretpostavkom da su tangente tih sektora A*p* i AP proporcionalne sa brzinama.

Slučaj 1. Povući ćemo D*vq* tako da u sektoru AD*t* i trouglu AD*p* preseca momente ili najmanje delove *t*D*v* i *q*D*p*, koji su opisani tokom istog vremena. Pošto se ti delovi (usled zajedničkog ugla D) odnose kao kvadrati strana, onda će deo *t*D*v* biti proporcionalan sa $\frac{qDp \times tD^2}{pD^2}$, tj., sa $\frac{qDp}{pD^2}$ (pošto je *t*D poznato). Međutim, pD^2 jednako je sa $AD^2 + Ap^2$, tj., sa $AD^2 + AD \times Ak$, ili sa $AD \times Ck$ i *q*D*p* jednako je sa $\frac{1}{2}AD \times pq$. Stoga je deo sektora *t*D*v* proporcionalan sa $\frac{pq}{Ck}$, tj., direktno proporcionalan sa najmanjim umanjenjem brzine *pq*, a obrnuto proporcionalan sa silom C*k* koja umanjuje tu brzinu. Slaganjem dobijamo da će zbir svih delova *t*D*v* u sektoru AD*t* biti proporcionalan sa zbirom intervala vremena koje odgovaraju svakom od izgubljenih delova *pq* brzine A*p* koja se smanjuje, sve dok ta brzina, pošto je dovedena na nulu, ne nestane, tj., ceo sektor AD*t* proporcionalan je sa celokupnim vremenom podizanja do najvišeg mesta. Q.E.D.

Slučaj 2. Povući ćemo DQV tako da u sektoru DAV i u trouglu DAQ preseca najmanje delove TDV i PDQ. Ti će se delovi međusobno odnositi kao što se DT^2 odnosi prema DP^2, tj., ako su TX i AP paralelne, kao DX^2 prema DA^2, ili kao TX^2 prema AP^2, ili kao što se $DX^2 - TX^2$ odnosi prema $DA^2 - AP^2$. Međutim, prema prirodi hiperbole $DX^2 - TX^2$ jednako je sa AD^2, a prema pretpostavci AP^2 jednako je sa AD × AK. Zbog toga se delovi međusobno odnose kao AD^2 prema $AD^2 - AD \times AK$, tj., kao AD prema AD – AK ili AC prema CK i zato je deo sektora TDV jednak sa $\frac{PDQ \times AC}{CK}$, a CK je (pošto su AC i AD poznati) proporcionalno sa $\frac{PQ}{CK}$, tj., direktno proporcionalno sa povećanjem brzine, a obrnuto sa silom koja proizvodi to povećanje, pa je prema tome proporcionalno sa intervalom vremena koji odgovara tom povećanju. Slaganjem dobijamo da će zbir svih intervala vremena, tokom kojih su stvorene sve čestice PQ brzine AP, biti proporcionalan sa zbirom delova sektora ATD, tj., celokupno vreme biće proporcionalno sa celokupnim sektorom. Q.E.D.

Kor. 1. Zato, ako je AB jednako sa četvrtinom od AC, onda će se prostor koji će telo opisati tokom padanja u bilo kom vremenu odnositi prema prostoru koji bi telo moglo da opiše krećući se ravnomerno napred tokom istog vremena i sa svojom najvećom brzinom AC, kao što se površina ABNK, koja predstavlja prostor opisan tokom padanja odnosi prema površini ATD, koja predstavlja vreme. Pošto se AC odnosi prema AP kao AP prema AK, onda se (prema Kor. 1 Leme II ove knjige) LK odnosi prema PQ kao 2AK prema AP, tj., kao 2AP prema AC, odakle sledi da se LK odnosi prema $\frac{1}{2}$ PQ kao AP prema $\frac{1}{4}$ AC ili AB, a KN prema AC ili AD kao AB prema CK i zbog toga se, *ex aequo*, LKNO prema DPQ odnosi kao AP prema CK. Međutim, DPQ se prema DTV odnosilo kao CK prema AC. Zato se, *ex aequo*, LKNO prema DTV odnosi kao AP prema AC, tj., kao brzina tela koje pada prema najvećoj brzini koju može dostići telo koje pada. Pošto su, zbog toga, momenti LKNO i DTV površinâ ABNK i ATD proporcionalni sa brzinama, onda će svi delovi tih površina stvorenih tokom istog



vremena biti proporcionalni sa prostorima opisanih tokom istog vremena, a celokupne površine ABNK i ADT, stvorene od početka, biće proporcionalne sa celokupnim prostorima opisanih od početka padanja. Q.E.D.

Kor. 2. Isto važi i za prostore opisane tokom podizanja. Takoreći, svi ti prostori odnose se prema prostorima opisanim tokom istog vremena sa ravnomernom brzinom AC kao što se površina AB*nk* odnosi prema sektoru AD*t*.

Kor. 3. Brzina tela koje pada tokom vremena ATD odnosi se prema brzini koju bi to telo dostiglo tokom istog vremena u neotpornoj sredini kao što se trougao APD odnosi prema hiperboličnom sektoru ATD. Jer, brzina u neotpornoj sredini bila bi proporcionalna sa vremenom ATD, a u otpornoj sredini sa AP, tj., sa trouglom APD. A brzine na početku padanja međusobno su jednake kao i površine ATD i APD.

Kor. 4. Na osnovu istog argumenta, brzina tokom podizanja odnosi se prema brzini pomoću koje bi telo tokom istog vremena u neotpornoj sredini izgubilo sve svoje kretanje prema gore, kao što se trougao A*p*D odnosi prema kružnom sektoru A*t*D, ili kao što se prava linija A*p* odnosi prema luku A*t*.

Kor. 5. Prema tome, vreme tokom kog će telo koje pada u otpornoj sredini zadobiti brzinu AP odnosi se prema vremenu tokom kog bi moglo zadobiti najveću brzinu AC padajući u neotpornoj sredini, kao što se sektor ADT odnosi prema trouglu ADC, a vreme tokom kog bi telo izgubilo svoju brzinu A*p*, podižući se u otpornoj sredini, odnosi se prema vremenu tokom kog bi izgubilo istu tu brzinu podižući se u neotpornom prostoru kao što se luk A*t* odnosi prema tangenti A*p*.

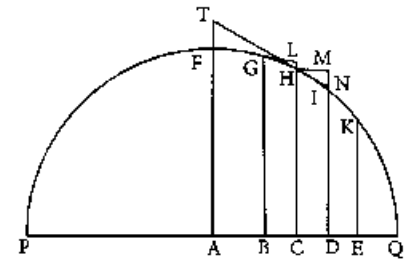
Kor. 6. Odatle sledi da je iz datog vremena poznat prostor opisan tokom podizanja ili padanja. Jer, data je najveća brzina tela koja opada *in infinitum* (pomoću Kor. 2 i 3, Teoreme VI, ove knjige) i odatle je poznato i vreme tokom kog bi telo dostiglo tu brzinu padanjem u neotpornom prostoru. Ako uzmemo da se sektor ADT ili AD*t* odnosi prema trouglu ADC kao što se dato vreme odnosi prema vremenu upravo pronađenom, onda će biti poznate i brzine AP ili A*p* kao i površine ABNK ili AB*nk*, koje se prema sektoru ADT ili AD*t* odnose kao tražen prostor prema prostoru koji bi, u datom vremenu, bio ravnomerno opisan sa tom upravo pronađenom brzinom.

Kor. 7. I obrnuto, iz datog prostora podizanja ili padanja AB*nk* ili ABNK poznato je i vreme AD*t* ili ADT.

PROPOZICIJA X. PROBLEM III

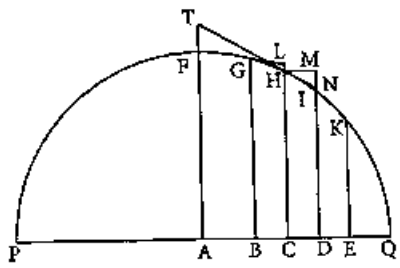
Ako pretpostavimo da ravnomerna sila gravitacije teži direktno prema ravni horizonta i da je otpor proporcionalan sa gustinom sredine i kvadratom brzine zajedno – potrebno je pronaći gustinu sredine u svakom mestu koja će uticati na telo da se kreće po bilo kojoj datoj krivoj liniji, kao i brzinu tela i otpor sredine u svakom mestu.

Neka je PQ ravan koja je normalna u odnosu na ravan sáme sheme; neka je PFHQ kriva linija koja seče tu ravan u tačkama P i Q; G, H, I, K četiri mesta tela koje se kreće po toj krivoj od tačke F do Q; GB, HC, ID, KE četiri ordinate koje su puštene iz tih tačaka prema horizontu i koje stoje na horizontalnoj liniji PQ u tačkama B, C, D i E; i neka su razdaljine ordinata BC, CD i DE međusobno jednake. Neka su iz tačaka G i H povučene prave linije GL i HN tako da dodiruju krivu u G i H i neka seku ordinate CH i DI, produžene prema gore, u tačkama L i N – tako ćemo dovršiti paralelogram HCDM. Vremena tokom kojih telo opisuje lukove GH i HI biće proporcionalna sa kvadratnim korenima visina LH i NI, koja bi telo opisalo u tim vremenima spuštajući se po tangenti, pri čemu će brzine biti direktno proporcionalne sa opisanim dužinama GH i HI, a obrnuto proporcionalne sa vremenima. Ako su vremena predstavljena kao T i *t*, a brzine kao $\frac{GH}{T}$ i $\frac{HI}{t}$, onda će smanjenje brzine nastale u vremenu *t* biti predstavljeno kao $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t}$. To smanjenje pojavljuje se usled otpora koji usporava telo i usled gravitacije koja ga ubrzava. Gravitacija, u padajućem telu, koje tokom svog pada opisuje prostor NI, daje brzinu sa kojom bi ono moglo da opiše dvostruki prostor tokom istog tog vremena, kao što je Galileo i dokazao, tj. brzinu $\frac{2NI}{t}$. Međutim, ako telo opisuje luk HI, luk se povećava samo za dužinu HI – HN ili $\frac{MI \times NI}{HI}$, pa zbog toga stvara samo brzinu $\frac{2MI \times NI}{t \times HI}$. Ako tu brzinu dodamo na prethodno pomenuto



smanjenje, onda ćemo dobiti smanjenje brzine koje se pojavljuje samo iz otpora, tj., dobićemo $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$. Pošto tokom istog vremena delovanje gravitacije stvara u telu koje pada brzinu $\frac{2NI}{t}$, onda će se otpor odnositi prema gravitaciji kao $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$ prema $\frac{2NI}{t}$ ili kao $\frac{t \times GH}{T} - HI + \frac{2MI \times NI}{HI}$ prema 2NI.

Sada označimo apscise CB, CD i CE sa $-o$, o i $2o$; ordinatu CH sa P; a MI sa bilo kojim nizom $Qo + Ro^2 + So^3 + \ldots$ Onda će svi članovi u nizu posle prvog, tj., $Ro^2 + So^3 + \ldots$ biti NI, a ordinate DI, EK i BG biće $P - Qo - Ro^2 - So^3 - \ldots$, $P - 2Qo - 4Ro^2 - 8So^3 - \ldots$, i $P + Qo - Ro^2 + So^3 - \ldots$, tim redom. Kada kvadriramo razlike tih ordinata BG – CH i CH – DI, i kada na tako stvorene kvadrate dodamo kvadrate od BC i CD, dobićemo $oo + QQoo - 2QRo^3 + \ldots$ i $oo + QQoo + 2QRo^3 + \ldots$, kvadrate lukova GH i HI čiji su koreni $o\sqrt{1+QQ} - \frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$ i $o\sqrt{1+QQ} - \frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$ sami lukovi GH i HI. Zatim, ako od ordinate CH oduzmemo polovinu zbira ordinata BG i DI i ako od ordinate DI oduzmemo polovinu zbira ordinata CH i EK, ostaće nam Roo i $Roo + 3So^3$ koji su sinus versusi lukova GI i HK, koji su proporcionalni sa lineolama LH i NI, pa se zbog toga međusobno odnose kao kvadrati beskonačno malih vremena T i t. Zato je odnos $\frac{t}{T}$ jednak sa $\sqrt{\frac{R+3So}{R}}$ ili sa $\frac{R+\frac{3}{2}So}{R}$, a $\frac{t \times GH}{T} - HI + \frac{2MI \times NI}{HI}$, menjajući vrednosti za $\frac{t}{T}$, GH, HI, MI i NI koje su upravo pronađene, postaje $\frac{3Soo}{2R}\sqrt{1+QQ}$. I pošto je 2NI jednako sa $2Roo$, onda će se otpor odnositi prema gravitaciji kao $\frac{3Soo}{2R}\sqrt{1+QQ}$ prema Roo, tj., kao $3S\sqrt{1+QQ}$ prema 4RR.



A brzina će biti takva da će telo, koje se kreće iz bilo kog mesta H u pravcu tangente HN, moći da opiše, *in vacuo*, parabolu čiji je prečnik HC, a žižni parametar $\frac{HN^2}{NI}$ ili $\frac{1+QQ}{R}$.

Otpor je proporcionalan sa gustinom sredine i kvadratom brzine zajedno i zato je gustina sredine direktno proporcionalna sa otporom, a obrnuto sa kvadratom brzine, tj., sa $\frac{3S\sqrt{1+QQ}}{4RR}$ direktno, a sa $\frac{1+QQ}{R}$ obrnuto, tj., proporcionalna je sa $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$. Q.E.I.

Kor. 1. Ako je tangenta HN produžena sa obe strane tako da seče bilo koju ordinatu AF u tački T, onda će $\frac{HT}{AC}$ biti jednako sa $\sqrt{1+QQ}$, pa se zbog toga u onome što je prethodilo može primeniti i na $\sqrt{1+QQ}$. Na ovakav način, otpor će se odnositi prema

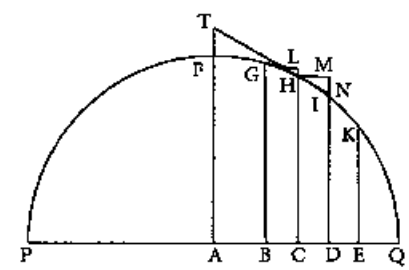
gravitaciji kao $3S \times HT$ prema $4RR \times AC$, brzina će biti proporcionalna sa $\frac{HT}{AC\sqrt{R}}$, a gustina sredine sa $\frac{S \times AC}{R \times HT}$.

Kor. 2. Na taj način, ako je kriva linija PFHQ definisana odnosom između osnove ili apscise AC i ordinate CH, kao što obično i jeste i ako je vrednost ordinate razložena na konvergentne nizove, onda će se Problem veoma brzo rešiti pomoću prvih članova tih nizova, kao što je to opisano u sledećim primerima.

Primer 1. Ako je linija PFHQ polukrug opisan na prečniku PQ, potrebno je pronaći gustinu sredine koja će omogućiti da se bačeno telo kreće po toj liniji.

Preseći ćemo prečnik PQ u tački A i označićemo AQ sa n, AC sa a, CH sa e, a CD sa o. Tada je DI^2 ili $AQ^2 - AD^2$ jednako sa $nn - aa - 2ao - oo$, ili sa $ee - 2ao - oo$ i onda će koren koji je nađen pomoću naše metode dati $DI = e - \frac{ao}{e} - \frac{oo}{2e} - \frac{aaoo}{2e^3} - \frac{ao^3}{2e^3} - \frac{a^2o^2}{2e^5} - \ldots$ Ako umesto $es + aa$ stavimo nn, onda će DI biti jednako sa $e - \frac{ao}{e} - \frac{mnoo}{2e^3} - \frac{anoo}{2e^3} - \ldots$

Takve nizove razdvajam na uzastopne članove na sledeći način: nazivam prvim članom onaj u kome nije pronađena beskonačno mala veličina o; drugim, u kome je ta veličina prvog stepena; trećim, u kome se ona pojavljuje do drugog stepena; četvrtim, u kome je ona trećeg stepena i tako dalje *in infinitum*. Prvi član, koji je u ovom primeru e, uvek će označavati dužinu ordinate CH, koja se nalazi na početku neodređene veličine o. Drugi član, koji je ovde $\frac{ao}{e}$, označavaće razliku između CH i DN, tj., lineolu MN koja je dobijena kad je dovršen paralelogram HCDM i zbog toga uvek određuje položaj tangente HN, kao u ovom slučaju, kada uzmemo da se MN prema HM odnosi kao $\frac{ao}{e}$ prema o, ili kao a prema e. Treći član, koji je ovde $\frac{mnoo}{2e^3}$, predstavljaće lineolu IN, koja se nalazi između tangente i krive; i zbog toga određuje ugao dodira IHN, ili zakrivljenje koje kriva linija ima u tački H. Ako je ta lineola IN konačne veličine, ona će biti izražena trećim članom zajedno sa onima koji slede *in infinitum*. Međutim, ako je ta lineola umanjena *in infinitum*, članovi koji slede postaju beskonačno manji od tog trećeg člana, pa se zbog toga mogu i zanemariti. Četvrti član označava promenu zakrivljenja; peti, promenu promene i tako dalje. Uzgred

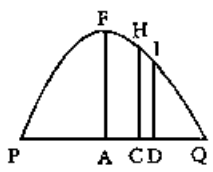


rečeno, odatle je jasna nemalo važna upotreba ovih nizova pri rešavanju problema koji zavise od tangenti i zakrivljenja krivih.

Sada ćemo uporediti niz $e - \frac{ao}{c} - \frac{nnoo}{2c^3} - \frac{annoo}{2c^5} - ...$ sa nizom P – Qo – Roo – So³ – ...; i ako umesto P, Q, R i S stavimo e, $\frac{a}{c}$, $\frac{nn}{2c}$, $\frac{ann}{2c^3}$, a umesto $\sqrt{1+QQ}$ stavimo $\sqrt{1+\frac{aa}{ee}}$ ili $\frac{n}{c}$; onda će se gustina sredine pojaviti kao $\frac{a}{nc}$, tj. (pošto je n poznato) pojaviće se kao $\frac{a}{c}$ ili $\frac{AC}{CH}$, tj., kao ona dužina tangente HT koja se završava na poluprečniku AF koji je normalan na PQ, a otpor će se odnositi prema gravitaciji kao $3a$ prema $2n$, kao što se 3AC odnosi prema prečniku kruga PQ, dok će brzina biti proporcionalna sa $\sqrt{CH}$. Prema tome, ako telo ide iz mesta F sa odgovarajućom brzinom i u pravcu paralelnom sa PQ i ako je gustina sredine u svakom mestu H proporcionalna sa dužinom tangente HT, a otpor se takođe u bilo kom mestu H odnosi prema sili gravitacije kao 3AC prema PQ, onda će telo opisati četvrtinu kruga FHQ. Q.E.I.

Međutim, ako isto to telo ide iz tačke P, u pravcu linije koja je normalna u odnosu na PQ i ako započinje da se kreće po luku polukruga PFQ, onda moramo smestiti AC ili a na suprotnu stranu centra A, zbog čega se njihovi predznaci moraju promeniti, tako da umesto – moramo staviti +. Pri takvim uslovima gustina sredine biće proporcionalna sa $-\frac{a}{c}$. Ipak, priroda ne dopušta negativnu gustinu, tj., gustinu koja ubrzava kretanje tela, te, zato, prirodno, ne može biti takvog kretanja tokom kog bi telo prilikom, podizanja iz tačke P, moglo opisati četvrtinu kruga PF. Da bismo stvorili takav efekat, telo bi moralo biti ubrzano pomoću pokretne sredine, a da nije ometano od otporne sredine.

Primer 2. Ako je linija PFQ parabola čija je osa AF normalna u odnosu na horizont PQ, pronaći ćemo gustinu sredine koja će omogućiti da se bačeno telo kreće po toj liniji.



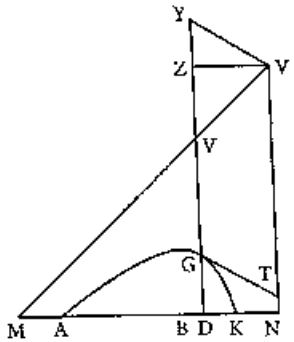
Iz prirode parabole sledi da je pravougaonik PDQ jednak sa pravougaonikom pod ordinatom DI i nekom datom pravom linijom. Dakle, ako tu pravu liniju označimo kao b, PC kao a, PQ kao c, CH kao e, a CD kao o, onda će pravougaonik $a + o \times c - a - o$ ili $ac - aa - 2ao + co - oo$, biti jednak sa pravougaonikom $b \times$ DI, odakle sledi da je DI jednako sa $\frac{ac-aa}{b} + \frac{c-2a}{b}o - \frac{oo}{b}$. Sada ćemo umesto Qo staviti drugi član niza $\frac{c-2a}{b}o$, a umesto Roo staviće mo treći član niza $\frac{oo}{b}$. Međutim, pošto nema više članova, koeficijent S četvrtog člana će nestati, pa će zbog toga veličina $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$, koja je proporcionalna sa gustinom sredine, biti nula. Zato će se bačeno telo kretati po paraboli u sredini koja nema gustinu, baš kao što je Galilej ranije dokazao. Q.E.I.

Primer 3. Ako je linija AGK hiperbola, čija je asimptota NX normalna na horizontalnu ravan AK, pronaći ćemo gustinu sredine koja će omogućiti da se bačeno telo kreće po toj liniji.

Uzmimo da je MX druga a simptota koja u tački V seče produženu ordinatu DG. Prema prirodi hiperbole sledi da je poznat pravougaonik XV puta VG. Takođe je poznat i odnos DN prema VX, pa je zbog toga poznat i pravougaonik DN × VG. Neka je on označen kao bb i dovršavajući paralelogram DNXZ, neka se BN označi kao a, BD kao o, NX kao c i neka dat odnos VZ prema ZX ili DN bude $\frac{m}{n}$. Tada će DN biti jednako sa $a - o$, VG sa $\frac{bb}{a-o}$, VZ sa $\frac{m}{n} \times (a - o)$, a GD ili NX – VZ – VG jednako sa $c - \frac{m}{n}a + \frac{m}{n}o - \frac{bb}{a-o}$. Ako član $\frac{bb}{a-o}$ razložimo na konvergentni niz $\frac{bb}{a} + \frac{bb}{aa}o + \frac{bb}{a^3}oo + \frac{bb}{a^4}o^3 + ...$, onda će GD postati jednako sa $c - \frac{m}{n}a - \frac{bb}{aa}o + \frac{m}{n}o - \frac{bb}{aa}o - \frac{bb}{a^3}o^2 - \frac{bb}{a^4}o^3$, itd. Drugi član ovog niza $\frac{m}{n}a - \frac{bb}{aa}o$ koristićemo za Qo; treći član $\frac{bb}{a^3}o^2$ sa promenjenim predznakom za Ro²; četvrti član $\frac{bb}{a^4}o^3$ sa takođe promenjenim predznakom za So³, a njihove koeficijente $\frac{m}{n} - \frac{bb}{aa}$, $\frac{bb}{a^3}$ i $\frac{bb}{a^4}$ za Q, R i S po prethodnom pravilu. Kada je to urađeno, gustina sredine će biti proporcionalna sa $\frac{bb}{a^4} / \frac{bb}{a^3}\sqrt{1+\frac{mm}{nn}-\frac{2mbb}{naa}+\frac{b^4}{a^4}}$ ili sa $1/\sqrt{aa+\frac{mm}{nn}aa-\frac{2mbb}{n}+\frac{b^4}{aa}}$, tj. sa $\frac{1}{XY}$, ako na VZ uzmemo da je VY jednako sa VG. Jer, aa i $\frac{m^2}{n^2}a^2 - \frac{2mbb}{n} + \frac{b^4}{aa}$ jesu kvadrati od XZ i ZY. Međutim, ispostavlja se da se otpor prema gravitaciji odnosi kao 3XY prema 2YG, a brzina je takva kakvu bi telo imalo kada bi opisivalo parabolu čiji je vrh G, prečnik DG, a žižni parametar $\frac{XY^2}{VG}$.

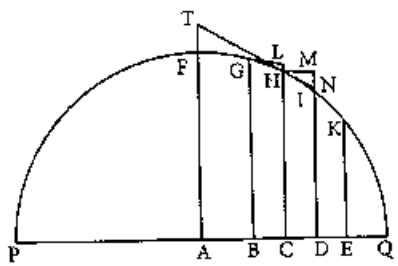
Prema tome, ako pretpostavimo da su gustine sredine u svakom mestu G obrnuto proporcionalne sa rastojanjima XY i da se otpor u bilo kom mestu G odnosi prema gravitaciji kao 3XY prema 2YG, onda će telo koje je pušteno iz tačke A sa odgovarajućom brzinom opisati hiperbolu AGK. Q.E.I.

Primer 4. Ako pretpostavimo, neodređeno, da je linija AGK hiperbola koja je opisana sa centrom u X i sa asimptotama MX i NX, tako da, pošto je konstruisan pravougaonik XZDN čija strana ZD seče hiperbolu u G, a njenu asimptotu u V, VG može biti obrnuto proporcionalna sa bilo kojim stepenom DN^n linije ZX ili DN čiji je indeks broj n – onda ćemo pronaći gustinu sredine u kojoj će bačeno telo opisati ovu krivu.

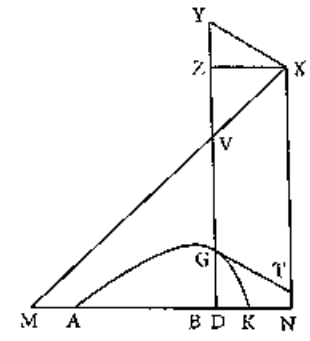


Umesto BN, BD i NX stavićemo A, O i C, tim redom, i neka se VZ prema XZ ili DN odnosi kao d prema e, pri čemu je VG jednako sa $\frac{bb}{DN^2}$. Tada će DN biti jednako sa A – O, VG sa $\frac{bb}{(A-O)^2}$, VZ sa $\frac{d}{e}$ (A–O), a GD ili NX – VZ – VG biće jednako sa $C - \frac{d}{e}A + \frac{d}{e}O - \frac{bb}{(A-O)^2}$. Ako je član $\frac{bb}{(A-O)^2}$ razložen na beskonačni niz $\frac{bb}{A^2} + \frac{nbb}{A^{n+1}} \times O + \frac{nn+n}{2A^{n+2}} \times bbO^2 + \frac{n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}} \times bbO^3$, itd. onda će GD biti jednako sa $C - \frac{d}{e}A - \frac{bb}{A^2} + \frac{d}{e}O - \frac{nbb}{A^{n+1}}O - \frac{+nn+n}{2A^{n+2}} bbO^2 - \frac{+n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}} bbO^3$, itd. Drugi član ovog niza $\frac{d}{e}O - \frac{nbb}{A^{n+1}}O$ koristićemo za Qo, treći član $\frac{nn+n}{2A^{n+2}} bbO^2$ za Roo, a četvrti član $\frac{n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}} bbO^3$ za So^3. Odatle sledi da će gustina sredine $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$ u bilo kom mestu G biti $(n+2)/3\sqrt{A^2+\frac{dd}{ee}A^2-\frac{2dnbb}{eA^n}A+\frac{nnb^4}{A^{2n}}}$, i zato je, ako na VZ uzmemo da je VY jednako sa n x VG, ta gustina obrnuto proporcionalna sa XY. Jer, A^2 i $\frac{dd}{ee}A^2-\frac{2dnbb}{eA^n}A+\frac{nnb^4}{A^{2n}}$ jesu kvadrati od XZ i ZY. Ipak, otpor u istom tom mestu G odnosi se prema sili gravitacije kao $3S \times \frac{XY}{A}$ prema 4RR, tj. kao XY prema $\frac{2nn+2n}{n+2}$ VG. A brzina je tu takva kakvom bi se bačeno telo kretalo po paraboli čiji je vrh G, prečnik GD, a žižni parametar $\frac{1+QQ}{R}$ ili $\frac{2XY^2}{(nn+n)VG}$. Q.E.I.

SHOLIJA



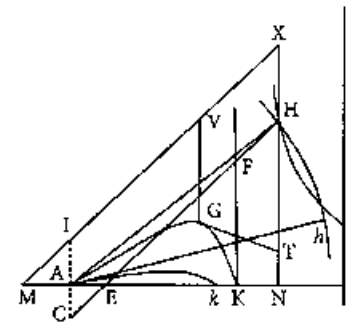
Na isti način po kom je gustina sredine proporcionalna sa $\frac{S \times AC}{R \times HT}$ u Kor. 1 i ako se uzme da je otpor proporcionalan sa bilo kojim stepenom V^n brzine V, gustina sredine će biti proporcionalna sa $\frac{S}{R^{\frac{n+3}{2}}} \times \left(\frac{AC}{HT}\right)^{n-1}$. Prema tome, ako se može naći zakrivljenje, tako da može biti poznat odnos $\frac{S}{R^{\frac{n+3}{2}}}$ prema $\left(\frac{HT}{AC}\right)^{n-1}$, ili $\frac{S^2}{R^{n+2}}$ prema $(1+QQ)^{n-1}$, onda će se telo, u ravnomernoj sredini čiji je otpor proporcionalan sa stepenom V^n brzine V, kretati po ovoj krivoj. Ipak, vratimo se na jednostavnije krive.



Pošto ne može biti predstave o kretanju po paraboli, osim u neotpornoj sredini, i pošto je kretanje po hiperbolama ovde opisanim stvoreno neprekidnim otporom, očigledno je da linija koju opisuje bačeno telo u ravnomerno otpornoj sredini teži bliže tim hiperbolama nego paraboli. Ta je linija zasigurno hiperbolične vrste. Ipak, ona je oko vrha više udaljena od asimptota, a u svojim udaljenim delovima više se približava asimptotama od gore opisanih hiperbola. Međutim, njihova međusobna razlika i nije toliko velika, s tim što se ove poslednje više koriste u praksi od prethodnih. I možda se one mogu pokazati korisnijim od hiperbole koja je preciznija i istovremeno složenija. One se mogu iskoristiti na sledeći način.

Dovršićemo paralelogram XYGT, pa će prava linija GT dodirnuti hiperbolu u G i zbog toga će gustina sredine u G biti obrnuto proporcionalna sa tangentom GT, a brzina će biti proporcionalna sa $\frac{\sqrt{GT^3}}{GV}$, pa će se otpor odnositi prema sili gravitacije kao GT prema $\frac{2nn+2n}{n+2} \times GV$.

Stoga, ako bačeno telo iz tog mesta A, u pravcu prave linije AH, opisuje hiperbolu AGK i ako je AH produžena tako da seče asimptotu NX u H, a AI je povučena paralelno sa njom tako da seče drugu asimptotu MX u I, tada će gustina sredine u tački A biti obrnuto proporcionalna sa AH, brzina tela biće proporcionalna sa $\frac{\sqrt{AH^3}}{AI}$, a otpor će se odnositi prema sili gravitacije kao AH prema $\frac{2nn+2n}{n+2} \times AI$. I odatle su proizašla sledeća pravila.



Pravilo 1. Ukoliko gustina sredine u A kao i brzina kojom je telo bačeno ostanu iste, a pri tome se promeni ugao NAH, a pri tome dužine AH, AI i HX ostaće nepromenjene. Prema tome, ako su u bilo kom slučaju te dužine pronađene, kasnije se lako može odrediti hiperbola iz bilo kog datog ugla NAH.

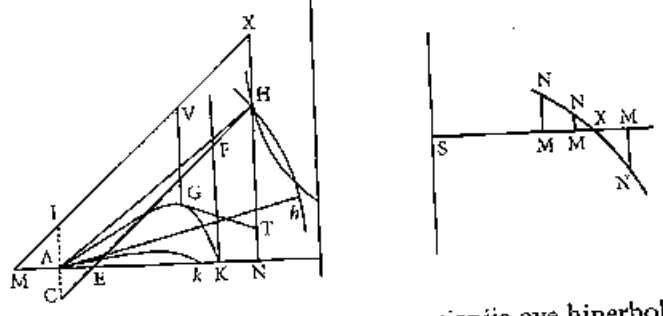
Pravilo 2. Ako ugao NAH kao i gustina sredine u A ostanu iste i ako se promeni brzina kojom je telo bačeno, a dužina AH ostane

nepromenjena, onda će se AI promeniti obrnuto proporcionalno sa kvadratom brzine.

Pravilo 3. Ako ugao NAH, brzina tela u A, kao i ubrzavajuća sila gravitacije ostanu iste i ako se odnos otpora u A prema pokretačkoj sili gravitacije uveća za bilo koji stepen, onda će se u istom odnosu povećati i odnos AH prema AI, pri čemu će žižni parametar pomenute parabole ostati isti, kao i dužina $\frac{AH^2}{AI}$ koja je proporcionalna sa njom. Odatle sledi da će se AH umanjiti u istom odnosu, dok će se AI umanjiti u istom tom odnosu na kvadrat. Međutim, odnos otpora prema težini je povećan ili kada je specifična gravitacija manja, dok veličina ostaje jednaka, ili kada je gustina sredine veća, ili kada se prilikom smanjenja veličine otpor smanjuje u manjem odnosu od težine.

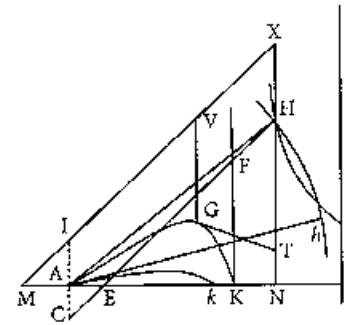
Pravilo 4. Pošto je gustina sredine veća u blizini vrha hiperbole nego što je u mestu A, tako da srednja gustina može biti očuvana, potrebno je pronaći odnos najmanje tangente GT prema tangenti AH i uvećati gustinu u A u odnosu koji je malo veći od odnosa poluzbira tih tangenti prema najmanjoj tangenti GT.

Pravilo 5. Ako su date dužine AH i AI i ako treba da se opiše figura AGK, produžićemo HN do X tako da se HX može odnositi prema AI kao $n + 1$ prema 1 i sa centrom X i asimptotama MX i NX opisaćemo hiperbolu kroz tačku A tako da se AI može odnositi prema bilo kojoj liniji VG kao XV^n prema XI^n.

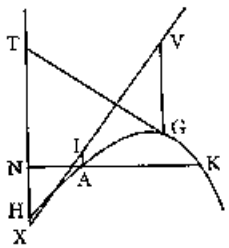


Pravilo 6. Što je veći broj n, to su preciznije ove hiperbole pri podizanju tela iz tačke A, a manje preciznije pri padanju do tačke K, i obrnuto. Konusna hiperbola održava njihov međusobni srednji odnos i jednostavnija je od ostalih. Zbog toga, ako uzmemo hiperbolu ovakve vrste i ako treba da pronađemo tačku K u koju pada bačeno telo i koja se nalazi na bilo kojoj pravoj liniji AN koja prolazi kroz tačku A, onda ćemo produžiti AN tako da seče asimptote MX i NX u M i N i uzećemo da je NK jednako sa AM.

Pravilo 7. Odatle se javlja ekspeditivan metod za određivanje te hiperbole iz fenomena. Neka su dva slična i jednaka tela bačena sa istom brzinom, ali pod različitim uglovima HAK i hAk i neka padnu na ravan horizonta u tačkama K i k, pri čemu ćemo odrediti odnos AK prema Ak. Neka je taj odnos proporcionalan sa odnosom d prema e. Potom ćemo podignuti normalu AI bilo koje dužine i uzećemo neku proizvoljnu dužinu AH ili Ah, i odatle ćemo grafički, ili pomoću merenja i kruga, dobiti dužine AK i Ak (prema Pravilu 6). Ako je odnos AK prema Ak isti kao i odnos d prema e, onda je dužina AH pravilno pretpostavljena. Ako nije, onda ćemo na neodređenoj pravoj liniji SM postaviti dužinu SM koja je jednaka sa pretpostavljenom AH i podignućemo normalu MN koja je jednaka sa proizvodom razlike odnosa $\frac{AK}{Ak} - \frac{d}{e}$ i bilo koje date prave linije. Sličnim metodom, iz nekoliko proizvoljnih dužina AH možemo pronaći nekoliko tačaka N i možemo povući kroz sve njih pravilnu krivu NNXN koja seče pravu liniju SMMM u X. Na kraju, pretpostavimo da je AR jednako sa apscisom SX i odatle ćemo ponovo pronaći dužinu AK; dužine, koje se prema proizvoljnoj dužini AI i prema dužini AH odnose kao što se dužina AK, poznata iz eksperimenta, odnosi prema dužini AK koja je poslednja pronađena, biće istinske dužine AI i AH koje je i trebalo pronaći. Pošto su one poznate, takođe će biti poznata i sila otpora sredine u mestu A, koja se prema sili gravitacije odnosi kao AH prema $\frac{4}{3}$ AI. Ako se gustina sredine uveća prema Pravilu 4 i ako se upravo pronađena sila otpora uveća u istom odnosu, onda će gorepomenuto biti još preciznije.



Pravilo 8. Pošto su pronađene dužine AH i HX, neka je sada neophodno pronaći položaj linije AH, na kojoj će telo bačeno sa tom datom brzinom pasti u bilo kojoj tački K. U tačkama A i K ćemo podignuti linije AC i KF normalne u odnosu na horizont. Odatle ćemo prema dole povući AC koja je jednaka sa AI ili sa $\frac{1}{2}$ HX. Sa asimptotama AK i KF opisaćemo hiperbolu čije će konjugovane tačke proći kroz tačku C; iz centra A, sa intervalom AH, opisaćemo krug koji seče hiperbolu u tački H; onda će telo koje je bačeno u pravcu prave linije AH pasti u tačku K. Q.E.I.



Pošto je data dužina AH, tačka H se mora nalaziti negde na obimu opisanog kruga. Povući ćemo CH tako da seče AK i KF u E i F; pošto su CH i MX paralelne, a AC i AI jednake, onda će AE biti jednako sa AM, a samim tim jednako i sa KN. Ipak, CE se prema AE odnosi kao FH prema KN, pa su zato CE i FH jednake. Zbog toga se tačka H nalazi na hiperboličnoj krivoj koja je opisana asimptotama AK i KF čije zajedničke tačke prolaze kroz tačku C; zato je pronađena u zajedničkom preseku te hiperbolične krive i obima opisanog kruga. Q.E.D.

Neophodno je primetiti da je ova operacija ista bilo da je prava linija AKN paralelna sa horizontom ili se naginje prema njemu pod bilo kojim uglom; da se iz dva preseka H i *h* pojavljuju dva ugla NAH i NA*h*; da je u mehaničkoj praksi dovoljno jednom opisati krug i onda staviti duž CH neodređene dužine do tačke C, tako da njen deo FH, presečen između kruga i prave linije FK, može biti jednak sa njenim delom CE koji je smešten između tačke C i prave linije AK.

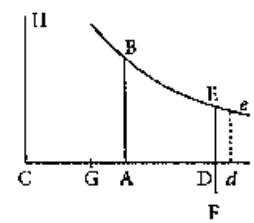
Sve što je rečeno o hiperbolama može se lako primeniti i na parabole. Neka je parabola predstavljena kao XAGK, koju prava linija XV dodiruje u vrhu X i čije ordinate IA i VG mogu biti bilo kog stepena XI^n i XV^n apscisâ XI i XV. Ako povučemo XT, GT i AH, pri čemu je XT paralelna sa VG, i ako GT i AH dodiruju parabolu u G i A, onda će telo, koje je bačeno iz bilo kog mesta A u pravcu prave linije AH i sa određenom brzinom, opisati ovu parabolu ukoliko je gustina sredine u svakom mestu G obrnuto proporcionalna sa tangentom GT. U tom slučaju će brzina u G biti ista kao i ona kojom bi telo moglo da opiše konusnu parabolu, krećući se u neotpornom prostoru, imajući G za svoj vrh, VG produženu prema dole za svoj prečnik i $\frac{2GT^2}{(m-n)\times VG}$ za svoj žižni parametar. A sila otpora u G bi se prema sili gravitacije odnosila kao GT prema $\frac{2nn-2n}{n-2}$ VG. Prema tome, ako NAK predstavlja horizontalnu liniju i ako gustina sredine u A kao i brzina kojom je telo bačeno ostanu iste, a ugao NAH na bilo koji način promenjen, onda će dužine AH, AI i HX ostati nepromenjene. Odatle je poznat vrh X parabole i položaj prave linije XI. Ukoliko uzmemo da se VG prema IA odnosi kao XV^n prema XI^n, onda će biti poznate i sve tačke G parabole kroz koje prolazi bačeno telo.

ODELJAK III

O kretanju tela pri otporu koji je delimično proporcionalan sa brzinama i delimično sa kvadratom tih brzina

PROPOZICIJA XI. TEOREMA VIII

Ako na telo deluje otpor koji je delimično proporcionalan sa njegovom brzinom i delimično sa kvadratom te brzine, i ako se kreće po sličnoj sredini samo po inerciji, a pri tome su vremena uzeta u aritmetičkom nizu – onda će veličine, obrnuto proporcionalne sa brzinama i uvećane za određenu datu veličinu, biti u geometrijskom nizu.



Sa centrom C i sa pravougaonim asimptotama CAD*d* i CH opisaćemo hiperbolu BE*e*, a neka su AB, DE i *de* paralelne sa asimptotom CH. Uzmimo da su na asimptoti CD date tačke A i G i ako se vreme predstavi pomoću hiperbolične površine ABED koja se ravnomerno povećava, tvrdim da se brzina može izraziti pomoću dužine DF čija recipročna vrednost GD zajedno sa datom linijom CG čini dužinu CD koja se uvećava geometrijskom progresijom.

Ako područje DE*ed* predstavlja najmanje dato povećanje vremena, onda će D*d* biti obrnuto proporcionalno sa DE, a direktno proporcionalno sa CD. Zbog toga će umanjenje za $\frac{1}{GD}$, koje je prema Lemi II, Knjige II, $\frac{Dd}{GD^2}$, biti proporcionalno sa $\frac{CD}{GD^2}$, ili sa $\frac{CG+GD}{GD^2}$, tj., sa $\frac{1}{GD}+\frac{CG}{GD^2}$. Kada se vreme ABED ravnomerno uvećava dodavanjem datih čestica ED*de*, sledi da će se $\frac{1}{GD}$ umanjivati u istom odnosu sa brzinom. Umanjenje brzine proporcionalno je sa otporom, tj. (prema pretpostavci) sa zbirom dve veličine, od kojih je jedna proporcionalna sa brzinom, a druga sa kvadratom brzine. Umanjenje za $\frac{1}{GD}$ proporcionalno je sa zbirom veličina $\frac{1}{GD}$ i $\frac{CG}{GD^2}$, od kojih je jedna samo to umanjenje $\frac{1}{GD}$, dok je druga $\frac{CG}{GD^2}$ proporcionalna sa $\frac{1}{GD^2}$. Prema tome, veličina $\frac{1}{GD}$ proporcionalna je sa brzinom, pošto su im umanjenja slična. I ako se veličina GD koja je obrnuto proporcionalna sa $\frac{1}{GD}$ uveća za datu veličinu CG, tada će se zbir CD, pri ravnomernom povećanju vremena ABED, uvećavati geometrijskom progresijom. Q.E.D.

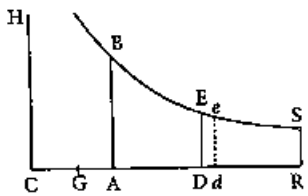
Kor. 1. Prema tome, ako su date tačke A i G i ako je vreme predstavljeno kao hiperbolična površina ABED, onda se brzina može predstaviti pomoću $\frac{1}{GD}$ koja je recipročna vrednost od GD.

Kor. 2. Ako uzmemo da se GA odnosi prema GD kao recipročna brzina na početku prema recipročnoj brzini na kraju bilo kog vremena ABED, onda se može pronaći tačka G. A kada se pronađe ta tačka, onda se može pronaći brzina iz bilo kog drugog datog vremena.

PROPOZICIJA XII. TEOREMA IX

Prema istim pretpostavkama, tvrdim da će, ukoliko je opisan prostor uzet u aritmetičkoj progresiji, brzine koje su uvećane za neku određenu datu veličinu biti u geometrijskoj progresiji.

Neka se na asimptoti CD nalazi data tačka R i neka je, pri podizanju normale RS koja seče hiperbolu u S, opisan prostor predstavljen pomoću hiperbolične površine RSED. Tada će brzina biti proporcionalna sa dužinom GD koja zajedno sa datom linijom CG čini dužinu CD koja se smanjuje u geometrijskoj progresiji, dok se prostor RSED uvećava u aritmetičkoj progresiji.



Jer, pošto je poznato uvećanje prostora ED*de*, tada je lineola D*d*, koja je umanjenje dužine GD, obrnuto proporcionalna sa ED, a direktno sa CD, tj., sa zbirom iste te dužine GD i date dužine CG. Smanjenje brzine u vremenu obrnuto proporcionalno s njim, tokom kog je opisana data čestica prostora D*de*E, proporcionalno je sa otporom i vremenom zajedno, tj., direktno proporcionalno sa zbirom dve veličine, od kojih je prva proporcionalna sa brzinom, a druga sa kvadratom brzine, a obrnuto sa brzinom, pa je zbog toga direktno proporcionalno sa zbirom dve veličine, od kojih je jedna poznata, dok je druga proporcionalna sa brzinom. Zbog toga je smanjenje brzine kao i linije GD proporcionalno sa datom veličinom i umanjenom veličinom zajedno i pošto su umanjenja slična, uvek će biti slične i veličine koje se smanjuju, tj., brzina i linija GD. Q.E.D.

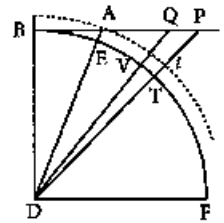
Kor. 1. Ako je brzina predstavljena dužinom GD, onda će opisan prostor biti proporcionalan sa hiperboličnom površinom DESR.

Kor. 2. Ako je tačka R na bilo koji način pretpostavljena, onda će se pronaći tačka G, tako što se uzme da se GR prema GD odnosi kao početna brzina i brzina posle koje je opisan bilo koji prostor RSED. Pošto je poznata tačka G, biće poznat i prostor iz date brzine, i obrnuto.

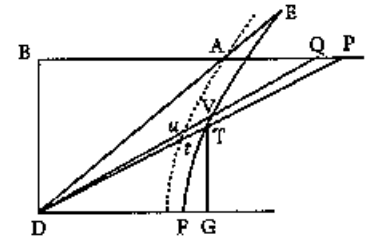
Kor. 3. Pošto je (prema Prop. XI) poznata brzina iz datog vremena i pošto je poznat prostor iz date brzine, možemo pronaći prostor iz datog vremena, i obrnuto.

PROPOZICIJA XIII. TEOREMA X

Ako pretpostavimo da se telo, koje je privučeno na dole ravnomernom gravitacijom, podiže ili spušta po pravoj liniji, i da na isto to telo deluje otpor koji je delimično proporcionalan s brzinom, a delimično s kvadratom brzine – tvrdim da će, ako se prave linije, paralelne sa prečnicima kruga i hiperbole, povuku iz date tačke, vremena biti proporcionalna sa sektorima površina koji su odsečeni pravim linijama povučenim iz centra prema krajevima tih segmenata, i obrnuto.



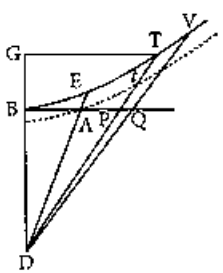
Slučaj 1. Na početku ćemo pretpostaviti da se telo podiže i da iz centra D sa bilo kojim poluprečnikom DB opisuje četvrtinu kruga BETF. Kroz kraj B poluprečnika DB povući ćemo neograničenu liniju BAP paralelno sa poluprečnikom DF. Neka je na toj liniji data tačka A i uzmimo da je segment AP proporcionalan sa brzinom. Pošto je jedan deo otpora proporcionalan sa brzinom, a drugi sa kvadratom brzine, neka je celokupni otpor proporcionalan sa $AP^2 - 2BAP$. Spojićemo DA i DP tako da seku krug u E i T i neka je gravitacija predstavljena kao DA^2 tako da se gravitacija odnosi prema otporu u P kao DA^2 prema $AP^2 + 2BAP$. Onda će celokupno vreme podizanja biti proporcionalno sa sektorom kruga EDT.



Ako povučemo DVQ koja odseca moment PQ brzine AP i ako moment DTV sektora DET odgovara datom momentu vremena, onda će to umanjenje PQ brzine biti proporcionalno sa zbirom sila

gravitacije DA^2 i sila otpora $AP^2 + 2BAP$, tj. (prema Prop. XII, Knjige II, *Elem.*) sa DP^2. Onda je površina DPQ, koja je proporcionalna sa PQ, takođe proporcionalna i sa DP^2, a površina DTV, koja se prema površini DPQ odnosi kao DT^2 prema DP^2, proporcionalna sa datom veličinom DT^2. Prema tome, površina EDT umanjuje se, oduzimanjem datih čestica DTV, ravnomerno u skladu sa stepenom budućeg vremena i zbog toga je proporcionalna sa vremenom celokupnog kretanja prema gore. Q.E.D.

Slučaj 2. Ako se brzina pri kretanju tela na gore predstavi kao i ranije dužinom AP i ako uzmemo da je otpor proporcionalan sa $AP^2 + 2BAP$, pri čemu je sila gravitacije manja od one koja može biti predstavljena kao DA^2 i ukoliko uzmemo da je BD takve dužine da $AB^2 - BD^2$ može biti proporcionalno sa gravitacijom i da je DF normalno i jednako sa DB, a kroz vrh F opišemo hiperbolu FTVE čiji su srodni poluprečnici DB i DF, koji seku DA u E, a DP i DQ u T i V – onda će vreme celokupnog kretanja prema gore biti proporcionalno sa hiperboličnim sektorom TDE.



Jer, umanjenje brzine PQ, stvorene u datom intervalu vremena, proporcionalno je sa zbirom otpora $AP^2 + 2BAP$ i gravitacije $AB^2 - BD^2$, tj., sa $BP^2 - BD^2$. Međutim, površina DTV odnosi se prema površini DPQ kao DT^2 prema DP^2 i zbog toga, ako je GT povučeno normalno na DF, odnosi se kao GT^2 ili kao $GD^2 - DF^2$ ili kao GD^2 prema BP^2, a deljenjem, kao DF^2 prema $BP^2 - BD^2$. Prema tome, pošto je površina DPQ proporcionalna sa PQ, tj., sa $BP^2 - BD^2$, onda će površina DTV biti proporcionalna sa datom veličinom DF^2. Zato se površina EDT ravnomerno umanjuje u svakom od jednakih intervala vremena, oduzimanjem od isto toliko datih delova DTV, i zbog toga je proporcionalna sa vremenom. Q.E.D.

Slučaj 3. Neka je AP brzina tela tokom njegovog kretanja prema dole, AP^2 sila otpora, $BD^2 - AB^2$ sila gravitacije, a ugao DBA je prav ugao. Ukoliko je sa centrom D i sa temenom B opisana pravougaona hiperbola BETV koja seče produžene linije DA, DP i DQ u E, T i V, onda će sektor DET ove hiperbole biti proporcionalan sa celokupnim vremenom kretanja prema dole.

Jer, uvećanje PQ brzine i površine DPQ, proporcionalne sa njom, proporcionalno je sa viškom gravitacije u odnosu na otpor, tj., sa $BD^2 - AB^2 - 2BAP - AP^2$ ili sa $BD^2 - BP^2$. Površina DTV odnosi se prema površini DPQ kao DT^2 prema DP^2; zbog toga i kao GT^2 ili $GD^2 - BD^2$ prema BP^2 i kao GD^2 prema BD^2, a deljenjem kao BD^2 prema $BD^2 - BP^2$. Prema tome, pošto je površina DPQ proporcionalna sa $BD^2 - BP^2$, onda će površina DTV biti proporcionalna sa datom veličinom BD^2. Zato se površina EDT ravnomerno povećava tokom nekoliko jednakih intervala vremena dodavanjem istim tolikim brojem datih intervala DTV, pa je zbog toga i proporcionalna sa vremenom kretanja prema dole. Q.E.D.

Kor. Ako je sa centrom D i poluprečnikom DA kroz vrh A povučen luk A*f* koji je jednak luku ET, tj., ako je formiran ugao ADT, onda će se brzina AP odnositi prema brzini koju telo, tokom vremena EDT u neotpornom prostoru, može izgubiti pri podizanju ili zadobiti pri spuštanju, kao što se površina trougla DAP odnosi prema površini sektora DA*f*, a zbog toga je i poznata iz datog vremena. Jer, brzina u neotpornoj sredini proporcionalna je sa vremenom, a samim tim i sa ovim sektorom; u otpornoj sredini proporcionalna je sa trouglom; u obema sredinama, kada je najmanja, brzina se približava odnosu jednakosti, kao što to čine i sektor i trougao.

SHOLIJA

Taj slučaj takođe možemo dokazati i za kretanje tela prema gore, pri čemu je sila gravitacije manja od one koju izražava DA^2 ili $AB^2 + DB^2$, a veća od one koju izražava $AB^2 - DB^2$, i koja se mora izraziti kao AB^2. Međutim, žurim ka drugim stvarima.

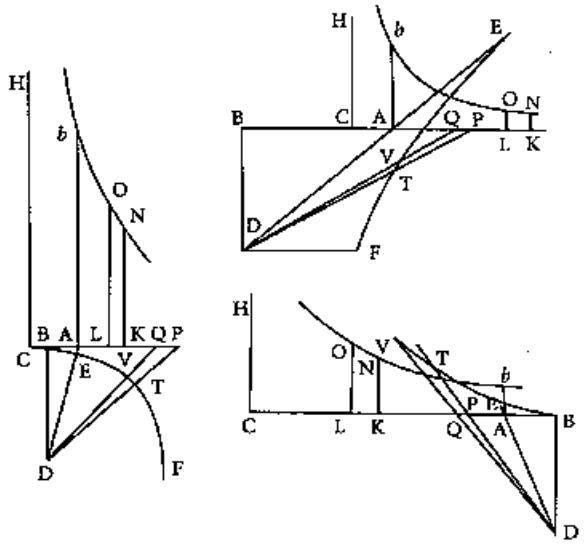
PROPOZICIJA XIV. TEOREMA XI

Prema istim pretpostavkama, tvrdim da je prostor opisan pri kretanju tela prema gore ili prema dole proporcionalan sa razlikom površine kojom je predstavljeno vreme i nekih drugih površina koje su uvećane ili umanjene u aritmetičkoj progresiji ukoliko su sile koje su sastavljene od otpora i gravitacije uzete u geometrijskoj progresiji.

Uzmimo da je dužina AC (u ovim trima figurama) proporcionalna sa gravitacijom, a AK sa otporom. Međutim, uzmimo da se nalaze na istoj strani tačke A ukoliko se telo kreće prema dole i na različitoj strani, ako se telo kreće prema gore. Podignimo *Ab*, koja

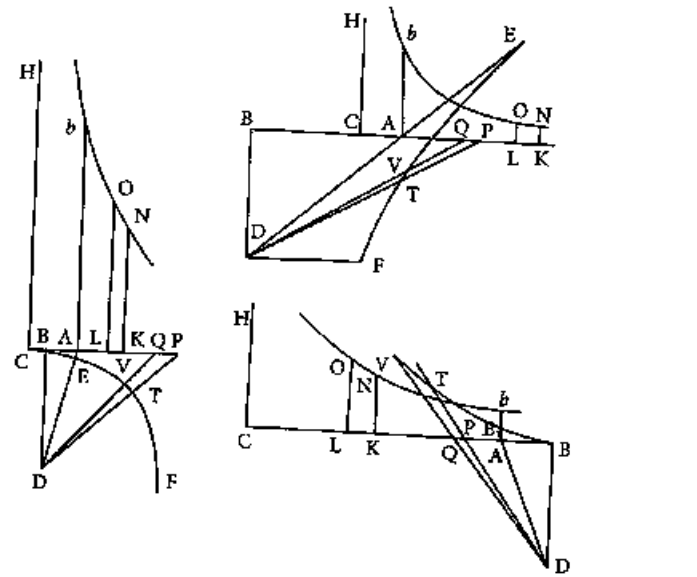
se prema DB odnosi kao DB^2 prema 4BAC, oko pravougaonih asimptota CK i CH opišimo hiperbolu *b*N i kad podignemo KN normalno u odnosu na CK, onda će površina A*b*NK biti uvećana ili umanjena u aritmetičkoj progresiji, dok su sile CK uzete u geometrijskoj progresiji. Prema tome, tvrdim da je udaljenost tela od njegove najveće visine proporcionalna sa viškom površine A*b*NK u odnosu na površinu DET.

Pošto je dužina AK proporcionalna sa otporom, tj., sa $AP^2 \times 2BAP$, ako pretpostavimo bilo koju datu veličinu Z, i ako stavimo da je AK jednaka sa $\frac{2APQ + 2BAP}{Z}$, onda će (prema Lemi II ove Knjige) KL moment dužine AK biti jednak sa $\frac{2APQ + 2BA \times PQ}{Z}$ ili sa $\frac{2BPQ}{Z}$, a moment KLON površine A*b*NK biće jednak sa $\frac{2BPQ \times LO}{Z}$ ili sa $\frac{BPQ \times BD^3}{2Z \times CK \times AB}$.



Slučaj 1. Sada, ako se telo kreće prema gore i ako je gravitacija proporcionalna sa $AB^2 + BD^2$, a BET krug, onda će linija AC, koja je proporcionalna sa gravitacijom, biti $\frac{AB^2 + BD^2}{Z}$, a DP^2 ili $AP^2 + 2BAP + AB^2 + BD^2$ biće $AK \times Z + AC \times Z$ ili $CK \times Z$ i zbog toga će se površina DTV odnositi prema površini DPQ kao DT^2 ili DB^2 prema $CK \times Z$.

Slučaj 2. Ako se telo kreće prema gore i ako je gravitacija proporcionalna sa $AB^2 - BD^2$, onda će linija AC uvek biti $\frac{AB^2 - BD^2}{Z}$, a DT^2 će se prema DP^2 odnositi kao DF^2 ili DB^2 prema $BP^2 - BD^2$ ili $AP^2 + 2BAP + AB^2 - BD^2$, tj., prema $AK \times Z + AC \times Z$ ili $CK \times Z$.



Zato će se površina DTV odnositi prema površini DPQ kao DB^2 prema $CK \times Z$.

Slučaj 3. Sličnim rasuđivanjem, ako se telo kreće prema dole, pa je zato gravitacija proporcionalna sa $BD^2 - AB^2$, a linija AC postaje jednaka sa $\frac{BD^2 - AB^2}{Z}$, onda će se površina DTV odnositi prema površini DPQ kao DB^2 prema $CK \times Z$, kao i ranije.

Prema tome, ove površine su uvek u istom odnosu. Ako umesto površine DTV, kojom je izražen moment vremena koji je uvek isti sa samim sobom, stavimo bilo koji određeni pravougaonik, kao što je recimo $BD \times m$, onda će se površina DPQ, tj., $\frac{1}{2}$ BD x PQ, odnositi prema $BD \times m$ kao $CK \times Z$ prema BD^2. Odatle $PQ \times BD^3$ postaje jednako sa $2BD \times m \times CK \times Z$, a moment KLON površine A*b*NK, pronađen ranije, postaje $\frac{BP \times BD \times m}{AB}$. Ako od površine DET oduzmemo njen moment DTV ili $BD \times m$, onda će ostati $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$. Prema tome, razlika momenata, tj., moment razlike površina, jednaka je sa $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$, te je zato (usled date veličine $\frac{BD \times m}{AB}$) i proporcionalna sa brzinom AP, tj., sa momentom prostora koji telo opisuje tokom svog kretanja prema gore ili dole. I zato su razlika površina i taj prostor, koji se povećavaju ili umanjuju proporcionalno sa momentima, i koji zajedno postaju ili nestaju, međusobno proporcionalni. Q.E.D.

Kor. Ukoliko dužinu koja nastaje kada primenimo površinu DET na liniju BD označimo sa M, a drugu dužinu V uzmemo da je

u takvom odnosu prema dužini M kao što se linija DA odnosi prema liniji DE, onda će se prostor koji telo u otpornoj sredini opisuje tokom svog celokupnog kretanja prema gore ili dole, odnositi prema prostoru koji telo u neotpornoj sredini i padajući iz stanja mirovanja može opisati tokom istog vremena, kao što se razlika gorepomenutih površina odnosi prema $\frac{BD \times V^2}{AB}$; zbog čega je prostor poznat iz datog vremena. Jer, prostor u neotpornoj sredini proporcionalan je sa kvadratom vremena ili sa V^3; i pošto su BD i AB poznati, proporcionalan je sa $\frac{BD \times V^2}{AB}$. Ova površina jednaka je sa površinom $\frac{DA^2 \times BD \times M^2}{DE^2 \times AB}$ i pošto moment M jeste *m*, onda je moment ove površine $\frac{DA^2 \times BD \times 2M \times m}{DE^2 \times AB}$. Međutim, ovaj moment se prema momentu razlike gorepomenutih površina DET i A*b*NK, tj., prema $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$, odnosi kao $\frac{DA^2 \times BD \times M}{DE^2 \times AB}$ prema $\frac{1}{2}$ BD x AP ili kao $\frac{DA^2}{DE^2}$ x DET prema DAP, a kada su površine DET i DAP najmanje, onda se nalazi u odnosu jednakosti. Prema tome, površina $\frac{BD \times V^2}{AB}$ i razlika površina DET i A*b*NK, kada su sve ove površine najmanje, imaju jednake momente, pa su stoga jednake. Pošto se brzine, a zato i prostori u obema sredinama opisani zajedno, na početku spuštanja ili na kraju podizanja, približavaju jednakosti, i nalaze se u takvom međusobnom odnosu kao površina $\frac{BD \times V^2}{AB}$ i razlika površina DET i A*b*NK i pošto je prostor u neotpornoj sredini neprekidno proporcionalan sa $\frac{BD \times V^2}{AB}$, a prostor u otpornoj sredini neprekidno proporcionalan sa razlikom površina DET i A*b*NK, onda nužno sledi da se prostori, u obema sredinama i opisani u jednakim vremenima, međusobno odnose kao površina $\frac{BD \times V^2}{AB}$ i razlika površina DET i A*b*NK. Q.E.D.

SHOLIJA

Otpor sfernih tela u tečnostima nastaje delimično usled čvrstoće, delimično usled trenja, i delimično usled gustine sredine. A taj deo otpora koji nastaje usled gustine tečnosti proporcionalan je, kao što sam rekao, sa kvadratom brzine; drugi deo, koji nastaje usled čvrstoće tečnosti ravnomeran je i proporcionalan sa momentom vremena, pa, zato sad možemo preći na razmatranje o kretanju tela na koje deluje otpor delimično usled ravnomerne sile, zatim, koji je delimično proporcionalan sa momentom vremena, a delimično sa kvadratom brzine. Ipak, dovoljno je priložiti ovom istraživanju rešenja iz propozicija VIII i IX i njihovih korolara, tako što ćemo umesto ravnomernog otpora koji deluje na telo koje

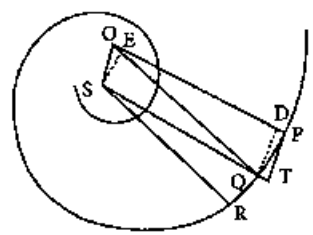
se kreće prema gore i koje nastaje usled njegove gravitacije, staviti ravnomeran otpor koji se pojavljuje iz čvrstoće sredine, dok se telo kreće samo pomoću sile inercije; a kada se telo kreće prema gore po pravoj liniji, dodaćemo taj ravnomeran otpor sili gravitacije, a oduzećemo ga kad se telo kreće prema dole. Takođe možemo raspravljati i o kretanju tela na koje deluje otpor koji je delimično ravnomeran, delimično proporcionalan sa brzinom, a delimično proporcionalan sa kvadratom te iste brzine. Otvorio sam put ovome u propozicijama XIII i XIV, u kojima se ravnomerni otpor koji nastaje iz čvrstoće sredine može zameniti silom gravitacije, ili joj se može dodati kao i ranije. Međutim, žurim ka drugim stvarima.

ODELJAK IV

O kružnom kretanju tela u otpornim sredinama

LEMA III

Neka je PQR spirala koja preseca sve poluprečnike SP, SQ, SR itd. pod jednakim uglovima. Ako povučemo pravu liniju PT koja dodiruje spiralu u bilo kojoj tački P presecajući poluprečnik SQ u T i ako povučemo PO i QO, normalno u odnosu na spiralu, koje se dodiruju u tački O i spajaju SO – onda tvrdim da će, ako se tačke P i Q približavaju i podudaraju, ugao PSO postati prav ugao, a krajnji odnos pravougaonika TQ x 2PS prema PQ^2 biće odnos jednakosti.



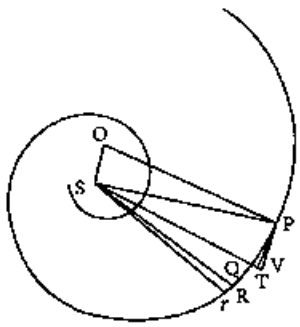
Ako od pravih uglova OPQ i OQR oduzmemo jednake uglove SPQ i SQR, ostaće nam jednaki uglovi OPS i OQS. Odatle sledi da će krug koji prolazi kroz tačke OSP takođe prolaziti i kroz tačku Q. Ako se tačke P i Q podudaraju, ovaj krug će dodirnuti spiralu u mestu podudaranja PQ pa će, prema tome, preseći pravu liniju OP normalno. Na taj način OP će postati prečnik tog kruga, a ugao OSP, pošto je u polukrugu, postaće prav ugao. Q.E.D.

Ako povučemo QD i SE normalno na OP, onda će krajnji odnosi ovih linija biti sledeći: TQ se prema PD odnosi kao TS ili PS

prema PE, ili 2PO prema 2PS, a PD prema PQ kao PQ prema 2PO, *ex aequo perturbatè*, TQ prema PQ kao PQ prema 2PS. Odatle sledi da PQ^2 postaje jednako sa TQ × 2PS. Q.E.D.

PROPOZICIJA XV. TEOREMA XII

Ako je gustina sredine u svakom mestu obrnuto proporcionalna sa njihovim rastojanjem do nepokretnog centra i ako je centripetalna sila proporcionalna sa kvadratom gustine, tvrdim da telo može kružiti po spirali koja seče sve poluprečnike povučene iz tog centra pod datim uglom.



Pretpostavićemo da je sve isto kao i u prethodnoj Lemi i produžićemo SQ do V tako da SV može biti jednako sa SP. Neka telo, tokom bilo kog vremena i u otpornoj sredini, opisuje najmanji luk PQ i neka opisuje najmanji luk PR tokom dvostrukog tog vremena. U tom slučaju bi se umanjenja tih lukova, koja nastaju usled otpora, ili njihova različitost od onih lukova koji bi bili opisani u neotpornoj sredini tokom istih vremena, međusobno odnosila kao kvadrati vremena tokom kojih su stvoreni. Prema tome, umanjenje luka PQ iznosi četvrtinu umanjenja luka PR. Odatle takođe sledi da je, ukoliko uzmemo da je površina QS*r* jednaka sa površinom PSQ, umanjenje luka PQ jednako sa polovinom lineole R*r*; zbog toga se sila otpora i centripetalna sila međusobno odnose kao lineole $\frac{1}{2}$ R*r* i TQ, istovremeno stvorenih. Pošto je centripetalna sila, koja deluje na telo u P, obrnuto proporcionalna sa SP^2 i pošto je (prema Lemi X, Knjige I) lineola TQ, koja je stvorena tom silom, proporcionalna sa tom silom i kvadratom vremena tokom kog je luk PQ opisan (u ovom slučaju zanemariću otpor zato što je beskonačno manji od centripetalne sile), sledi da će TQ × SP^2, tj. (prema poslednjoj Lemi) $\frac{1}{2}$ PQ^2 × SP, biti proporcionalno sa kvadratom vremena, pa je vreme proporcionalno sa PQ × $\sqrt{SP}$ a brzina tela, kojom je opisan luk PQ tokom tog vremena, biće proporcionalna sa $\frac{PQ}{PQ \times \sqrt{SP}}$, ili sa $\frac{1}{\sqrt{SP}}$, tj., obrnuto proporcionalna sa $\sqrt{SP}$. Sličnim rasuđivanjem, brzina kojom je opisan luk QR obrnuto je proporcionalna sa $\sqrt{SP}$. Sada su lukovi PQ i QR međusobno proporcionalni sa brzinama kojima su opisani; tj., odnose se kao $\sqrt{SQ}$ prema $\sqrt{SP}$, ili kao SQ prema $\sqrt{SP \times SQ}$. Pošto su uglovi SPQ i SQ*r* jednaki, kao i površine PSQ i QS*r*, onda se luk PQ prema luku Q*r* odnosi kao SQ prema SP. Ako uzmemo razlike rezultata proporcija, onda će se luk PQ odnositi prema luku R*r* kao SQ prema SP – $\sqrt{SP \times SQ}$, ili $\frac{1}{2}$ VQ. Kad se tačke P i Q podudaraju, onda će krajnji odnos SP – $\sqrt{SP \times SQ}$ prema $\frac{1}{2}$ VQ biti odnos jednakosti. Pošto je umanjenje luka PQ koje nastaje usled otpora, ili njegova dvostruka veličina R*r*, proporcionalna sa otporom i kvadratom vremena zajedno, otpor će biti proporcionalan sa $\frac{Rr}{PQ^2 \times SP}$. Međutim, PQ se prema R*r* odnosilo kao SQ prema $\frac{1}{2}$ VQ, pa odatle sledi da $\frac{Rr}{PQ^2 \times SP}$ postaje proporcionalno sa $\frac{\frac{1}{2}VQ}{PQ \times SP \times SQ}$, ili sa $\frac{\frac{1}{2}OS}{OP \times SP^2}$. Kada se tačke P i Q podudaraju, podudaraju se i SP i SQ, a ugao PVQ postaje prav ugao i usled sličnih trouglova PVQ i PSO, PQ se prema $\frac{1}{2}$ VQ odnosi kao OP prema $\frac{1}{2}$ OS. Zbog toga je $\frac{OS}{OP \times SP^2}$ proporcionalno sa otporom, tj., sa gustinom sredine u P i kvadratom brzine zajedno. Ako od toga oduzmemo kvadrat brzine, tj., odnos $\frac{1}{SP}$, ostaće da je gustina sredine u P proporcionalna sa $\frac{OS}{OP \times SP^2}$. Ako je spirala data i ako je dat odnos OS prema OP, onda će gustina sredine u P biti proporcionalna sa $\frac{1}{SP}$. Prema tome, telo može kružiti po spirali u sredini čija je gustina obrnuto proporcionalna sa rastojanjem SP od centra. Q.E.D.

Kor. 1. Brzina u bilo kom mestu P, kojom bi telo kružilo po krugu u neotpornoj sredini sa istom centripetalnom silom, uvek je ista na istom rastojanju SP od centra.

Kor. 2. Ukoliko je rastojanje SP poznato, gustina sredine proporcionalna je sa $\frac{OS}{SP^2}$, a sa $\frac{OS}{OP \times SP^2}$ ukoliko rastojanje SP nije poznato. Odatle sledi da se spirala može prilagoditi bilo kojoj gustini sredine.

Kor. 3. Sila otpora u bilo kom mestu P odnosi se prema centripetalnoj sili u istom tom mestu kao $\frac{1}{2}$ OS prema OP. Jer, te sile se međusobno odnose kao $\frac{1}{2}$ R*r* i TQ, ili kao $\frac{\frac{1}{2}VQ \times PQ}{SQ}$ i $\frac{\frac{1}{2}PQ^2}{SQ}$, tj., kao $\frac{1}{2}$ VQ i PQ, ili $\frac{1}{2}$ OS i OP. Pošto je na taj način data spirala, takođe je data i proporcija otpora prema centripetalnoj sili i, *vice versa*, iz te date proporcije, data je i spirala.

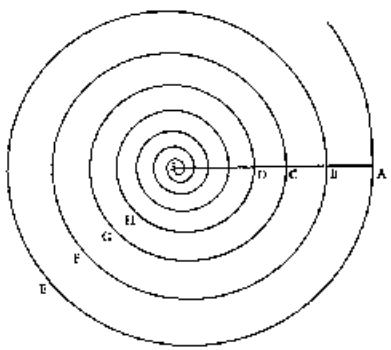
Kor. 4. Prema tome, telo ne može kružiti po ovoj spirali, osim ako sila otpora nije manja od polovine centripetalne sile. Ako je otpor jednak polovini centripetalne sile, onda će se spirala podudarati sa pravom linijom PS, a na toj pravoj liniji telo će se kretati prema centru brzinom koja se odnosi prema brzini kojom bi se

telo kretalo u neotpornoj sredini, kao što je dokazano ranije u slučaju sa parabolom (Teorija X, Knjiga I), kao jedan prema korenu iz dva. A vremena padanja bila bi ovde obrnuto proporcionalna sa brzinama, tj., bila bi poznata.

Kor. 5. Pošto je, na jednakim rastojanjima od centra, brzina na spirali PQR ista kao i brzina na pravoj liniji SP i pošto je poznat odnos dužine spirale prema dužini prave linije (odnos OP prema OS), onda će se vreme spuštanja po spirali odnositi prema vremenu spuštanja po pravoj liniji u tom datom odnosu, tj., taj odnos biće poznat.

Kor. 6. Ako su iz centra S, sa bilo koja dva data intervala, opisana dva kruga i ako ti krugovi ostaju isti, dok se ugao koji čini spirala s poluprečnikom PS može na bilo koji način izmeniti – u tom slučaju će broj revolucija tela u prostoru između površina tih krugova, dok kruže po spirali od jedne površine ka drugoj, biti proporcionalan sa $\frac{PS}{OS}$, ili sa tangentom ugla koji čini spirala sa poluprečnikom PS, a vreme iste revolucije biće proporcionalno sa $\frac{OP}{OS}$, tj., sa sečicom tog ugla, a obrnuto proporcionalno sa gustinom sredine.

Kor. 7. Ako telo, u sredini čija je gustina obrnuto proporcionalna sa rastojanjima mesta od centra, kruži po krivoj AEB oko tog centra i seče u tački B prvi poluprečnik AS pod istim uglom kao i ranije u tački A, i ako se kreće takvom brzinom koja se prema prvoj brzini u tački A odnosi obrnuto proporcionalno kao što se odnose koreni rastojanja od centra (tj., kao AS prema geometrijskoj sredini između AS i AB), onda će telo nastaviti da opisuje bezbrojne slične revolucije BFC, CGD itd., a njihovim će se presecanjima poluprečnik AS razdvojiti na delove AS, BS, CS, DS itd., koji su neprekidno proporcionalni. Međutim, vremena revolucija biće direktno proporcionalna sa obimima orbita AEB, BFC, CGD itd., a obrnuto proporcionalna sa brzinama na počecima A, B, C tih orbita, tj., sa $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$. Celokupno vreme tokom kog će telo stići do centra odnosiće se prema vremenu prve revolucije kao zbir svih članova progresije $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$ produženih do beskonačnosti, prema prvom članu $AS^{\frac{3}{2}}$, tj., kao prvi član $AS^{\frac{3}{2}}$ prema razlici prva dva člana $AS^{\frac{3}{2}} - BS^{\frac{3}{2}}$ ili približno proporcionalno sa



$\frac{3}{2}$ AS prema AB. Odatle sledi da se celokupno vreme može veoma lako pronaći.

Kor. 8. Odatle se dovoljno približno mogu izvesti kretanja tela u sredinama čija je gustina ili ravnomerna ili se pridržava bilo kog određenog zakona. Iz centra C sa intervalima SA, SB, SC itd., koji su neprekidno proporcionalni, opisaćemo nekoliko krugova i pretpostavićemo da se vreme revolucija između obima bilo koja dva od tih krugova i u sredini koju smo tad razmatrali odnosi prema vremenu revolucija u predloženoj sredini približno kao srednja gustina predložene sredine između tih krugova prema srednjoj gustini sredine koju smo tad razmatrali između i tih krugova. Takođe, pretpostavićemo da sečica ugla pod kojim spirala, koju smo ranije odredili i u sredini koju smo tad razmatrali, seče poluprečnik AS, u istom takvom odnosu prema sečici ugla pod kojim nova spirala u predloženoj sredini seče isti taj poluprečnik, kao i to da je broj svih revolucija između ta ista dva kruga približno proporcionalan sa tangentama tih krugova. Ukoliko sve ovo važi između svaka dva kruga, onda će se kretanje nastaviti po svim krugovima. A pod takvim pretpostavkama i bez mnogo teškoća može se shvatiti na kakav način i tokom kog vremena tela kruže u bilo kojoj pravilnoj sredini.

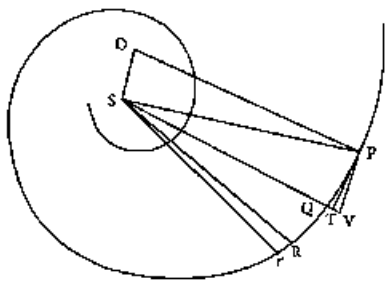
Kor. 9. Iako se ovakva kretanja, koja postaju ekscentrična, izvode po spirali koja se približava ovalnoj figuri, ipak, ako zamislimo da se nekoliko revolucija tih spirala nalaze na istoj međusobnoj udaljenosti i da se istim stepenom približavaju prema centru, kao i spirale koje smo ranije opisali, onda možemo razumeti kako se izvode kretanja tela po spiralama ovakve vrste.

PROPOZICIJA XVI. TEOREMA XIII

Ako je gustina sredine u svakom mestu obrnuto proporcionalna sa rastojanjem tih mesta od nepokretnog centra i ako je centripetalna sila obrnuto proporcionalna sa bilo kojim stepenom istog rastojanja, tvrdim da telo može kružiti po spirali presecajući sve poluprečnike koji su povučeni iz tog centra pod datim uglom.

Ovo je pokazano na isti način kao i u prethodnoj Propoziciji. Naime, ako je centripetalna sila u P obrnuto proporcionalna sa bilo kojim stepenom SP^{n+1} rastojanja SP čiji je indeks $n + 1$, dobi-

ćemo, kao i ranije, da je vreme tokom kog telo opisuje bilo koji luk PQ proporcionalno sa $PQ \times PS^{\frac{1}{2}n}$; otpor u P sa $\frac{Rr}{PQ^2 \times SP^n}$, ili sa $\frac{(1-\frac{1}{2}n) \times VQ}{PQ^2 \times SP^n \times SQ}$, pa prema tome sa $\frac{(1-\frac{1}{2}n) \times OS}{OP^2 \times SP^{n+1}}$, tj. (pošto je $\frac{(1-\frac{1}{2}n) \times OS}{OP}$ poznata veličina) biće obrnuto proporcionalno sa SP^{n+1}. I pošto je brzina obrnuto proporcionalna sa $SP^{\frac{1}{2}n}$, onda će gustina u P biti obrnuto proporcionalna sa SP.



Kor. 1. Otpor se prema centripetalnoj sili odnosi kao $(1 - \frac{1}{2}n) \times OS$ prema OP.

Kor. 2. Ako je centripetalna sila obrnuto proporcionalna sa SP^3, onda će $1 - \frac{1}{2}n$ biti = 0, pa će otpor i gustina sredine takođe biti nula, kao u Prop. IX, Knjige I.

Kor. 3. Ako je centripetalna sila obrnuto proporcionalna sa bilo kojim stepenom poluprečnika čiji je indeks veći od broja 3, onda će se pozitivni otpor promeniti u negativni.

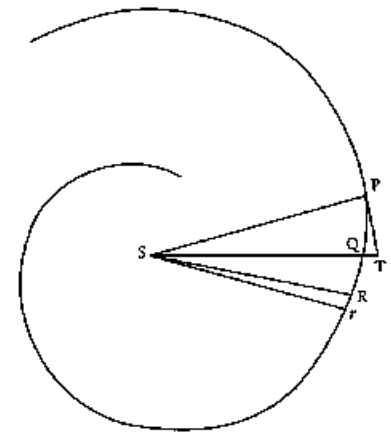
SHOLIJA

Ova propozicija, kao i prethodna, koje se odnose na sredine sa nejednakim gustinama, podrazumevaju se za kretanje telâ koja su toliko mala da se gustina sredine koja je na jednoj strani tela veća nego na drugoj ne razmatraju. Takođe, pretpostavio sam da je otpor, *caeteris paribus*, proporcionalan sa gustinom. Prema tome, u sredinama čija sila otpora nije proporcionalna sa gustinom, gustina se mora uvećati ili umanjiti kako bi se višak otpora oduzeo, a manjak dopunio.

PROPOZICIJA XVII. PROBLEM IV

Pronaći centripetalnu silu i silu otpora sredine pomoću kojih telo, pošto je dat zakon brzine, može kružiti po datoj spirali.

Neka PQR bude spirala. Ako je iz brzine, kojom se telo kreće po veoma malom luku PS, dato vreme i ako je iz visine TQ, koja je proporcionalna sa centripetalnom silom i kvadratom vremena, data ta sila – onda će iz razlike RSr površina PSQ i QSR opisanih



tokom jednakih delova vremena, biti dato usporavanje tog tela, a iz tog usporavanja biće data sila otpora i gustina sredine.

PROPOZICIJA XVIII. PROBLEM V

Ako je dat zakon centripetalne sile, pronaći ćemo gustinu sredine u svakom mestu pomoću koje telo može opisati datu spiralu.

Ukoliko iz centripetalne sile mora biti pronađena brzina u svakom mestu, onda ćemo iz usporenja brzine pronaći gustinu sredine, kao i u prethodnoj Propoziciji.

Međutim, objasnio sam metod za rešavanje ovih problema u desetoj Propoziciji i drugoj Lemi ove knjige, te ne bih dalje zadržavao čitaoca na ovim složenim istraživanjima. Sada ću dodati nešto što se tiče sila pokretnih tela, kao i gustine i otpora onih sredina u kojima se ta kretanja, i ona slična njima, izvode.

ODELJAK V

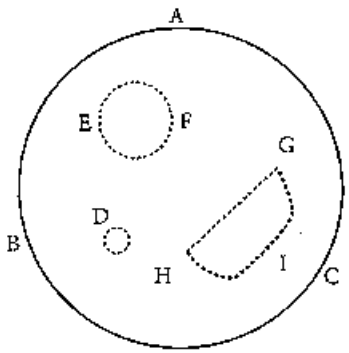
O gustini i sabijanju tečnosti i o hidrostatici

DEFINICIJA TEČNOSTI

Tečnost je bilo koje telo čiji delovi popuštaju bilo kojoj sili koja deluje na njih i koji se, tim popuštanjem, lako međusobno pomeraju.

PROPOZICIJA XIX. TEOREMA XIV

Svi delovi homogene i nepokretne tečnosti koja je sadržana u bilo kom nepokretnom sudu i koji su sabijeni sa svake strane (ostavljajući po strani razmatranja o kondenzaciji, gravitaciji i o svim centripetalnim silama) biće jednako pritisnuti sa svake strane i ostaće na svojim mestima bez ikakvog kretanja koje bi moglo proizaći iz takvog pritiska.



Slučaj 1. Ako je tečnost sadržana u sfernom sudu ABC i ako je ravnomerno sabijena sa svake strane tvrdim da se nijedan njen deo neće pomeriti usled tog pritiska. Jer, ako se bilo koji deo, recimo D, pomeri, onda se svi takvi delovi, koji se sa svake strane nalaze na istoj udaljenosti od centra, neophodno moraju pomeriti tokom istog vremena i istim kretanjem zbog toga što je pritisak na sve njih svugde sličan i jednak i zbog toga što su isključena sva ostala kretanja koja ne proizlaze iz tog pritiska.

Međutim, ako se svi ti delovi približe centru, onda se tečnost mora sabijati ka centru, što je suprotno pretpostavci. Ako se udaljavaju, onda se tečnost mora sabijati ka obimu kruga, što je takođe suprotno pretpostavci. Niti se oni mogu kretati u bilo kom drugom pravcu zadržavajući svoje rastojanje od centra jer bi se, iz istog razloga, mogli kretati u suprotnim pravcima. Ipak, isti deo ne može se istovremeno kretati u suprotnim pravcima. Prema tome, nijedan deo tečnosti neće biti pomeren sa svog mesta.

Slučaj 2. Trvdim da su svi sferni delovi ove tečnosti jednako pritisnuti sa svih strana. Neka je EF sferni deo tečnosti. Ako taj deo nije pritisnust sa svih strana jednako, uvećaćemo manji pritisak sve dok se oni ne izjednače. Tad će svi delovi (prema Slučaju 1) ostati na svojim mestima. Međutim, i pre promene pritiska, oni bi se zadržali u svojim mestima (prema Slučaju 1), pa bi se, prema zakonu tečnosti, dodavanjem novog pritiska oni pomerili sa svog mesta. Sada su ta dva zaključka kontradiktorna, pa je pogrešno reći da sfera EF nije jednako pritisnuta sa svih strana. Q.E.D.

Slučaj 3. Pored toga, tvrdim da različiti sferni delovi imaju jednake pritiske. Jer, susedni sferni delovi pritiskaju se uzajamno i jednako u dodirnoj tački (prema Zakonu III). Ipak (prema Slučaju 2), sa svih strana su pritisnuti istom silom. Prema tome, bilo koja dva sferna dela koja nisu susedna, biće pritisnuta istom silom, usled središnjih sfernih delova koji dodiruju oba ta dela. Q.E.D.

Slučaj 4. Zatim, tvrdim da su svi delovi tečnosti svuda jednako pritisnuti. Jer, bilo koja dva dela mogu u bilo kojim tačkama dodirnuti sferni delovi. Takođe, oni će jednako pritisnuti te sferne delove (prema Slučaju 3), i jednako su obrnuto proporcionalno pritisnuti njima (prema Zakonu III). Q.E.D.

Slučaj 5. Prema tome, pošto je bilo koji deo GHI tečnosti okružen ostalom tečnošću u sudu, i pošto je jednako pritisnut sa svih strana, zatim, pošto se njegovi delovi međusobno jednako pritiskaju, i pošto su međusobno u stanju mirovanja – onda je očigledno da se svi delovi bilo koje tečnosti npr. GHI, koji su jednako pritisnuti sa svih strana, zaista međusobno jednako pritiskaju i da su međusobno u stanju mirovanja. Q.E.D.

Slučaj 6. Prema tome, ako je ta tečnost sadržana u sudu supstance koja je savitljiva, tj., koja nije čvrsta, i ako nije podjednako pritisnuta sa svake strane, onda će ona, prema Definiciji tečnosti, popustiti jačem pritisku.

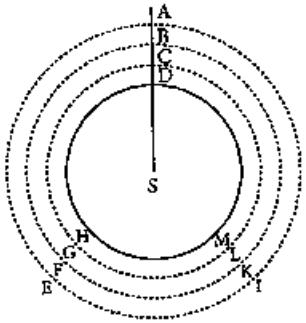
Slučaj 7. Iz ovoga sledi da tečnost u nesavitljivom ili čvrstom sudu neće trpeti više pritiska sa jedne strane, nego sa druge, već će mu u momentu vremena popustiti zato što se čvrsta strana suda ne savija savijanjem tečnosti. Ipak, tečnost će tim savijanjem pritiskati suprotnu stranu, tako da će se pritisak sa svih strana izjednačiti. I pošto je tečnost, čim počne da se udaljava od dela koji je najviše pritisnut, suprotstavljena otporu suda na suprotnoj strani, onda će se pritisak svuda momentalno smanjiti do jednakosti, bez ikakvog lokalnog kretanja. Odatle sledi da će se delovi tečnosti (prema Slučaju 5) međusobno i jednako pritiskati, kao i da će biti međusobno u stanju mirovanja. Q.E.D.

Kor. Na taj način se međusobno kretanje delova tečnosti ne može izmeniti pritiskom na spoljašnjim površinama, osim ako su same te površine negde promenjene, ili ako svi delovi tečnosti jačim ili slabijim međusobnim pritiskanjem međusobno klize sa većom ili manjom teškoćom.

PROPOZICIJA XX. TEOREMA XV

Ako svi delovi sferne tečnosti, koji su homogeni na jednakom rastojanju od centra i koji leže na sfernom koncentričnom dnu, teže ka centru celine, onda će dno podržavati težinu cilindra čija je osnova jednaka površini dna i čija je visina jednaka sa okolnom tečnošću.

Neka je DHM površina dna, a AEI gornja površina tečnosti. Neka je tečnost bezbrojnim sfernim površinama BFK, CGL itd. podeljena na koncentrične slojeve jednake debljine i zamislimo da sila gravitacije deluje samo na gornje površine svakog sloja i da su delovanja jednaka na jednakim delovima svih površina. Prema tome, gornja površina AE trpi pritisak samo od svoje gravitacije, pomoću koje će svi delovi gornjeg sloja, kao i druga površina BFK, biti (prema Prop. XIX) jendako pritisnuti shodno svojoj veličini. Na isti način druga površina BFK trpi pritisak samo od svoje gravitacije, koja kada se doda prethodnoj sili čini pritisak dvostrukim. Na treću površinu CGL, shodno svojoj veličini, deluje taj pritisak zajedno sa sopstvenom gravitacijom, i tako čine pritisak trostrukim. A, shodno tome, četvrta površina trpi četvorostruki pritisak, peta petostruki, i tako dalje. Zbog toga, pritisak koji deluje na sve površine nije proporcionalan sa postojanom veličinom okolne tečnosti, već sa brojem slojeva koji dosežu do gornje površine tečnosti i jednak je sa gravitacijom najnižeg sloja pomnoženom sa brojem slojeva, tj., proporcionalan je sa masom tela čiji je krajnji odnos prema masi gorepomenutog cilindra (kada je broj slojeva uvećan, a njihova debljina umanjena, *ad infinitum*, tako da delovanje gravitacije od najniže prema najvišoj površini može postati stalno) jednak odnosu jednakosti. Prema tome, najniža površina podnosi težinu gore određenog cilindra. Sličnim rasuđivanjem, Propozicija bi važila i kada bi se gravitacija, u zavisnosti od rastojanja do centra, umanjivala po bilo kom zakonu, kao i kada bi tečnost bila ređa gore, a gušća dole. Q.E.D.



Kor. 1. Odatle sledi da dno nije pritisnuto celokupnom težinom okolne tečnosti, već samo podnosi onaj njen deo koji je opisan u Propoziciji. Ostatak težine zadržava se u obliku luka sfernim oblikom tečnosti.

Kor. 2. Veličina pritiska uvek je ista na jednakim rastojanjima od centra bez obzira na to da li pritisak deluje na površinu paralelno sa horizontom, vertikalno, ili koso i bez obzira na to da li se tečnost, koja se kreće prema gore usled pritisnutih površina, podiže vertikalno u pravolinijskom smeru, ili se širi koso po savijenim šupljinama i kanalima, bilo da su ti prolazi pravilni ili nepravilni, široki ili uski. Činjenicu da se pritisak ne menja ni u jednoj od ovih okolnosti možemo potvrditi primenjivanjem dokaza ove teoreme na nekoliko slučajeva ograničenja tečnosti.

Kor. 3. Iz istog tog dokaza možemo potvrditi (prema Prop. XIX) da delovi teške tečnosti ne stiču međusobna kretanja pomoću pritiska okolne težine, osim onog kretanja koje nastaje kondenzacijom.

Kor. 4. Zbog toga, ako se neko drugo telo iste specifične gravitacije, i lišeno kondenzacije, uroni u tu tečnost, ono neće steći kretanje pritiskom okolne težine, neće se ni uvećati ni smanjiti, niti će izmeniti svoj oblik. Ako je ono sferno, zadržaće svoj oblik, bez obzira na pritisak; ako je kvadratno, zadržaće svoj oblik, bilo da je meko ili tečno, bilo da slobodno pliva po tečnosti ili leži na dnu. Bilo koji unutrašnji deo tečnosti u istom je stanju kao i uronjena tela, a jednaka je stvar i sa svim uronjenim telima koja imaju istu veličinu, oblik i specifičnu gravitaciju. Ako se uronjeno telo, zadržavajući svoju težinu, rastopi i zadobije oblik tečnosti, to telo će se, ako se ranije kretalo prema gore ili dole ili ako je zadobilo bilo kakav novi oblik usled ptitiska, isto tako kretati prema gore ili dole, ili će zadobiti nov oblik; to će se takođe desiti zato što njegova gravitacija i drugi uzroci kretanja ostaju isti. Međutim (prema Slučaju 5 Prop. XIX), ono će sada biti u stanju mirovanja i zadržaće svoj oblik, kao i u ranijem slučaju.

Kor. 5. Prema tome, telo će potonuti ako je naročito teže od okolne tečnosti, a ono koje je naročito lakše, isplivaće, pri čemu će zadržati toliku količinu kretanja i izmeniće svoj oblik u zavisnosti od viška ili manjka koji je gravitacija sposobna da proizvede. A taj višak ili manjak isti je sa impulsom koji deluje na telo, koje bi inače bilo u ravnoteži sa ostalim delovima tečnosti i može se uporediti sa viškom ili manjkom težine na jednom tasu vage.

Kor. 6. Na taj način, tela koja su smeštena u tečnosti imaju dvostruku gravitaciju, jednu istinsku i apsolutnu, a drugu vidljivu, uobičajenu i relativnu. Apsolutna gravitacija je celokupna sila kojom telo teži prema dole; relativna i uobičajena gravitacija je višak gravitacije kojom telo teži prema dole više od okolne tečnosti. Pomoću prve vrste gravitacije delovi svih tečnosti i tela teže ka njihovim sopstvenim mestima, pa zbog toga njihove težine uzete zajedno čine težinu celine. Jer, celina uzeta zajedno je teška, kao što je slučaj u sudovima punim tečnosti, pri čemu je težina celine jednaka težini svih delova, pa je zbog toga i sastavljena od njih. Prema drugoj vrsti gravitacije, tela ne teže ka svojim mestima, tj., međusobno uporedeni, nijedno ne preovladava, već ometajući jedno drugom nastojanje da padaju, ona ostaju na svojim sopstvenim mestima, kao da nisu teška. Te stvari koje se nalaze u vazduhu i koje ne preovladavaju, uobičajeno se ne smatraju teškima. A one koje preovladavaju, uobičajeno se smatraju teškima utoliko ukoliko one nisu izložene težini vazduha. Uobičajena težina nije ništa drugo do višak istinske težine u odnosu na težinu vazduha. Odatle, takođe uobičajeno, sledi da se stvari nazivaju lakima kada su manje teške i kada se popuštajući preovladavajućem vazduhu penju ka gore. Ipak, one su samo relativno lake, a ne istinski takve, jer one *in vacuo* padaju. Tako su i tela u vodi, koja se većom ili manjom gravitacijom spuštaju ili podižu, relativno i očigledno teža ili lakša, pa je njihova relativna i očigledna gravitacija ili nestalnost višak ili manjak kojom njihova istinska gravitacija ili prekoračuje gravitaciju vode ili je njome prekoračena. Međutim, ta tela se ne spuštaju preovladavanjem, niti se podižu popuštanjem preovladavajućoj tečnosti; ipak, ona povećavaju težinu celine svojom istinskom težinom, dok relativno i po uobičajenom shvatanju ona nemaju težinu u vodi. Dokazivanje za sve ove slučajeve je jednako.

Kor. 7. Sve ovo što je dokazano, a što se tiče gravitacije, može se primeniti i na bilo koje druge centripetalne sile.

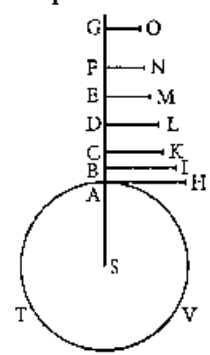
Kor. 8. Prema tome, ako na sredinu u kojoj se telo kreće deluje ili njena sopstvena gravitacija ili bilo koja druga centripetalna sila, i ako na telo mnogo jače deluje ta ista sila – onda je razlika tih sila sáma pokretačka sila pod kojom sam u prethodnoj Propoziciji podrazumevao centripetalnu silu. Međutim, ako na telo slabije deluje ta sila, onda razlika silâ postaje centrifugalna sila, i treba je smatrati takvom.

Kor. 9. Ipak, pošto tečnosti, dok vrše pritisak na obuhvaćenim telima, ne menjaju svoj spoljašnji oblik, takođe sledi (prema Kor., Prop. XIX) da ona neće izmeniti ni međusobni odnos unutrašnjih delova. Prema tome, ako uronimo životinje i ako se svi događaji pojave iz kretanja njihovih delova, onda tečnost neće ni povrediti uronjena tela, niti će pokrenuti bilo kakav utisak, osim ukoliko se ta tela mogu sabiti pritiskom. Slučaj je isti za bilo koji sistem tela obuhvaćenih pritiskajućom tečnošću. Na sve delove sistema delovaće isto kretanje kao kada bi bili u vakuumu. I, zadržali bi samo svoju relativnu gravitaciju, osim ukoliko bi tečnost mogla na neki način da pruži otpor kretanju, ili kada bi bila neophodna za njihovo prianjanje pomoću pritiska.

PROPOZICIJA XXI. TEOREMA XVI

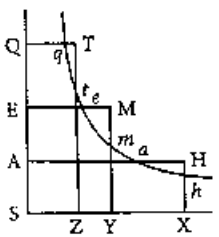
Ako je gustina bilo koje tečnosti proporcionalna sa pritiskom, i ako su njeni delovi privučeni prema dole centripetalnom silom koja je obrnuto proporcionalna sa rastojanjem do centra – tvrdim da će, ako su ta rastojanja uzeta neprekidno proporcionalno, i gustine tečnosti na istim tim rastojanjima takođe biti neprekidno proporcionalne.

Neka ATV označava sferno dno tečnosti, S centar, a SA, SB, SC, SD, SE, SF itd. neprekidno proporcionalna rastojanja. Podignućemo normale AH, BI, CK, DL, EM, FN itd. koje će biti proporcionalne sa gustinama sredine u mestima A, B, C, D, E i F. Tada će specifične gravitacije u tim mestima biti proporcionalne sa $\frac{AH}{AS}$, $\frac{BI}{BS}$, $\frac{CK}{CS}$ itd. ili, što je isto, sa $\frac{AH}{AB}$, $\frac{BI}{BC}$, $\frac{CK}{CD}$. Na početku ćemo pretpostaviti da se te gravitacije ravnomerno nastavljaju od A prema B, od B prema C, od C prema D, itd. smanjujući se postepeno u tačkama B, C, D itd., a te specifične gravitacije kada se pomnože sa visinama AB, BC, CD itd. daju pritiske AH, BI, CK itd., koji deluju na dno ATV (prema Teoriji XV). Na taj način je čestica A izložena svim pritiscima AH, BI, CK, DL itd. koji se nastavljaju *in infinitum*; čestica B izložena je svim pritiscima osim prvog AH; čestica C, svim pritiscima osim prva dva AH i BI, i tako dalje. Zbog toga se gustina AH prve čestice A odnosi prema gustini BI druge čestice B kao zbir svih



AH + BI + CK + DL, *in infinitum*, prema zbiru svih BI + CK + DL itd. Dok se BI, gustina druge čestice B, odnosi prema CK, gustini treće čestice C, kao zbir svih BI + CK + DL itd. prema zbiru svih CK + DL itd. Na taj način su ovi zbirovi proporcionalni sa njihovim razlikama AH, BI, CK itd. pa su zato neprekidno proporcionalni (prema Lemi I ove knjige). Zbog toga su razlike AH, BI, CK itd. koje su proporcionalne sa zbirovima, takođe neprekidno proporcionalne. Pošto su gustine u mestima A, B, C itd. proporcionalne sa AH, BI, CK itd., one će takođe biti neprekidno proporcionalne. Nastavljajući s prekidima i, *ex aequo*, na rastojanjima SA, SC, SE neprekidno proporcionalnim, gustine AH, CK, EM biće neprekidno proporcionalne. Sličnim rasuđivanjem, na bilo kojim rastojanjima SA, SD, SG, koje su neprekidno proporcionalne, i gustine AH, DL, GO biće neprekidno proporcionalne. Neka se sada tačke A, B, C, D, E, itd. podudaraju, tako da progresija specifičnih gravitacija od dna A do vrha tečnosti može biti neprekidna. Tada će na bilo kojim rastojanjima SA, SD, SG koja su neprekidno proporcionalna, gustine AH, DL, GO, koje su takođe neprekidno proporcionalne, i u tom slučaju biti neprekidno proporcionalne. Q.E.D.

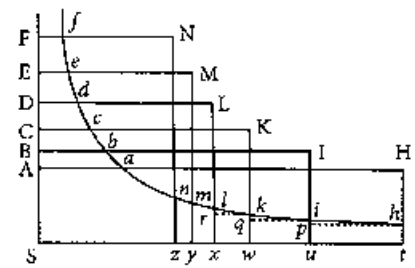
Kor. Prema tome, ako je data gustina tečnosti za dva mesta, recimo u A i E, onda možemo dobiti i njenu gustinu u bilo kom drugom mestu Q. Sa centrom S i pravougaonim asimptotama SQ i SX opisaćemo hiperbolu koja preseca normale AH, EM i QT u tačkama *a*, *e* i *q*, kao i normale HX, MY i TZ koje padaju na asimptotu SX u *h*, *m* i *t*. Neka se površina Y*mt*Z odnosi prema datoj površini Y*mh*X kao data površina E*eq*Q prema datoj površini E*ea*A. Onda će produžena linija Z*t* preseći liniju Q*t* proporcionalnu sa gustinom. Ako su linije SA, SE, SQ neprekidno proporcionalne, onda će površine E*eq*Q i E*ea*A biti jednake, pa će zato i površine Y*mt*Z i X*hm*Y, proporcionalne sa njima, takođe biti jednake, a linije SX, SY i SZ, tj., AH, EM i QT biće neprekidno proporcionalne, kao što bi i trebale da budu. A ako linije SA, SE i SQ zadobiju bilo koji drugi red u nizu neprekidnih proporcija, onda će i linije AH, EM i QT, usled proporcionalne hiperbolične površine, zadobiti isti taj red u nekom drugom nizu veličina koje su neprekidno proporcionalne.



PROPOZICIJA XXII. TEOREMA XVII

Ako je gustina bilo koje tečnosti proporcionalna sa pritiskom i ako su njeni delovi privučeni prema dole gravitacijom koja je obrnuto proporcionalna sa kvadratom rastojanja od centra – tvrdim da će, ukoliko su rastojanja uzeta u harmonijskoj progresiji, gustine tečnosti na tim rastojanjima biti u geometrijskoj progresiji.

Neka S označava centar, a SA, SB, SC, SD i SE rastojanja u F geometrijskoj progresiji. Podignućemo normale AH, BI, CK itd., koje će biti proporcionalne sa gustinama tečnosti u mestima A, B, C, D, E itd., dok će specifične gravitacije u tim mestima biti proporcionalne sa $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, $\frac{CK}{SC}$ itd. Pretpostavićemo da se te gravitacije ravnomerno nastavljaju, prva od A ka B, druga od B ka C, treća od C ka D itd. Kada njih pomnožimo sa visinama AD, BC, CD, DE itd. ili, što je isto, sa rastojanjima SA, SB, SC itd., koja su proporcionalna sa tim visinama, dobićemo $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, $\frac{CK}{SC}$ itd., tj. dobićemo eksponente pritiska. Prema tome, pošto su gustine proporcionalne sa zbirom tih pritisaka, onda će razlike AH – BI i BI – CK itd., gustinâ biti proporcionalne sa razlikom tih zbirova $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, $\frac{CK}{SC}$ itd. Sa centrom S i sa asimptotama SA i S*x* opisaćemo hiperbolu koja preseca normale AH, BI, CK itd. u *a*, *b*, *c* itd., kao i normale H*t*, I*u*, K*w*, koje padaju na asimtotu S*x* u *h*, *i* i *k*. U tom slučaju će razlike gustina *tu*, *uw* itd. biti proporcionalne sa $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$ itd. Pravougaonici *tu* × *th*, *uw* × *ui* itd., ili *tp*, *up* itd., biće proporcionalni sa $\frac{AH \times th}{SA}$, $\frac{BI \times ui}{SB}$ itd., tj. sa A*a*, B*b* itd. Prema prirodi hiperbole, SA se prema AH ili S*t* odnosi kao *th* prema A*a*, pa je zbog toga $\frac{AH \times th}{SA}$ jednako sa A*a*. Sličnim rasuđivanjem, $\frac{BI \times ui}{SB}$ jednako je sa B*b* itd. Ipak, A*a*, B*b*, C*c* itd. neprekidno su proporcionalne, pa su zato proporcionalne i sa svojim razlikama A*a* – B*b*, B*b* – C*c* itd., a zbog toga su pravougaonici *tp*, *ug* itd. proporcionalni sa tim razlikama, kao i sa zbirom pravougaonika *tp* + *uq*, ili *tp* + *uq* + *wr* prema zbiru razlika A*a* – C*c* ili A*a* – D*d*. Pretpostavićemo da je nekoliko ovih članova i zbir svih razlika, recimo A*a* – F*f*,



proporcionalno sa zbirom svih pravougaonika, recimo sa *zthn*. Ako povećamo broj članova i umanjimo rastojanja između tačaka A, B, C itd., *in infinitum*, onda će ti pravougaonici postati jednaki sa hiperboličnom površinom *zthn*, pa će zbog toga razlika A*a* – F*f* biti proporcionalna sa tom površinom. Ako sada uzmemo da su bilo koja rastojanja, recimo SA, SD i SF, u harmonijskoj progresiji, onda će razlike A*a* – D*d* i A*a* – F*f* biti jednake. Odatle sledi da će površine *thlx* i *xlnz*, proporcionalne sa tim razlikama, biti međusobno jednake, a gustine S*t*, S*x* i S*z*, tj., AH, DI i FN, biće neprekidno proporcionalne. Q.E.D.

Kor. Prema tome, ako su date bilo koje dve gustine tečnosti, recimo AH i BI, onda će biti poznata i površina *thiu*, koja odgovara njihovim razlikama *tu*. Pronaći ćemo gustinu FN na bilo kojoj visini SF, tako što ćemo uzeti da se površina *thnz* prema toj datoj površini *thiu* odnosi kao razlika A*a* – F*f* prema razlici A*a* – B*b*.

SHOLIJA

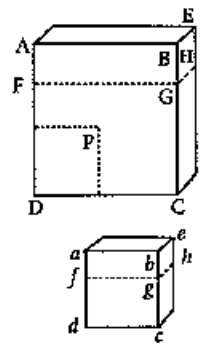
Sličnim rasuđivanjem, može se dokazati da će, ako se gravitacija delića tečnosti umanjuje za treći stepen rastojanja od centra i ako je veličina koja je obrnuto proporcionalna sa kvadratima rastojanja SA, SB, SC itd., (tj., sa $\frac{SA^3}{SA^2}$, $\frac{SA^3}{SB^2}$, $\frac{SA^3}{SC^2}$), uzeta u aritmetičkoj progresiji, gustine AH, BI, CK itd. biti u geometrijskoj progresiji. Ukoliko se gravitacija umanjuje za četvrti stepen rastojanja i ukoliko je veličina koja je obrnuto proporcionalna sa kubnim rastojanjima (tj., sa $\frac{SA^4}{SA^3}$, $\frac{SA^4}{SB^3}$, $\frac{SA^4}{SC^3}$ itd.), uzeta u aritmetičkoj progresiji, onda će gustine AH, BI, CK itd. biti u geometrijskoj progresiji, i tako dalje *in infinitum*. Opet, ako je gravitacija delića tečnosti ista na svim rastojanjima i ako su rastojanja u aritmetičkoj progresiji, onda će gustine biti u geometrijskoj progresiji, kao što je dr Halej (E. Halley) i pronašao. Ako je gravitacija proporcionalna sa rastojanjem i ako su kvadrati rastojanja u aritmetičkoj progresiji, gustine će biti u geometrijskoj progresiji, i tako dalje *in infinitum*. Isto će se desiti i kada je gustina tečnosti koja je sabijena pritiskom proporcionalna sa silom pritiska ili, što je isto, kada je prostor ispunjen tečnošću obrnuto proporcionalan sa tom silom. Mogu se pretpostaviti i drugi zakoni sabijanja, npr. da je pritiskajuća sila na kub proporcionalna sa bikvadratom gustine, ili da je trostruki odnos sila isti sa četvorostrukim odnosom gustina, a u tom slučaju, ako je gravitacija obrnuto proporcionalna sa kvadratom rastojanja od centra, gustina

će biti obrnuto proporcionalna sa kubnim rastojanjem. Ako pretpostavimo da je pritiskajuća sila na kub proporcionalna sa petim stepenom gustine i ako je gravitacija obrnuto proporcionalna sa kvadratom rastojanja, onda će gustina biti obrnuto proporcionalna sa polukubnim rastojanjem. Ako pretpostavimo da je pritiskajuća sila proporcionalna sa kvadratom gustine i ako je gravitacija obrnuto proporcionalna sa kvadratom rastojanja, onda će gustina biti obrnuto proporcionalna sa rastojanjem. Pregledanje svih slučajeva koji mogu biti ponuđeni bilo bi predugačko. Ipak, eksperimentom je utvrđeno da je gustina vazduha ili precizno ili približno precizno proporcionalna sa pritiskajućom silom. Odatle sledi da je gustina vazduha u atmosferi Zemlje proporcionalna sa težinom celokupnog okolnog vazduha, tj., sa visinom žive u barometru.

PROPOZICIJA XXIII. TEOREMA XVIII

Ako se tečnost sastoji iz delića koji se međusobno odbijaju i ako je gustina proporcionalna sa pritiskom, onda će centrifugalna sila tih delića biti obrnuto proporcionalna sa rastojanjima između njihovih centara. I, *vice versa*, delići, koji se međusobno odbijaju sa silama koje su obrnuto proporcionalne sa rastojanjima između njihovih centara, sačinjavaju elastičnu tečnost čija je gustina proporcionalna sa pritiskom.

Ako pretpostavimo da je tečnost sadržana u kockastom prostoru ACE i da je potom svedena sabijanjem na manji kockasti prostor *ace* – onda će rastojanja delića, koji zadržavaju svoje međusobne položaje u oba prostora, biti proporcionalna sa stranama kocke AB i *ab*, a gustine sredina biće obrnuto proporcionalne sa AB^3 i ab^3. Na ivici veće kocke ABCD uzmimo da je kvadrat DP jednak sa ivicom *db* manje kocke. Onda će se, prema pretpostavci, pritisak kojim kvadrat DP deluje na sadržanu tečnost odnositi prema pritisku kojim kvadrat *db* deluje na sadržanu tečnost kao što se međusobno odnose gustine sredina, tj., kao ab^3 prema AB^3. Međutim, pritisak kojim kvadrat DB deluje na sadržanu tečnost odnosi se prema pritisku kojim kvadrat DP deluje na istu tu tečnost kao kvadrat DB



prema kvadratu DP, tj., kao AB^2 prema ab^2. Prema tome, *ex aequo*, pritisak kojim kvadrat DB deluje na tečnost odnosi se prema pritisku kojim kvadrat *db* deluje na tečnost kao *ab* prema AB. Neka su ravni FGH i *fgh* povučene kroz sredine dve kocke i neka dele tečnost na dva dela. Ti delovi će jedan na drugom međusobno vršiti pritisak istim silama kojima ravni AC i *ac* vrše pritisak na njih, tj. u istoj proporciji kao *ab* prema AB. Zbog toga su centifugalne sile, pomoću kojih se ovi pritisci održavaju, u istom tom odnosu. Pošto je broj delića jednak, kao i njihov položaj u obema kockama, onda će sile, kojima svi delići međusobno deluju jedni na druge, preko ravni FGH i *fgh*, biti proporcionalne sa silama kojima svaki zasebni delić deluje na drugi zasebni delić. Stoga se sile, kojima svaka zasebni delić deluje na drugi zasebni, preko ravni FGH u većoj kocki, odnose prema silama, kojima svaki zasebni delić deluje na drugi zasebni delić, preko ravni *fgh* u manjoj kocki, kao *ab* prema AB, tj., obrnuto su proporcionalne sa međusobnim rastojanjima između delića. Q.E.D.

I, *vice versa*, ako su sile jednog delića obrnuto proporcionalne sa rastojanjima, tj., obrnuto proporcionalne sa stranama kocki AB i *ab*, onda će se i zbir tih sila nalaziti u tom istom odnosu; pritisci strana DB i *db* biće proporcionalni sa zbirom sila; pritisak kvadrata DP će se prema pritisku strane DB odnositi kao ab^2 prema AB^2. I, *ex aequo*, pritisak kvadrata DP odnosi se prema pritisku strane *db* kao i ab^3 prema AB^3, tj., sila pritiska u jednom prema sili pritiska u drugom odnose se kao gustina u prethodnom prema gustini u poslednjem. Q.E.D.

SHOLIJA

Sličnim rasuđivanjem, ako je centrifugalna sila delića obrnuto proporcionalna sa kvadratom rastojanja između centara, onda će kub sile koje vrše pritisak biti proporcionalne sa bikvadratnim gustinama. Ako su centrifugalne sile obrnuto proporcionalne sa kubnim ili četvrtim stepenom rastojanja, onda će kubne sile koje vrše pritisak biti proporcionalne sa petim ili šestim stepenom gustina. I, uopšteno, ako sa D označimo rastojanje, a sa E gustinu sabijene tečnosti, i ako je centrifugalna sila obrnuto proporcionalna sa bilo kojim stepenom rastojanja D^n, čiji je indeks broj n, onda će sila koja vrši pritisak biti proporcionalna sa kubnim korenom stepena E^{n+2}, čiji je indeks broj $n + 2$, i obrnuto. Sve ovo podrazumeva se za deliće

čija se centrifugalna sila završava u onim delićima koji se nalaze u njihovoj okolini, ili koje se ne rasprostiru dalje od njih. Kao primer uzećemo magnetna tela. Njihovo svojstvo privlačenja gotovo da se završava u telima koja se nalaze pored njih i koja su iste vrste. Svojstvo magneta se smanjuje umetanjem gvozdene ploče, koja ga gotovo obustavlja, jer tela koja se nalaze dalje nisu privučena toliko magnetom koliko gvozdenom pločom. Na takav način, ako delići odbijaju druge deliće iste vrste koji se nalaze pored njih i ako pritom ne deluju na one udaljene, onda će se tečnost, koju smo razmatrali u ovoj propoziciji, sastojati iz takvih delića. Ako se to svojstvo bilo kog delića rasprostire u svim pravcima, *in infinitum*, biće neophodna jača sila kako bi proizvela jednako sabijanje veće količine tečnosti. Međutim, pitanje da li postoje elastične tečnosti koje se sastoje iz delića koji se na takav način međusobno odbijaju – zapravo je fizičko pitanje. Mi smo ovde matematički pokazali svojstva tečnosti koje se sastoje iz delića takve vrste, a odatle filozofi mogu nastaviti raspravu o tom pitanju.

ODELJAK VI

O kretanju klatna pri otporu

PROPOZICIJA XXIV. TEOREMA XIX

Količina materije u klatnima, čiji su centri oscilacije na jednakom rastojanju od centra kačenja, međusobno se odnose kao proizvod težine i kvadrata vremena oscilacija u vakuumu.

Brzina, koju data sila može proizvesti za datu materiju u datom vremenu, direktno je proporcionalna sa silom i vremenom, a obrnuto sa materijom. Što je veća sila ili vreme, i što je manja materija, biće proizvedena veća brzina. To je očigledno prema Zakonu kretanja II. Sada, ako su klatna iste dužine, onda su pokretačke sile na mestima jednako udaljenim od normala proporcionalne sa težinama. Ako, zbog toga, dva tela koja osciluju opisuju jednake lukove, i ako su ti lukovi podeljeni na jednake delove, i pošto su vremena tokom kojih tela opisuju svaki od odgovarajućih delova lukova proporcionalna sa vremenima cele oscilacije, onda će brzine u odgovarajućim delovima oscilacije biti direktno proporcionalne sa pokretačkim silama i celokupnim vremenom oscilacije, a obrnuto

sa količinama materije. Prema tome, količine materije direktno su proporcionalne sa silama i vremenima oscilacija, a obrnuto sa brzinama. Ipak, pošto su brzine obrnuto proporcionalne sa vremenima, onda su vremena direktno, a brzine obrnuto proporcionalne sa kvadratima vremena. Zato su količine materije proporcionalne sa pokretačkim silama i kvadratima vremena, tj., sa težinama i kvadratima vremena. Q.E.D.

Kor. 1. Prema tome, ako su vremena jednaka, onda će količine materija u svakom telu biti proporcionalne sa težinama.

Kor. 2. Ako su težine jednake, onda će količine materija biti proporcionalne sa kvadratima vremena.

Kor. 3. Ako su količine materija jednake, onda će težine biti obrnuto proporcionalne sa kvadratima vremena.

Kor. 4. Pošto su kvadrati vremena, *caeteris paribus*, proporcionalni sa dužinama klatna, i ako su vremena i količine materija jednake, onda će težina biti proporcionalna sa dužinom klatna.

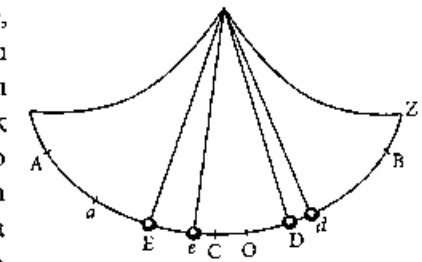
Kor. 5. I, uopšte, količina materije u klatnu direktno je proporcionalna sa težinom i kvadratom vremena, a obrnuto sa dužinom klatna.

Kor. 6. Međutim, u neotpornoj sredini, količina materije u klatnu direktno je proporcionalna sa relativnom težinom i kvadratom vremena, a obrnuto sa dužinom klatna. Jer, relativna težina jeste pokretačka sila tela u bilo kojoj teškoj sredini, kao što je i pokazano ranije. Prema tome, u takvoj neotpornoj sredini ponaša se isto kao i apsolutna težina u vakuumu.

Kor. 7. Odatle sledi metod za međusobno upoređivanje tela prema količini materije u svakom, kao i metod za upoređivanje težina istog tela u različitim mestima, kako bi na taj način saznali promenu njegove gravitacije. Pomoću eksperimenata sa velikom preciznošću uvek sam pronalazio da je količina materije u telima proporcionalna sa njihovim težinama.

PROPOZICIJA XXV. TEOREMA XX

Klatna koja se nalaze u bilo kojoj sredini i na koja deluje otpor proporcionalan sa momentima vremena i klatna koja se kreću u neotpornoj sredini sa istom specifičnom gravitacijom, izvode svoje oscilacije na cikloidi tokom istog vremena i zajedno opisuju proporcionalne delove lukova.



Neka je AB luk cikloide, koji bi telo D, dok osciluje u neotpornoj sredini, opisalo u bilo kom vremenu. Ako luk presečemo na pola u C, tako da C može biti najniža tačka tog luka, onda će sila ubrzanja koja deluje na telo u bilo kom mestu D, *d* ili E biti proporcionalna sa dužinom luka CD, C*d* ili CE. Ako tu silu predstavimo tim istim lukom; i pošto je otpor proporcionalan sa momentom vremena, pa je zbog toga poznat, neka je predstavljen kao dati deo CO cikloidnog luka. Uzmimo da je luk O*d* u istom odnosu prema luku CD kao luk OB prema luku CB. Onda će sila, koja deluje na telo u *d* u neotpornoj sredini, i pošto predstavlja višak sile C*d* u odnosu na otpor CO, biti predstavljena lukom O*d* i odnosiće se, zbog toga, prema sili koja deluje na telo D u neotpornoj sredini u mestu D kao što se luk O*d* odnosi prema luku CD, a, takođe, u mestu B, odnosiće se kao luk OB prema luku CB. Prema tome, ako dva tela D i *d* idu od mesta B i ako na njih deluju te sile, i pošto su sile na početku proporcionalne sa lukom CB ili OB, onda će prve brzine i lukovi koji su prvi opisani biti u istom odnosu. Zbog toga će sile, pošto su proporcionalne sa lukovima CD i O*d*, ostati u istom odnosu kao i na početku, pa će zato tela zajedno nastaviti da opisuju lukove u istom tom odnosu. Odatle sledi da će sile i brzine, kao i preostali lukovi CD i O*d*, uvek biti proporcionalni sa celim lukovima CB i OB, pa će zbog toga preostali lukovi biti opisani zajedno. Zato će dva tela D i *d* zajedno stići do mestâ C i O – ono koje se kreće u neotpornoj sredini do mesta C, a ono koje se kreće u otpornoj sredini do mesta O. Sada, pošto su brzine u C i O proporcionalne sa lukovima CB i OB, onda će lukovi, koja tela opisuju kada nastave da se kreću dalje, biti u istom tom odnosu. Neka su ti lukovi CE i O*e*. Sila kojom je telo D u neotpornoj sredini usporeno u E, proporcionalna je sa CE, a sila kojom je telo *d* u otpornoj sredini usporeno u *e*, proporcionalna je sa zbirom sile C*e* i otpora CO, tj., sa O*e*. Zbog toga se sile kojima su tela usporena međusobno odnose kao lukovi CB i OB, proporcionalno sa lukovima CE i O*e*, a usled toga će i brzine, koje su usporene u datom odnosu, ostati u tom datom odnosu. Brzine i lukovi opisani tim brzinama uvek će se međusobno nalaziti u tom datom odnosu lukova CB i OB i ukoliko uzmemo da su celokupni lukovi

AB i *a*B u tom istom odnosu, onda će tela D i *d* opisati te lukove zajedno, a u mestima A i *a* zajedno će izgubiti svoja kretanja. Odatle sledi da su celokupne oscilacije izohrone, tj., izvedene u jednakim vremenima i da su bilo koji delovi lukova BD, B*d* ili BE, B*e*, koji su opisani zajedno, proporcionalni sa celokupnim lukovima BA i B*a*. Q.E.D.

Kor. Prema tome, najbrže kretanje u otpornoj sredini ne dešava se u najnižoj tački C, već je pronađeno u tački O, u kojoj je celokupan i opisan luk B*a* podeljen na dva dela. A telo, koje nastavlja da se kreće odatle ka *a*, usporeno je u istom onom odnosu u kom je ranije ubrzano tokom podizanja od B ka O.

PROPOZICIJA XXVI. TEOREMA XXI

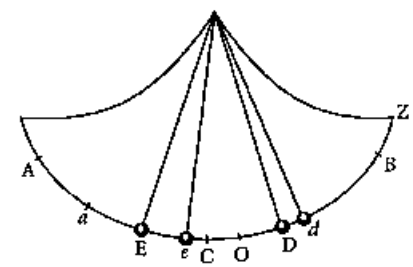
Okačena tela, na koja deluje otpor proporcionalan sa brzinom, izohrono osciluju po cikloidi.

Ako dva tela, koja su na jednakom rastojanju od njihovih centara kačenja, opisuju pri oscilovanju nejednake lukove i ako se brzine u odgovarajućim delovima lukova međusobno odnose kao ti lukovi, onda će se otpori, koji su proporcionalni sa brzinama, takođe međusobno odnositi kao ti isti lukovi. Prema tome, ako se ti otpori oduzmu ili dodaju pokretačkim silama, koje nastaju iz gravitacije proporcionalne sa tim lukovima, onda će se razlike ili zbirovi međusobno odnositi kao ti lukovi i pošto je uvećanje ili smanjenje brzina proporcionalno sa tim razlikama ili zbirovima, onda će brzine uvek biti proporcionalne sa celokupnim lukovima. Odatle sledi da će brzine, ukoliko su u bilo kom slučaju proporcionalne sa celokupnim lukovima, uvek ostati u tom međusobnom odnosu. Međutim, na početku kretanja, kada tela počinju da padaju i da opisuju te lukove, sile, koje su u tom vremenu proporcionalne sa lukovima, proizvešće brzine proporcionalne sa lukovima. Zbog toga će brzine uvek biti proporcionalne sa lukovima koji će se opisati, pa će zato lukovi i biti opisani istovremeno. Q.E.D.

PROPORZICIJA XXVII. TEOREMA XXII

Ako na klatna deluje otpor proporcionalan sa kvadratom njihovih brzina, onda će razlika između vremena oscilacija u otpornoj sredini i vremena oscilacija u neotpornoj sredini sa istom specifičnom gravitacijom biti približno proporcionalna sa opisanim lukovima pri oscilovanju.

Ako jednaka klatna u otpornoj sredini opisuju nejednake lukove A i B, onda će se otpor tela u luku A odnositi prema otporu tela u odgovarajućem delu luka B kao kvadrati brzina, tj., približno kao A^2 prema B^2. Ako se otpor u luku B odnosi prema otporu u luku A kao AB prema AA, onda će (prema poslednjoj Prop.) vremena u lukovima A i B biti jednaka. Odatle sledi da će otpor AA u luku A, ili AB u luku B, uzrokovati višak vremena u luku A u odnosu na vreme u neotpornoj sredini, a otpor BB uzrokovaće višak vremena u luku B u odnosu na vreme u neotpornoj sredini. Međutim, ti viškovi približno su proporcionalni sa delujućim silama AB i BB, tj., sa lukovima A i B. Q.E.D.



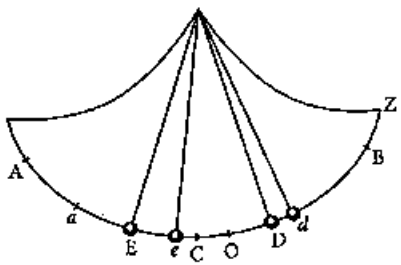
Kor. 1. Iz vremena oscilacija u nejednakim lukovima u otpornoj sredini mogu se saznati vremena oscilacija u neotpornoj sredini sa istom specifičnom gravitacijom. Jer, razlika vremena odnosila bi se prema višku vremena u manjem luku u odnosu na vreme u neotpornoj sredini kao razlika tih lukova prema manjem luku.

Kor. 2. Kraće oscilacije više su izohrone, a one veoma kratke izvode se približno u istom vremenu kao i one u neotpornoj sredini. Međutim, vremena onih oscilacija koje se izvode u većim lukovima malo su veća, jer je otpor, tokom padanja tela čime je i produženo vreme, veći (u odnosu na opisanu dužinu tokom padanja) od otpora tokom narednog podizanja čime je vreme smanjeno. A vremena oscilacija, i kratkih i dugih, čini se da su produžena u nekoj meri pomoću kretanja sáme sredine. Na usporena tela deluje otpor koji je unekoliko manji u odnosu na brzinu, a na ubrzana unekoliko veći od one brzine pri ravnomernom kretanju unapred. Jer, sredina je, kretanjem koje su joj prenela tela i koja se kreće napred zajedno sa njima, više pomerena u prethodnom slučaju, a manje u potonjem, i na takav način se više ili manje slaže sa kretanjem tela. Prema tome, klatna tokom padanja doživljavaju veći otpor, a tokom podizanja manji, u odnosu na brzinu, a oba uzrokuju zajedničko produženje vremena.

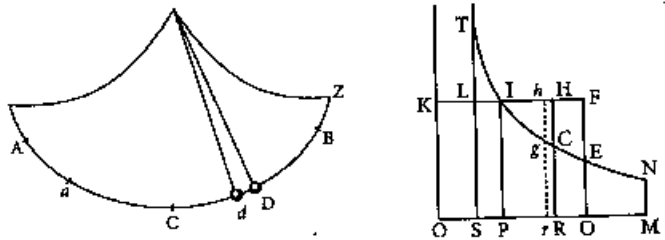
PROPOZICIJA XXVIII. TEOREMA XXIII

Ako na okačeno telo koje osciluje po cikloidi deluje otpor koji je proporcionalan sa momentom vremena, onda će se otpor tog tela odnositi prema sili gravitacije kao što se višak luka, opisanog tokom celokupnog padanja u odnosu na luk opisan u potonjem podizanju, odnosi prema dvostrukoj dužini klatna.

Neka BC predstavlja luk opisan tokom padanja, C*a* opisan luk tokom podizanja, a A*a* razliku osa. Onda će se, na osnovu ustanovljenog i dokazanog u Prop. XXV, sila koja deluje na telo koje osciluje u bilo kom mestu D prema sili otpora odnositi kao luk CD prema luku CO, koji iznosi polovinu te razlike A*a*. Prema tome, sila koja deluje, na telo koje osciluje, na samom početku ili na najvišoj tački cikloide, tj., sila gravitacije, odnosiće se prema otporu kao luk cikloide, smešten između te najviše tačke i najniže tačke C, prema luku M, tj., kada dupliramo te lukove, kao celokupni cikloidni luk, ili dvostruka dužina klatna, prema luku A*a*.



PROPOZICIJA XXIX. PROBLEM VI



Ako pretpostavimo da na telo koje osciluje po cikloidi deluje otpor proporcionalan sa kvadratom brzine, pronaći ćemo otpor u svakom mestu.

Neka je B*a* luk koji je opisan tokom jedne cele oscilacije, C najniža tačka na cikloidi, a CZ polovina celog cikloidnog luka koja je

jednaka sa dužinom klatna i neka je neophodno pronaći otpor tela u bilo kom mestu D. Preseći ćemo neograničenu pravu liniju OQ u tačkama O, S, P i Q, tako da se (ako podignemo normale OK, ST, PI i QE, i ako sa centrom O i asimptotama OK i OQ opišemo hiperbolu TIGE presecajući normale ST, PI i QE u tačkama T, I i E, i ako kroz tačku I povučemo KF paralelno sa asimptotom OQ koja seče asimptotu OK u K, a normale ST i QE u L i F) hiperbolična površina PIEQ može odnositi prema hiperboličnoj površini PITS kao luk BC, opisan tokom padanja tela, prema luku C*a*, opisanom tokom podizanja. Potom se ta oblast IEF može odnositi prema oblasti ILT kao OQ prema OS. Onda ćemo sa normalom MN odseći hiperboličnu površinu PINM. Neka se ta površina odnosi prema hiperboličnoj površini PIEQ kao luk CZ prema luku BC opisanom tokom padanja. I ako normala RG odseca hiperboličnu površinu PIGR, koja će se prema površini PIEQ odnositi kao bilo koji luk CD prema luku BC opisanom tokom celokupnog padanja, onda će se otpor u bilo kom mestu D odnositi prema sili gravitacije kao površina $\frac{OR}{OQ}$ IEF – IGH prema površini PINM.

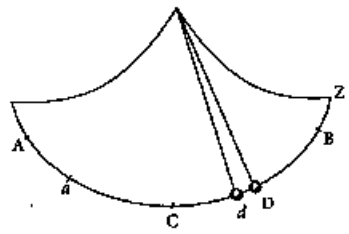
Pošto su sile koje nastaju iz gravitacije i koje deluju na telo u mestima Z, B, D i *a* proporcionalne sa lukovima CZ, CB, CD i C*a*, a ti lukovi sa površinama PINM, PIFQ, PIGR i PITS, neka te površine onda predstavljuju i lukove i sile određenim redom. Neka je D*d* veoma malo rastojanje koje opisuje telo tokom padanja; i neka je predstavljeno veoma malom površinom RG*gr* koja je obuhvaćena između paralela RG i *rg*, onda ćemo produžiti *rg* prema *h* tako da GH*hg* i RG*gr* mogu biti istovremena umanjenja površina IGH i PIGR. Tada će se povećanje GH*hg* – $\frac{Rr}{OQ}$ IEF ili R*r* × HG – $\frac{Rr}{OQ}$ IEF, površine $\frac{OR}{OQ}$ IEF – IGH, odnositi prema umanjenju RG*gr* ili R*r* × RG, površine PIGR, kao HG – $\frac{IEF}{OQ}$ prema RG, pa, prema tome, kao OR × HG – $\frac{OR}{OQ}$ IEF prema OR × GR, tj. (pošto su jednake veličine OR × HG, OR × HR – OR × GR, ORHK – OPIK, PIHR i PIGR + IGH) kao PIGR + IGH – $\frac{OR}{OQ}$ IEF prema OPIK. Odatle sledi da će, ako površinu $\frac{OR}{OQ}$ IEF – IGH označimo sa Y i ako je RG*gr* umanjenje površine PIGR poznato, povećanje površine Z biti proporcionalno sa PIGR – Y.

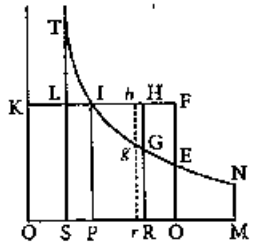
Potom, ako V predstavlja silu koja nastaje iz gravitacije, koja je proporcionalna sa lukom CD koji će biti opisan i koja deluje na telo u D, i ako sa R označimo otpor, onda će V – R biti celokupna sila koja deluje na telo u D. Prema tome, povećanje brzine proporcionalno je sa V – R i sa intervalom vremena, tokom kog je nastala,

zajedno. Ipak, sáma brzina direktno je proporcionalna sa istovremenim povećanjem opisanog prostora, a obrnuto proporcionalna sa istim intervalom vremena. Pošto je otpor, prema pretpostavci, proporcionalan sa kvadratom brzine, onda će povećanje otpora (prema Lemi II) biti proporcionalno sa brzinom i povećanjem brzine zajedno, tj., sa momentom prostora i V – R zajedno i ako je poznat moment prostora, sa V – R, tj., ako silu V označimo sa PIGR, a otpor R sa bilo kojom drugom površinom Z, biće proporcionalno sa PIGR – Z.

Odatle sledi da će se površina PIGR ravnomerno umanjivati oduzimanjem datih momenata, površina Y uvećavaće se proporcionalno sa PIGR – Y, a površina Z proporcionalno sa PIGR – Z. Ako su površine Y i Z nastale zajedno i ako su na početku jednake, onda će one, dodavanjem jednakih momenata, nastaviti da budu jednake, a na isti način, umanjivanjem za jednake momente, zajedno će nestati. I, *vice versa*, ako zajedno nastanu i nestanu, onda će imati jednake momente i uvek će biti jednake. I, pošto je uvećan otpor Z, onda će brzina zajedno sa lukom C*a*, koji je opisan tokom podizanja tela, biti umanjena, a tačka, u kojoj sva kretanja zajedno sa otporom prestaju, približava se tački C, dok pritom otpor nestaje pre površine Y. A kada je otpor umanjen, desiće se suprotno.

Ipak, površina Z nastaje i završava se onda kada je otpor jednak nuli, tj., na početku kretanja kada je luk CD jednak luku CB i kada





se prava linija RG poklapa sa pravom linijom QE i na kraju kretanja kada je luk CD jednak luku C*a*, a RG se poklapa sa pravom linijom ST. Površina Y ili $\frac{OR}{OQ}$ IEF – IGH nastaje i završava se takođe onda kada je otpor ravan nuli, tj., kada su $\frac{OR}{OQ}$ IEF i IGH jednaki ili tj. (prema postavci) kada se prava linija RG naizmenično poklapa sa pravim linijama QE i ST. Te površine, onda, zajedno nastaju i nestaju, pa su zbog toga uvek jednake. Odatle sledi da je površina $\frac{OR}{OQ}$ IEF – IGH jednaka sa površinom Z, kojom je izražen

otpor, pa se prema površini PINM, kojom je izražena gravitacija, odnosi kao otpor prema gravitaciji. Q.E.D.

Kor. 1. Prema tome, otpor u najnižoj tački C odnosi se prema sili gravitacije kao površina $\frac{OR}{OQ}$ IEF prema površini PINM.

Kor. 2. Ipak, otpor postaje najveći onda kada se površina PIHR odnosi prema površini IEF kao OR prema OQ. Jer, u tom slučaju moment otpora, tj., PIGR – Y, postaje ravan nuli.

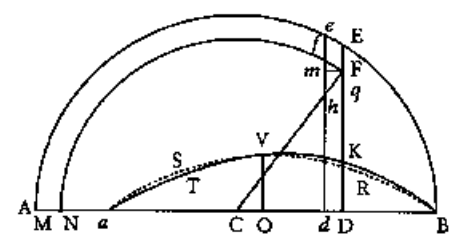
Kor. 3. Takođe, na taj način možemo saznati i brzinu u svakom mestu, jer je proporcionalna sa kvadratom otpora i jer je na početku kretanja jednaka sa brzinom tela koje osciluje po istoj cikloidi bez ikakvog otpora.

Međutim, usled teškoća pri izračunavanju otpora i brzine koji su pronađeni pomoću ove propozicije, pogodno bi bilo dodati Propoziciju koja sledi.

PROPOZICIJA XXX. TEOREMA XXIV

Ako je prava linija *a*B jednaka sa lukom cikloide, koju opisuje telo koje osciluje, i ako su na svakoj njenoj tački D podignute normale DK, koje se prema dužinama klatna odnose kao otpor tela u odgovarajućim tačkama luka prema sili gravitacije; tvrdim da će razlika između luka opisanog tokom celokupnog padanja i luka opisanog tokom potonjeg podizanja pomnožena sa polovinom zbira tih samih lukova biti jednaka sa površinom BK*a* koju sve te normale obrazuju.

Neka je luk cikloide, koji je opisan tokom jedne cele oscilacije, predstavljen pravom linijom *a*B, koja je jednaka sa njim, a neka je luk koji bi bio opisan *in vacuo* predstavljen dužinom AB. Ako prepolovimo AB u C, tačka C će predstavljati najnižu tačku cikloide, a CD će biti proporcionalna sa silom koja nastaje iz gravitacije i koja deluje na telo u D u pravcu tangente cikloide, pa će imati isti odnos prema dužini klatna kao sila u D prema sili gravitacije. Neka je, onda, ta sila predstavljena dužinom CD, a sila gravitacije dužinom klatna. I ako u DE uzmemo da se DK od-



nosi prema dužini klatna kao otpor prema gravitaciji, onda će DK predstavljati otpor. Iz centra C sa intervalom CA ili CB opisaćemo polukrug BE*e*A. Neka telo opisuje, tokom najmanje vremena, prostor D*d* i ako podignemo normale DE i D*e* koje seku površinu polukruga u E i *e*, onda će one biti proporcionalne sa brzinama koje bi telo zadobilo u mestima D i *d* padajući *in vacuo* iz tačke B (prema Prop. LII, Knjiga I). Neka su, onda, te brzine predstavljene normalama DE i D*e* i neka je DF brzina koju telo zadobija u D padanjem iz tačke B u otpornoj sredini. I, ako iz centra C sa intervalom CF opišemo krug F*f*M koji seče prave linije *de* i AB u *f* i M, onda će M biti mesto odakle će telo, bez daljeg otpora, nastaviti da se podiže, a *df* će biti brzina koju bi ono zadobilo u *d*. Takođe, ako Fg predstavlja moment brzine koju bi telo D, opisujući najmanji prostor D*d*, izgubilo usled otpora sredine i ako uzmemo da je CN jednako sa C*g*, onda će N biti mesto do kog će telo dostići, ako na njega dalje ne deluje otpor, a MN će biti umanjenje uspona koje se pojavljuje usled gubitka te brzine. Ukoliko povučemo F*m* normalno na *df*, onda će se umanjenje F*g* brzine DF, koje je stvoreno usled otpora DK, odnositi prema uvećanju *fm* iste te brzine, koje je stvoreno usled delovanja sile CD, kao sila DK prema sili CD. Međutim, pošto su trouglovi F*mf*, F*hg* i FDC slični, onda se *fm* prema F*m* ili D*d* odnosi kao CD prema DF i, *ex aequo*, F*g* se prema D*d* odnosi kao DK prema DF. Takođe, F*h* se prema F*g* odnosi kao DF prema CF i, *ex aequo perturbate*, F*h* ili MN se prema D*d* odnosi kao DK prema CF ili CM. Zbog toga će zbir svih MN × CM biti jednak sa zbirom svih D*d* × DK. Ako pretpostavimo da je na pokretnoj tački M uvek podignuta pravougaona ordinata jednaka sa neodređenom CM, koja je neprekidnim kretanjem pomnožena sa celom dužinom A*a*, onda će trapezoid, opisan tim kretanjem, ili njemu jednak pravougaonik A*a* × $\frac{1}{2}$ *a*B, biti jednak sa zbirom svih MN × CM, a prema tome i sa zbirom svih D*d* × DK, tj., sa površinom BKVT*a*. Q.E.D.

Kor. Na taj način, iz zakona otpora i iz razlike A*a* lukova C*a* i CB možemo saznati približan odnos otpora prema gravitaciji.

Jer, ako je otpor DK ravnomeran, onda će figura BKT*a* biti pravougaonik čija je osnova B*a* i DK. Odatle sledi da će pravougaonik $\frac{1}{2}$ B*a* × A*a* biti jednak sa pravougaonikom B*a* × DK, pa će DK biti jednako sa $\frac{1}{2}$ A*a*. Pošto DK predstavlja otpor, a dužina klatna gravitaciju, onda će se otpor odnositi prema gravitaciji kao $\frac{1}{2}$ A*a* prema dužini klatna, a sve je to saglasno sa Propozicijom XXVIII.

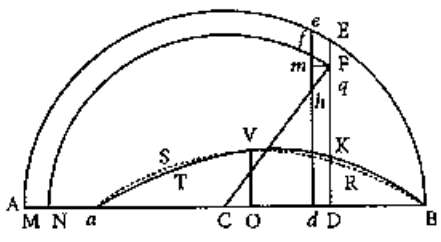
Ako je otpor proporcionalan sa brzinom, onda će figura BKT*a* približno biti elipsa. Jer, ako telo u neotpornoj sredini, tokom jedne cele oscilacije, opiše dužinu BA, onda bi brzina u bilo kom mestu D biła proporcionalna sa ordinatom DE kruga opisanog na prečniku AB. Pošto su B*a*, u otpornoj sredini, i BA, u neotpornoj, opisani tokom približno istog vremena i pošto se brzine u svakoj tački na B*a* odnose prema brzinama u odgovarajućim tačkama na dužini BA približno kao B*a* prema BA, onda će brzina u tački D u otpornoj sredini biti proporcionalna sa ordinatom kruga ili elipse, opisane na prečniku B*a*, pa će figura BKVT*a* biti približno elipsa. Zbog toga što je pretpostavljeno da je otpor proporcionalan sa brzinom, neka OV predstavlja otpor u središnjoj tački O. Onda će elipsa BRVS*a*, opisana oko centra O i sa poluosama OB i OV, biti približno jednaka sa figurom BKVT*a* i s njom jednakim pravougaonikom A*a* × BO. Prema tome, A*a* × BO se prema OV × BO odnosi kao površina te elipse prema OV × BO, tj., A*a* se prema OV odnosi kao površina polukruga prema kvadratu poluprečnika, ili približno kao 11 prema 7 i to znači da se $\frac{7}{11}$ A*a* odnosi prema dužini klatna kao otpor tela koje osciluje u O prema gravitaciji.

Sada, ako je otpor DK proporcionalan sa kvadratom brzine, onda će figura BKVT*a* biti skoro parabola, čiji je vrh V, a osa OV, pa će zbog toga biti približno jednaka sa pravougaonikom $\frac{2}{3}$ B*a* × OV. Odatle sledi da je pravougaonik $\frac{1}{2}$ B*a* × A*a* jednak sa pravougaonikom $\frac{2}{3}$ B*a* × OV; OV jednako sa $\frac{3}{4}$ A*a*; otpor u O koji deluje na telo koje osciluje odnosi se prema gravitaciji kao $\frac{3}{4}$ A*a* prema dužini klatna.

Smatram da su ovi zaključci dovoljno precizni za praktičnu upotrebu. Jer, pošto se elipsa ili parabola BRVS*a* poklapaju sa figurom BKVT*a* u središnjoj tački V, onda je ta figura, ako je veća prema delu BRV ili VS*a*, manja prema suprotnom delu, pa su zbog toga približno jednake.

PROPOZICIJA XXXI. TEOREMA XXV

Ako se otpor, koji deluje na telo koje osciluje u svakom od proporcionalnih delova opisanih lukova, uveća ili umanji u bilo kom datom odnosu, onda će se razlika između lukova opisanih tokom padanja i lukova opisanih tokom potonjih podizanja uvećati ili umanjiti u istom tom odnosu.



Jer, ta razlika nastaje iz usporavanja klatna usled otpora sredine, pa je zbog toga proporcionalna sa celokupnim usporavanjem kao i sa otporom koji usporava. U prethodnoj Propoziciji pravougaonik pod pravom linijom $\frac{1}{2}$ *a*B i razlika A*a* između lukova CB i C*a* bili su jednaki površini BKT*a*. A ta površina, ukoliko dužina *a*B ostaje nepromenjena, uvećana je ili umanjena u takvom odnosu kao i ordinate DK, tj., proporcionalna je sa otporom, kao i sa dužinom *a*B i otporom zajedno. Prema tome, pravougaonik A*a* × $\frac{1}{2}$ *a*B proporcionalan je sa *a*B i otporom zajedno, pa je zbog toga A*a* proporcionalno sa otporom. Q.E.D.

Kor. 1. Ako je otpor proporcionalan sa brzinom, onda će razlika između lukova u istoj sredini biti proporcionalna sa celokupnim opisanim lukom, i obrnuto.

Kor. 2. Ako je otpor proporcionalan sa kvadratom brzine, onda će razlika između lukova biti proporcionalna sa kvadratom celokupnog luka, i obrnuto.

Kor. 3. I uopšteno, ako je otpor proporcionalan sa kubnim ili bilo kojim drugim stepenom brzine, onda će i razlika biti proporcionalna sa takvim stepenom veličine celokupnog luka, i obrnuto.

Kor. 4. Ako je otpor delimično proporcionalan sa prvim stepenom brzine, a delimično sa drugim, onda će razlika biti delimično proporcionalna sa prvim, a delimično sa drugim stepenom veličine celokupnog luka, i obrnuto. Na takav način, zakon i odnos otpora važiće za brzinu kao što zakon i odnos tih razlika važe za dužinu lukova.

Kor. 5. Prema tome, ako klatno neprekidno opisuje nejednake lukove i ako možemo pronaći odnos uvećanja ili umanjenja tih razlika za dužine opisanih lukova, onda ćemo takođe moći da pronađemo odnos uvećanja ili umanjenja otpora pri većoj ili manjoj brzini.

OPŠTA SHOLIJA

Iz ovih propozicija možemo pronaći otpore sredina pomoću klatna koja u njima osciluju. Na osnovu toga, pronašao sam otpor

vazduha sledećim eksperimentom. Okačio sam, na tankoj niti i čvrstoj kuki, drvenu loptu čija je težina 57$\frac{7}{22}$ *troa* unci i čiji je prečnik 6$\frac{7}{8}$ londonskih inča, tako da je rastojanje između kuke i centra oscilacije lopte bio 10$\frac{1}{2}$ stope. Na niti sam označio tačku na rastojanju od 10 stopa i 1 inča do centra kačenja, a na toj tački smestio sam lenjir podeljen na inče, pomoću kog sam posmatrao dužine lukova opisanih klatnom. Potom sam prebrojao oscilacije tokom kojih bi lopta izgubila $\frac{1}{8}$ dela svog kretanja. Ako se klatno pomeri od normale do rastojanja od 2 inča i ako se odatle pusti tako da tokom svog celokupnog padanja opisuje luk od 2 inča, a ako tokom prve cele oscilacije, koja se sastoji iz padanja i potonjeg podizanja, opisuje luk od skoro 4 inča, onda će ono tokom 164 oscilacije izgubiti $\frac{1}{8}$ dela svog kretanja, pa će tokom svog poslednjeg podizanja opisati luk od 1$\frac{3}{4}$ inča. Ako pri svom prvom padanju opiše luk od 4 inča, ono će izgubiti $\frac{1}{8}$ dela svog kretanja tokom 121 oscilacije, pa će u poslednjem podizanju opisati luk od 3$\frac{1}{2}$ inča. Ako pri svom prvom padanju opiše luk od 8, 16, 32, 64 inča, izgubiće $\frac{1}{8}$ dela svog kretanja tokom 69, 35$\frac{1}{2}$, 18$\frac{1}{2}$ i 9$\frac{2}{3}$ oscilacija, tim određenim redom. Prema tome, razlika između lukova opisanih tokom prvog padanja i poslednjeg podizanja u prvom, drugom, trećem, četvrtom, petom i šestom slučaju iznosila je $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4 i 8 inča, tim redom. Ako podelimo te razlike sa brojem oscilacija u svakom od tih slučajeva, onda će tokom srednje oscilacije, kada su opisani lukovi od 3$\frac{3}{4}$, 7$\frac{1}{2}$, 15, 30, 60 i 120 inča, razlike između lukova, opisanih tokom padanja i potonjeg podizanja, iznositi $\frac{1}{656}$, $\frac{1}{242}$, $\frac{1}{69}$, $\frac{4}{71}$, $\frac{8}{37}$ i $\frac{24}{29}$ delova inča, tim određenim redom. Međutim, te razlike u većim oscilacijama približno su proporcionalne sa kvadratima opisanih lukova, dok su u manjim oscilacijama nešto veće nego u tom odnosu, pa je zbog toga (prema Kor. 2, Prop. XXXI ove knjige) otpor lopte, kada se kreće veoma brzo, približno proporcionalan sa kvadratom brzine, a kada se kreće veoma sporo, nešto je veći nego u tom odnosu.

Sada, neka V predstavlja najveću brzinu u bilo kojoj oscilaciji, neka A, B i C budu poznate veličine i pretpostavimo da razlika između lukova bude $AV + BV^{\frac{3}{2}} + CV^2$. Pošto su najveće brzine po cikloidi proporcionalne sa $\frac{1}{2}$ opisanih lukova tokom oscilovanja, a po krugu sa $\frac{1}{2}$ tetiva tih lukova, pa su zato jednaki lukovi veći po cikloidi nego po krugu u odnosu koji je jednak odnosu $\frac{1}{2}$ luka prema tim tetivama, i pošto su vremena po krugu veća od onih po cikloidi, pa su u odnosu koji je obrnuto proporcionalan sa brzinom,

onda je jasno da su razlike lukova (koji su proporcionalni sa otporom i kvadratom vremena zajedno) približno jednake u obema krivima. Jer, u cikloidi se te razlike, s jedne strane, moraju uvećati zajedno sa otporom približno proporcionalno sa kvadratom odnosa luka prema tetivi, pošto se i brzina uvećava u istom tom odnosu, a s druge strane, moraju se umanjiti proporcionalno sa kvadratom vremena, tj., sa kvadratom odnosa luka prema tetivi. Prema tome, ako bismo hteli da svedemo ova posmatranja na cikloidu, moramo uzeti iste razlike lukova kao što su one posmatrane u krugu i pretpostavićemo da su najveće brzine analogne sa polovinom ili celim lukovima, tj., sa brojevima $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8 i 16. Zbog toga ćemo u drugom, četvrtom i šestom slučaju za V uzeti 1, 4 i 16. Onda će razlika između lukova u drugom slučaju postati $\frac{1/2}{121} = A + B + C$; u četvrtom slučaju $\frac{2}{351/2} = 4A + 8B + 16C$; u šestom slučaju $\frac{8}{92/3} = 16A + 64B + 256C$. Iz tih jednačina pronaći ćemo da je A = 0,0000916, B = 0,0010847, a C = 0,0029558. Prema tome, razlika između lukova proporcionalna je sa $0{,}0000916V + 0{,}0010847V^{\frac{3}{2}} + 0{,}0029558V^2$; i pošto se (kada primenimo Kor., Prop. XXX na ovaj slučaj) otpor lopte na sredini luka opisanog tokom oscilovanja, gde je brzina označena sa V, odnosi prema njenoj težini kao $\frac{7}{11}AV + \frac{7}{10}BV^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{4}CV^2$ prema dužini klatna, i ako umesto A, B i C stavimo pronađene brojeve, onda će se otpor lopte odnositi prema njenoj težini kao $0{,}0000583V + 0{,}0007593V^{\frac{3}{2}} + 0{,}0022169V^2$ prema dužini klatna između centra kačenja i lenjira, tj., do 121 inča. Pošto je V u drugom slučaju jednako sa 1, u četvrtom sa 4, a u šestom sa 16, onda će se otpor odnositi prema težini lopte u drugom slučaju kao 0,0030345 prema 121, u četvrtom kao 0,041748 prema 121, a u šestom kao 0,61705 prema 121.

Luk, koji je tačka koja je označena na niti opisala u šestom slučaju, iznosio je $120 - \frac{8}{92/3}$, ili $119\frac{5}{29}$ inča. Pošto je poluprečnik iznosio 121 inč, a dužina klatna između tačke kačenja i centra lopte 126 inča, onda je luk, koji je opisao centar lopte, iznosio $124\frac{3}{31}$ inča. Pošto najveća brzina tela koje osciluje, usled otpora vazduha, nije na najnižoj tački opisanog luka, već u blizini srednjeg mesta celog luka, onda će ta najveća brzina biti približno takva kao kada bi lopta pri svom celokupnom padanju u neotpornoj sredini opisala $62\frac{3}{62}$ inča, tj., polovinu tog luka. Ovo sve važi za cikloidu, na koju smo ranije sveli kretanje klatna. Prema tome, ta brzina bila bi jednaka sa onom brzinom koju bi zadobila lopta pri padanju normalnom u odnosu na visinu koja je jednaka sinus versusu tog luka.

Međutim, taj sinus versus u cikloidi odnosi se prema tom luku $62\frac{3}{62}$ kao što se taj isti luk odnosi prema dvostrukoj dužini klatna 252, pa zato iznosi 15,278 inča. Na takav način, brzina klatna ista je sa onom brzinom koju telo može zadobiti padanjem opisujući pritom prostor od 15,278 inča. Znači, sa takvom brzinom na loptu deluje otpor koji se prema njenoj težini odnosi kao 0,61705 prema 121, tj., ako uzmemo samo onaj deo otpora koji je proporcionalan sa kvadratom brzine, kao 0,56752 prema 121.

Hidrostatičkim eksperimentom pronašao sam da se težina ove drvene lopte odnosi prema težini lopte sa vodom koja je iste veličine kao 55 prema 97. Pošto se 121 prema 213,4 nalazi u tom istom odnosu, onda će se otpor, koji deluje na loptu sa vodom koja se kreće napred sa gorepomenutom brzinom, odnositi prema njenoj težini kao 0,56752 prema 213,4, tj., kao 1 prema $376\frac{1}{50}$. I, pošto će težina lopte sa vodom, u vremenu tokom kog lopta sa ravnomernom brzinom opisuje dužinu od 30,556 inča, proizvesti svu tu brzinu u telu koje pada, onda je očigledno da će ravnomerna sila otpora koja deluje tokom istog vremena ukloniti brzinu, koja će biti manja za $376\frac{1}{50}$, tj., iznosiće $\frac{1}{376\frac{1}{50}}$ dela celokupne brzine. Odatle sledi da će u vremenu tokom kog će lopta, koja se kreće sa istom ravnomernom brzinom, opisati dužinu poluprečnika, ili $3\frac{7}{16}$ inča i izgubiće $\frac{1}{3342}$ dela svog kretanja.

Takođe sam prebrojao oscilacije u kojima klatno gubi $\frac{1}{4}$ dela svog kretanja. U tabeli koja sledi gornji brojevi označavaju dužinu luka opisanog pri prvom padanju, izraženom u inčima i delovima inča; brojevi u sredini označavaju dužinu luka pri poslednjem podizanju; brojevi na kraju tabele označavaju broj oscilacija. Navodim ovaj eksperiment jer je mnogo precizniji od onog u kom je izgubljeno samo $\frac{1}{8}$ dela kretanja. Izračunavanja ostavljam onima koji su im skloni.

Prvo padanje	2	4	8	16	32	64
Poslednje podizanje	$1\frac{1}{2}$	3	6	12	24	48
Broj oscilacija	374	272	$162\frac{1}{2}$	$83\frac{1}{3}$	$41\frac{2}{3}$	$22\frac{2}{3}$

Potom sam, na istoj niti, okačio olovnu loptu od 2 inča u prečniku, koja je težila $26\frac{1}{4}$ *troa* unce, tako da se između centra lopte i tačke kačenja nalazio interval od $10\frac{1}{2}$ stopa, pa sam prebrojao oscilacije u kojim je izgubljen dati deo kretanja. Prva od sledeće dve

tabele prikazuje broj oscilacija u kojima je izgubljena $\frac{1}{8}$ dela celokupnog kretanja, a druga broj oscilacija u kojima je izgubljena $\frac{1}{4}$ istog tog kretanja.

Prvo padanje	1	2	4	8	16	32	64
Poslednje podizanje	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{4}$	$3\frac{1}{2}$	7	14	28	56
Broj oscilacija	226	228	193	140	$90\frac{1}{2}$	53	30

Prvo padanje	1	2	4	8	16	32	64
Poslednje podizanje	$\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{2}$	3	6	12	24	48
Broj oscilacija	510	518	420	318	204	121	70

Ako iz prve tablice odaberemo treće, peto i sedmo posmatranje i ako izrazimo najveće brzine u tim posmatranjima brojevima 1, 4 i 16, tim redom, onda će, kao i ranije, veličina V biti jednaka sa $\frac{1/2}{193} = A + B + C$ u trećem posmatranju; sa $\frac{2}{901/2} = 4A + 8B + 16C$ u petom posmatranju; a u sedmom sa $\frac{8}{30} = 16A + 64B + 256C$. Kada svedemo ove jednačine, dobijamo da je A = 0,001414, B = 0,000297, a C = 0,000879. Prema tome, otpor lopte koja se kreće brzinom V odnosiće se prema njenoj težini od $26\frac{1}{4}$ unce kao i $0{,}0000009V + 0{,}0000208V^{\frac{3}{2}} + 0{,}0000659V^2$ prema 121 inču, tj., dužini klatna. Ako uzmemo u obzir samo onaj deo otpora koji je proporcionalan sa kvadratom brzine, onda će se taj otpor odnositi prema težini lopte kao $0{,}000659V^2$ prema 121 inču. Međutim, u prvom eksperimentu, taj deo otpora odnosio se prema težini drvene lopte od $57\frac{7}{22}$ unce, kao $0{,}002217V^2$ prema 121 i zato se otpor drvene lopte odnosi prema otporu olovne lopte (jer su im brzine jednake) kao $57\frac{7}{22} \times 0{,}002217$ prema $26\frac{1}{4} \times 0{,}000659$, tj., kao $7\frac{1}{3}$ prema 1. Prečnici dve lopte bili su $6\frac{7}{8}$ i 2 inča, a odnos kvadrata tih prečnika bio je $47\frac{1}{4}$ prema 4, ili približno $11\frac{13}{16}$ prema 1. Prema tome, otpori ovih jednako brzih lopti bili su u manjem odnosu od kvadrata prečnika. Ipak, još uvek nismo uzeli u obzir otpor niti koji je zasigurno veoma značajan i koji se mora oduzeti od, ovde pronađenih, otpora klatna. Ne mogu ga odrediti precizno, ali pronašao sam da je veći od trećine celokupnog otpora manjeg klatna i odatle sam zaključio da su otpori lopti, kada se oduzme otpor niti, približno proporcionalni sa kvadratom njihovih prečnika. Jer, odnos $7\frac{1}{3} - \frac{1}{3}$ prema $1 - \frac{1}{3}$, ili $10\frac{1}{2}$ prema 1 ne razlikuje se mnogo od odnosa kvadrata prečnika, tj., od $11\frac{13}{16}$ prema 1.

Pošto otpor niti ima manji moment u većoj lopti, takođe sam izveo eksperiment sa loptom čiji je prečnik bio $18\frac{3}{4}$ inča. Dužina klatna između tačke kačenja i centra oscilacije bio je $122\frac{1}{2}$ inča, a između tačke kačenja i čvora na niti $109\frac{1}{2}$ inča. Luk koji je čvor opisao pri prvom padanju klatna iznosio je 32 inča. Luk koji je opisao isti taj čvor pri poslednjem podizanju posle pet oscilacija iznosio je 28 inča. Zbir lukova, ili celokupan luk opisan u jednoj srednjoj oscilaciji, iznosio je 60 inča. Razlika između lukova iznosila je 4 inča. Deseti deo ovoga, ili razlika između padanja i podizanja u jednoj srednjoj oscilaciji, iznosi $\frac{2}{5}$ inča. Onda, kao što se poluprečnik $109\frac{1}{2}$ odnosi prema poluprečniku $122\frac{1}{2}$, tako se i celokupni luk od 60 inča, koji je opisao čvor u jednoj srednjoj oscilaciji, odnosi prema celokupnom luku od $67\frac{1}{8}$ inča, koji je opisao centar lopte u jednoj srednjoj oscilaciji, a tako se odnosi i razlika $\frac{2}{5}$ prema novoj razlici 0,4475. Ako dužina opisanog luka ostane nepromenjena i ako se dužina klatna uveća u odnosu od 126 prema $122\frac{1}{2}$, onda će se vreme oscilacije uvećati, a brzina klatna umanjiti shodno kvadratnom korenu tog odnosa, tako da će razlika 0,4475 opisanih lukova pri padanju i potonjem podizanju ostati nepromenjena. Zatim, ako se opisan luk uveća u odnosu od $124\frac{3}{31}$ prema $67\frac{1}{8}$, ta će se razlika 0,4475 uvećati proporcionalno kvadratu tog odnosa, pa će postati 1,5295. Sve ovo važi pod pretpostavkom da je otpor klatna proporcionalan sa kvadratom brzine. Prema tome, ako klatno opisuje ceo luk od $124\frac{3}{31}$ inča i ako je njegova dužina između tačke kačenja i centra oscilacije 126 inča, onda će razlika između lukova opisanih pri pradanju i potonjem podizanju iznositi 1,5295 inča. Ta razlika pomnožena sa težinom klatna, koja je iznosila 208 unci, daje 318,136. Zatim, ako gorepomenuto klatno napravljeno od drvene lopte, kada mu je centar oscilacije na rastojanju od 126 inča do tačke kačenja, opisuje celokupni luk od $124\frac{3}{31}$ inča, onda je razlika opisanih lukova pri padanju i podizanju iznosila $\frac{126}{121} \times \frac{8}{92/3}$. Kada to pomnožimo sa težinom lopte, koja je iznosila $57\frac{7}{22}$ unci, dobijamo 49,396. Pomnožio sam te razlike sa težinama lopti kako bih dobio njihove otpore. Jer, razlike nastaju usled otpora, pa su direktno proporcionalne sa otporima, a obrnuto sa težinama. Prema tome, otpori su proporcionalni sa brojevima 318,136 i 49,396. Međutim, onaj deo otpora manje lopte, koji je proporcionalan sa kvadratom brzine, odnosio se prema celom otporu kao 0,56752 prema 0,61675, tj., kao 45,453 prema 49,396, a s obzirom na to da je deo otpora veće lopte približno jednak sa celim otporom, onda

su i ti delovi otpora približno jednaki sa 318,136 prema 45,453, tj., sa 7 prema 1. Ali, prečnici lopti iznosili su $18\frac{3}{4}$ i $6\frac{7}{8}$, a njihovi kvadrati $351\frac{9}{16}$ i $47\frac{17}{64}$ odnosili su se kao 7,438 prema 1, tj. približno kao odnos otpora lopti, 7 prema 1. Razlika ovih odnosa jedva da je veća od one koja se može pojaviti iz otpora niti. Prema tome, kada su lopte jednake, ti delovi otpora su proporcionalni sa kvadratima brzina, a, pri jednakim brzinama, proporcionalni su sa kvadratima prečnika lopti.

Međutim, najveća lopta koju sam koristio u ovim eksperimentima nije bila savršeno sferna, pa sam u ovom proračunu, radi sažetosti, izbegao neke male trivijalnosti, pritom, ne težeći za preciznim računom u eksperimentu koji i nije bio potpuno precizan. Ipak, želeo bih da se ti eksperimenti ponove sa drugim loptama veće veličine, u većem broju i preciznije oblikovanim, jer dokaz za postojanje vakuuma zavisi od toga. Ako uzmemo da su lopte u geometrijskoj proporciji i ako pretpostavimo da su njihovi prečnici 4, 8, 16 i 32 inča, onda iz niza rezultata dobijenih u eksperimentima možemo zaključiti šta bi se desilo ako bi lopte bile još veće.

Kako bismo međusobno uporedili otpore u različitim tečnostima, izveo sam sledeća ispitivanja. Napravio sam drveni sud 4 stope dugačak, 1 stopu širok i 1 stopu visok. Ostavio sam ga nepokrivenog i napunio ga izvorskom vodom. Zatim sam u njega uronio klatna i pokrenuo njihovo oscilovanje u vodi. Pronašao sam da se olovna lopta, koja teži $166\frac{1}{6}$ unce i sa prečnikom $3\frac{5}{8}$ inča, pomera shodno izloženom u sledećoj tabeli. Dužina klatna od tačke kačenja do određene tačke označene na niti iznosila je 126 inča, a do centra oscilacije $134\frac{3}{8}$ inča.

Luk opisan pri prvom padanju pomoću tačke označene na niti koja iznosi:	64	32	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	inča
Luk opisan pri poslednjem padanju iznosi:	48	24	12	6	3	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$	inča
Razlika lukova, koja je proporcionalna sa izgubljenim kretanjem, iznosi:	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	inča

Broj oscilacija u vodi:	$\frac{29}{60}$	$1\frac{1}{5}$	3	7	$11\frac{1}{4}$	$12\frac{2}{3}$	$13\frac{1}{3}$
Broj oscilacija u vazduhu:	$85\frac{1}{2}$	287	535				

U eksperimentima iz četvrte kolone izgubljena je jednaka količina kretanja posle 535 oscilacija u vazduhu i $1\frac{1}{5}$ oscilacija u vodi. Svakako, oscilacije u vazduhu bile su malo brže od onih u vodi. Međutim, ako su oscilacije u vodi ubrzane u takvom odnosu da kretanja klatna mogu biti jednako brza u obema sredinama, još uvek će ostati isti broj oscilacija u vodi $1\frac{1}{5}$, pri čemu će biti izgubljena ista količina kretanja kao i ranije, jer ako bi se otpor uvećao, onda bi se kvadrat vremena umanjio u istom odnosu koji je jednak sa kvadratom gorepomenutog odnosa. Prema tome, klatna sa istim brzinama, gube jednake količine kretanja posle 535 oscilacija u vazduhu i posle $1\frac{1}{5}$ oscilacija u vodi. Zbog toga otpor klatna u vodi odnosi se prema otporu klatna u vazduhu kao 535 prema $1\frac{1}{5}$. To je proporcija celokupnih otpora koja važi za slučaj u četvrtoj koloni.

Sada, neka $AV + CV^2$ predstavlja razliku između lukova opisanih tokom padanja i potonjeg podizanja pomoću lopte koja se kreće u vazduhu sa najvećom brzinom V. Pošto se najveća brzina u slučaju iz četvrte kolone odnosi prema najvećoj brzini u slučaju iz prve kolone kao 1 prema 8 i pošto se razlika između lukova u slučaju iz četvrte kolone odnosi prema razlici u slučaju iz prve kolone kao $\frac{2}{535}$ prema $\frac{16}{85\frac{1}{2}}$, ili kao $85\frac{1}{2}$ prema 4280, i ako u ovim slučajevima brzine označimo sa brojevima 1 i 8, a sa $85\frac{1}{2}$ i 4280 označimo razlike između lukova, onda će A + C biti jednako sa $85\frac{1}{2}$, a 8A + 64C biće jednako sa 4280 ili A + 8C = 535. Svođenjem ovih jednačina dobijamo da je $7C = 449\frac{1}{2}$, $C = 64\frac{3}{14}$, $A = 21\frac{2}{7}$. U tom slučaju će otpor, koji je bio proporcionalan sa $\frac{7}{11}AV + \frac{3}{4}CV^2$, postati jednak sa $13\frac{6}{11}V + 48\frac{9}{56}V^2$. Prema tome, u slučaju iz četvrte kolone gde je brzina iznosila 1, celokupni otpor se prema svojim delovima proporcionalnim sa kvadratom brzine odnosi kao $13\frac{6}{11}V + 48\frac{9}{56}V^2$ ili kao $61\frac{13}{17}$ prema $48\frac{9}{56}$, pa se zato otpor klatna u vodi odnosi prema onom delu otpora u vazduhu, koji je proporcionalan sa kvadratom brzine i koji jedino i vredi razmatrati pri bržem kretanju, kao $61\frac{13}{17}$ prema $48\frac{9}{56}$ zajedno sa 535 prema $1\frac{1}{5}$, tj., kao 571 prema 1. Ako je uronjena cela nit klatna koje osciluje u vodi, onda je njegov otpor još veći, tako da se otpor klatna koje osciluje

u vodi, tj., onaj deo koji je proporcionalan sa kvadratom brzine i koji jedino i vredi razmatrati pri bržim kretanjima, odnosi prema otporu tog istog klatna, koje osciluje u vazduhu sa istom brzinom, približno kao 950 prema 1, tj., približno kao gustina vode prema gustini vazduha.

U ovom proračunu trebalo je koristiti samo onaj deo otpora klatna u vodi koji je bio proporcionalan sa kvadratom brzine. Ipak, pronašao sam (a to bi moglo izgledati čudno) da je otpor u vodi uvećan u proporciji koja je veća od kvadrata brzine. U potrazi za uzrokom, pomislio sam da je sud previše uzak za loptu te veličine i da je uzanost ometala kretanje vode dok se savijala prema lopti koja osciluje. Kada sam uronio klatno čiji je prečnik iznosio samo 1 inč, otpor se uvećao približno kao kvadrat brzine. Napravio sam i klatno sa dve lopte, od kojih je manja i niža oscilovala u vodi, a veća i viša je bila pričvršćena za nit tek iznad vode i oscilovanjem u vazduhu pomagala je kretanje klatna pa je ono trajalo duže. Rezultati eksperimenata izvedenih pomoću ovog izuma pokazani su u sledećoj tabeli.

Luk opisan pri prvom padanju:	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Luk opisan pri poslednjem podizanju:	12	6	3	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$
Razlika između lukova koja je proporcionalna sa izgubljenim kretanjem:	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
Broj oscilacija:	$3\frac{3}{8}$	$6\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{12}$	$21\frac{1}{5}$	34	53	$62\frac{1}{5}$

Za međusobno upoređivanje otpora sredina, učinio sam da gvozdeno klatno osciluje u živi. Dužina gvozdene žice iznosila je oko 3 stope, a prečnik klatna oko $\frac{1}{3}$ inča. Na žici je, tek iznad žive, pričvršćena još jedna olovna lopta takve veličine koja je dovoljna da za neko vreme nastavi kretanje klatna. Onda je sud, koji bi mogao da sadrži oko 3 funte žive, naizmenično punjen živom i običnom vodom, tako da klatno može naizmenično oscilovati u ovim dvema tečnostima. Na taj način mogao bih pronaći proporciju njihovih otpora, a pokazalo se da se otpor žive odnosi prema otporu vode približno kao 13 ili 14 prema 1, tj., kao gustina žive prema gustini vode. Kada sam iskoristio malo veću loptu, čiji je

prečnik iznosio oko $\frac{1}{2}$ ili $\frac{2}{3}$ inča, onda se pokazalo da se otpor žive odnosio prema otporu vode približno kao 12 ili 10 prema 1. Ipak, prethodni eksperiment je pouzdaniji zato što je u ovom poslednjem sud bio preuzak u odnosu na veličinu uronjenog tela, a sud je trebalo uvećati zajedno sa loptom. Nameravao sam da ponovim ove eksperimente sa većim sudovima i u rastopljenim metalima, kao i u drugim tečnostima kako hladnim tako i toplim; ipak, nisam imao dovoljno slobodnog vremena za to. Pored toga, iz onoga što je već opisano, dovoljno jasno sledi da je otpor telâ koja se kreću brže približno proporcionalan sa gustinama tečnosti u kojima se kreću. Ne trvdim sa dovoljno preciznosti, ali viskoznije tečnosti jednake gustine nesumnjivo će pružati veći otpor od onih koje su fluidnije; npr. hladno ulje više od toplog, toplo ulje više od kišnice, a voda više od etil alkohola. Međutim, u tečnostima koje su na prvi pogled dovoljno retke ili tečne, kao što su vazduh, slana i sveža voda, etil alkohol, terpentin ili sona kiselina, zatim ulje destilacijom pročišćeno od fermenta pa potom zagrejano, sumporna kiselina, živa, otopljeni metali, kao i bilo koje druge slične tečnosti koje su dovoljno tečne da neko vreme zadržavaju kretanje pokrenuto delovanjem posude i koje se, kada ih prospemo, lako razlažu na kapi – onda ne sumnjam da bi izloženo pravilo moglo da bude dovoljno precizno, posebno ako su eksperimenti izvedeni sa većim klatnima koja se brže kreću.

Na kraju, pošto među nekima vlada mišljenje da postoji neka određena eterna sredina koja je izuzetno retka i suptilna i koja slobodno prožima pore svih tela, iz takve sredine, koja na takav način prožima pore tela, mora se pojaviti određeni otpor. Kako bih odredio da li otpor u telima koja se kreću deluje samo na njihove spoljašnje površine ili deluje i na spoljašnjosti unutrašnjih delova tih tela, izveo sam sledeći eksperiment. Okačio sam okruglo jelovo bure na nit dugačku 11 stopa za čeličnu kuku pomoću prstena istog materijala, tako da klatno bude iste dužine kao što je gorepomenuta. Kuka je imala oštru i udubljenu ivicu na svom gornjem delu, tako da se gornji luk prstena, koji je naslonjen na ivicu, može slobodnije kretati, a pritom je nit bila pričvršćena za niži luk prstena. Tako pripremljeno klatno gurnuo sam od normale do rastojanja od otprilike 6 stopa, u ravni normalnoj na ivicu kuke, a kako prsten ne bi mogao da klizi napred i nazad po ivici kuke dok klatno osciluje, tačka kačenja, u kojoj prsten dodiruje kuku, mora ostati nepokretna. Prema tome, precizno sam označio mesto do kog je klatno

dovedeno i pošto sam ga pustio, označio sam još tri mesta do kojih se vratilo posle kraja prve, druge i treće oscilacije. To sam često ponavljao kako bih pronašao ta mesta što je moguće preciznije. Onda sam ispunio bure olovom i drugim teškim metalima koji su mi bili pri ruci. Na početku sam izmerio prazno bure zajedno s onim delom niti koja ga obmotava, kao i polovinom preostalog dela koji se pruža između kuke i okačenog bureta, zbog toga što nit uvek deluje na klatno sa polovinom svoje težine, onda kada je pomerena od normale. Ovoj težini dodao sam težinu vazduha koji je sadržan u buretu. A ta celokupna težina iznosila je oko $\frac{1}{78}$ od težine bureta napunjenog metalima. Potom sam, pošto bure, ispunjeno metalima, rasteže nit svojom težinom pa tako uvećava dužinu klatna, skratio tu nit tako da je dužina klatna tokom oscilovanja ista kao i ranije. Kada sam pomerio klatno do prvo označenog mesta i odatle ga pustio, prebrojao sam 77 oscilacija pre nego što se bure vratilo do druge oznake, i isto toliko pre nego što se vratilo do treće oznake, kao i isto toliko pre nego što se vratilo do četvrte. Odatle sam zaključio da proporcija celokupnog otpora bureta kada je puno prema otporu bureta kada je prazno nije veća od 78 prema 77. Jer, ako su njihovi otpori jednaki, onda će bure kada je puno usled sopstvene sile inercije, koja je 78 puta veća od sile inercije istog bureta kada je prazno, nastaviti da osciluje isto toliko dugo, pa će se zbog toga vratiti do obeleženih mesta posle 78 oscilacija. Međutim, vratilo se posle 77 oscilacija.

Neka A predstavlja otpor bureta koji deluje na njegove spoljašnje površine, a B otpor praznog bureta koji deluje na unutrašnje površine. Ako su otpori, koji deluju na unutrašnje delove tela sa jednakom brzinom, proporcionalni sa materijom, ili sa brojem čestica na koje deluje otpor, onda će otpor koji deluje na te unutrašnje delove bureta iznositi 78B kada je puno, pa će se celokupni otpor A + B praznog bureta odnositi prema celokupnom otporu A + 78B punog bureta kao 77 prema 78, ili A + B prema 77B kao 77 prema 1, ili A + B prema B kao 77 × 77 prema 1, tj., A prema B kao 5928 prema 1. Prema tome, otpor praznog bureta koji deluje na njegove unutrašnje delove biće više od 5000 puta manji od otpora koji deluje na spoljašnje delove. Ovakvo rasuđivanje zavisi od pretpostavke da veći otpor punog bureta ne nastaje zbog nekog skrivenog uzroka, već samo usled delovanja neke suptilne tečnosti na sadržani metal.

Ovaj eksperiment izložen je prema pamćenju, jer je izgubljen papir na kome sam ga zapisao, tako da sam morao izostaviti pojedine delove koje sam zaboravio, a pritom nemam slobodnog vremena da ga ponovim. Prvi put kad sam izveo ovaj eksperiment, kuka je bila slaba, pa je puno bure usporilo ranije. Uzrok tome je bila kuka koja nije bila dovoljno jaka da podnese težinu bureta, pa se ponekad, tokom oscilovanja napred-nazad, naginjala ka jednoj, a ponekad ka drugoj strani. Zbog toga sam obezbedio kuku dovoljne jačine tako da je tačka kačenja mogla ostati nepokretna, posle čega se sve dešavalo onako kao što je gore opisano.

ODELJAK VII

O kretanju tečnosti i o otporu koji deluje na bačena tela

PROPOZICIJA XXXII. TEOREMA XXVI

Pretpostavimo da se dva slična sistema tela sastoje iz jednakog broja čestica i neka su u oba sistema pojedinačno odgovarajuće čestice slične i proporcionalne, kao i da imaju slične međusobne položaje i da međusobno imaju isti dati odnos gustina. Neka te čestice započnu da se kreću u proporcionalnim vremenima i na isti način (tj., međusobno one u jednom sistemu, i međusobno one u drugom sistemu). I ako se čestice koje su u jednom sistemu međusobno ne dodiruju, osim u momentima refleksije, i ako se međusobno ni ne privlače, ni odbijaju, osim usled sile ubrzanja koja je obrnuto proporcionalna sa prečnicima odgovarajućih čestica, a direktno sa kvadratima brzina – tvrdim da će čestice ovih sistema nastaviti međusobno da se kreću na isti način i u proporcionalnim vremenima.

Naveo sam da se slična tela u sličnim položajima međusobno pomeraju sličnim kretanjima i u proporcionalnim vremenima, a da su pritom njihovi položaji na kraju svakog od tih vremena uvek međusobno slični, ukoliko npr. uporedimo čestice u jednom sistemu sa odgovarajućim česticama u drugom. Odatle sledi da su vremena proporcionalna i da će tokom tih vremena slični i proporcionalni delovi sličnih oblika biti opisani s odgovarajućim česticama.

Prema tome, ako pretpostavimo ovakva dva sistema, odgovarajuće čestice će, usled sličnosti njihovih kretanja na početku, nastaviti da se pomeraju sa istim kretanjima sve dok se ne sretnu, jer, ako na njih ne deluje nikakva sila, nastaviće da se kreću ravnomerno pravolinijski prema Zakonu I. Međutim, ako one međusobno deluju jedna na drugu nekim određenim silama i ako su te sile obrnuto proporcionalne sa prečnicima odgovarajućih čestica, a direktno sa kvadratima brzina, onda će, pošto su čestice u sličnim položajima i pošto su njihove sile proporcionalne, celokupne sile koje deluju na odgovarajuće čestice i koje se sastoje iz svih sila koje deluju (prema Kor. 2 zakona), imati iste pravce i isto dejstvo kao kada bi njihovi centri bili podjednako smešteni među česticama. Te celokupne sile međusobno bi se odnosile kao nekoliko sila iz kojih se sastoje, tj., obrnuto proporcionalno sa prečnicima odgovarajućih čestica, a direktno sa kvadratima brzina i zbog toga će odgovarajuće čestice nastaviti da opisuju slične oblike. Isto bi se važilo (prema Kor. 1 i 8, Prop. IV, Knjige I) ako bi ti centri bili u stanju mirovanja. Međutim, ako bi se oni pomerili, ipak bi, usled sličnosti njihovih premeštanja, njihovi položaji među česticama sistema ostali slični, tako da bi i uvedene promene u oblicima koje opisuju čestice ostale slične. Na takav način, kretanje odgovarajućih i sličnih čestica nastaviće se sve do njihovog prvog međusobnog susreta; odatle će nastati slični sudari i slična odbijanja, koja će opet proizvesti međusobno slična kretanja čestica (prema onome što je upravo pokazano) sve dok se ponovo ne susretnu, i tako dalje *in infinitum*.

Kor. 1. Ako bilo koja dva tela, koja su slična i koja imaju slične položaje prema odgovarajućim česticama sistema, započnu da se kreću među njima na sličan način i u proporcionalnim vremenima, i ako se njihove veličine i gustine međusobno odnose kao veličine i gustine odgovarajućih čestica, onda će ta tela nastaviti da se kreću na sličan način i u proporcionalnim vremenima, jer, ono što važi za čestice, važi i za veće delove u oba sistema.

Kor. 2. Ako su svi slični i slično postavljeni delovi oba sistema međusobno u stanju mirovanja i ako dva od tih delova, koja su veća od ostalih i koja međusobno odgovaraju jedno drugom u oba sistema, započnu da se kreću po linijama jednako postavljenim, ali bez ikakvih sličnih kretanja, nakon toga će se kretati slično u ostalim delovima sistema i nastaviće da se kreću između tih delova na sličan način i proporcionalno sa vremenima. Prema tome, opisaće prostore koji su proporcionalni sa njihovim prečnicima.

PROPOZICIJA XXXIII. TEOREMA XXVII

Prema istim pretpostavkama, tvrdim da na veće delove sistema deluje otpor koji je proporcionalan sa kvadratom njihovih brzina, kvadratom njihovih prečnika i sa gustinama delova sistema.

Otpor delimično nastaje iz centripetalnih ili centrifugalnih sila s kojima čestice sistema međusobno deluju jedna na drugu, a delimično iz sudara i odbijanja čestica i većih delova. Otpori prve vrste međusobno se odnose kao cele pokretačke sile iz kojih su nastali, tj., kao cele sile ubrzanja i količine materije u odgovarajućim delovima, a prema pretpostavci, direktno su proporcionalni sa kvadratima brzina i sa količinama materije u odgovarajućim delovima, a obrnuto sa rastojanjima odgovarajućih čestica. Pošto se rastojanja čestica u jednom sistemu prema odgovarajućim rastojanjima čestica u drugom sistemu odnose kao prečnik jedne čestice ili jednog dela u prethodnom sistemu prema prečniku odgovarajuće čestice ili dela u drugom i pošto su količine materije proporcionalne sa gustinama delova i kubnim prečnicima, onda će međusobni odnos između otpora biti proporcionalan sa kvadratima brzina, kvadratima prečnika i sa gustinama delova sistema. Q.E.D.

Otpori druge vrste proporcionalni su sa brojem odgovarajućih odbijanja i sa silama tih odbijanja zajedno. Ipak, međusobni odnos brojeva odbijanja direktno je proporcionalan sa brzinama određenih delova, a obrnuto sa prostorima između njihovih odbijanja. Sile odbijanja proporcionalne su sa brzinama, veličinama i gustinama odgovarajućih delova zajedno, tj., sa brzinama, kubnim prečnicima i gustinama delova. Kada pomnožimo sve te odnose, međusobni odnos otpora odgovarajućih delova proporcionalan je sa proizvodom kvadrata brzina, kvadrata prečnika i gustinama delova. Q.E.D.

Kor. 1. Prema tome, ako su ti sistemi dve elastične tečnosti, poput našeg vazduha, a njihovi delovi međusobno u stanju mirovanja i ako su dva slična tela, koja su proporcionalna po veličini i gustini sa delovima tečnosti, u kojima su ta tela slično postavljena, na bilo koji način bačena u pravcu linija slično postavljenih, zatim, ako su sile ubrzanja, kojima čestice tečnosti međusobno deluju jedna na drugu, obrnuto proporcionalne sa prečnicima bačenih tela, a direktno sa kvadratima njihovih brzina – onda će ta tela

započeti slična kretanja u tečnostima tokom proporcionalnih vremena i opisaće slične prostore proporcionalne sa njihovim prečnicima.

Kor. 2. U istim tečnostima na bačeno telo koje se brzo kreće deluje otpor koji je približno proporcionalan sa kvadratom brzine. Ako se sile, kojima udaljene čestice međusobno deluju jedna na drugu, uvećaju proporcionalno sa kvadratom brzine, onda će na bačeno telo delovati otpor tačno proporcionalan sa kvadratom brzine. Prema tome, otpor je tačno proporcionalan sa kvadratom brzine u sredini čiji delovi na nekom rastojanju ne deluju međusobno jedan na drugi nijednom silom. Zbog toga, neka postoje tri sredine A, B i C koje se sastoje iz sličnih i jednakih delova pravilno raspoređenih na jednakim rastojanjima. Neka se delovi sredina A i B međusobno udaljavaju sa silama koje se međusobno odnose kao T prema V i neka su delovi sredine C potpuno lišeni bilo kojih od tih sila. Ukoliko se četiri jednaka tela D, E, F i G kreću u tim sredinama, prva dva tela D i E u prve dve sredine A i B, a druga dva F i G u trećoj sredini C i ako je odnos brzine tela D prema brzini tela E, kao i odnos brzine tela F prema brzini tela G, proporcionalan sa kvadratnim korenom odnosa sile T prema sili V – onda će odnos otpora tela D prema otporu tela E, kao i odnos otpora tela F prema otporu tela G biti proporcionalan sa kvadratima brzina i zato se otpor tela D odnosi prema otporu tela F kao otpor tela E prema otporu tela G. Neka su brzine tela D i F jednake, kao i brzine tela E i G. Ako uvećamo brzine tela D i F za bilo koji stepen i ako umanjimo sile čestica u sredini B proporcionalno kvadratu tog stepena, onda će se proizvoljna sredina B približiti obliku i uslovima sredine C, a otpori jednakih i jednako brzih tela E i G u ovim sredinama neprekidno će se približavati jednakosti tako da će njihova razlika na kraju biti manja od bilo koje date. A pošto se otpori telâ D i F međusobno odnose kao otpori tela E i G, onda će se i oni približavati odnosu jednakosti. Odatle sledi da na tela D i F, kada se kreću izuzetno brzo, deluju otpori koji su približno jednaki i pošto je otpor u telu F proporcionalan sa kvadratom brzine, onda će i otpor u telu D biti približno proporcionalan sa tim odnosom.

Kor. 3. Otpor tela koje se veoma brzo kreće u elastičnoj tečnosti, gotovo je isti kao kada bi delovi tečnosti bili potpuno lišeni svojih centrifugalnih sila i kada se ne bi međusobno udaljavali; ako elastičnost tečnosti nastaje iz centifugalnih sila čestica i ako je brzina toliko velika, onda čestice ne bi imale dovoljno vremena da deluju.

Kor. 4. Pošto su otpori sličnih i jednako brzih tela, u sredini čiji se delovi međusobno ne udaljavaju, proporcionalni sa kvadratima prečnika, onda će otpori, koji deluju na tela koja se kreću izuzetno velikom i jednakom brzinom u elastičnoj tečnosti, biti približno proporcionalni sa kvadratima brzina.

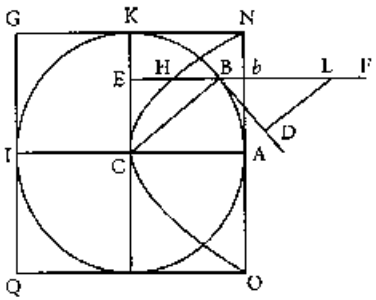
Kor. 5. Pošto će slična, jednaka i jednako brza tela, koja se kreću u sredinama sa istom gustinom čije se čestice međusobno ne udaljavaju, naići na jednaku količinu materije u jednakim vremenima, bilo da su te čestice, od kojih se sastoji sredina, brojnije i manje ili malobrojnije i veće, pa će zbog toga preneti na tu materiju jednaku količinu kretanja, a zauzvrat će (prema Zakonu III kretanja), pretrpeti jednaku reakciju, tj., na njih će jednako delovati otpor – onda je, takođe, očigledno da su, u elastičnim sredinama iste gustine i pri izuzetno brzom kretanju tela, njihovi otpori približno jednaki, bilo da se tečnosti sastoje iz velikih ili iz najmanjih delova. Jer, otpori bačenih tela koja se kreću izuzetno velikom brzinom nisu značajno umanjeni suptilnošću sredine.

Kor. 6. Sve ovo može se primeniti za tečnosti čija elastična sila nastaje iz centrifugalnih sila čestica. Međutim, ako ta sila nastaje usled nekog drugog uzroka, kao što je recimo rasprostranjenje čestica na način kao što je to slučaj u vuni, granama drveća ili u bilo kojem drugom slučaju gde su čestice sprečene da se slobodnije međusobno kreću, onda će otpor, usled manje fluidnosti sredine, biti veći nego u gore opisanim korolarima.

PROPOZICIJA XXXIV. TEOREMA XXVIII

Ako se u retkoj sredini, koja se sastoji iz jednakih čestica, slobodno raspoređenih na jednakim međusobnim rastojanjima, lopta i cilindar, koji su opisani nad jednakim prečnicima, kreću jednakim brzinama u pravcu ose cilindra, onda će otpor lopte biti dvaput manji od otpora cilindra.

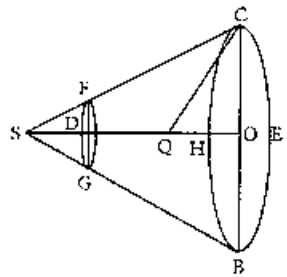
Pošto je delovanje sredine na telo isto (prema Kor. 5 zakona), bez obzira na to da li se telo kreće u sredini koja miruje ili čestice sredine deluju istom brzinom na telo koje miruje, razmotrićemo telo koje miruje i videćemo kakvom silom bi na njega delovala sre-

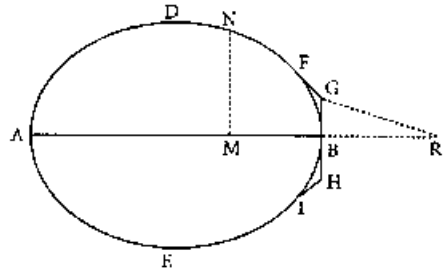


dina koja se kreće. Neka ABKI predstavlja sferno telo opisano iz centra C sa poluprečnikom CA i neka čestice sredine deluju datom brzinom na to sferno telo u pravcu pravih linija paralelnih sa AC i neka FB bude jedna od tih pravih linija. Na FB uzmimo da je LB jednaka sa poluprečnikom CB, i povucimo BD tako da dodiruje sferu u B. Na KC i BD spustimo normale BE i LD. Onda će se sila, kojom će čestica sredine, koja koso pada na loptu u pravcu FB, delovati na loptu u tački B, odnositi prema onoj sili, s kojom će ta ista čestica, koja seče cilindar ONGQ koji je opisan oko lopte sa osom ACI, delovati na njega normalno u tački *b*, kao LD prema LB, ili BE prema BC. Efikasnost ove sile da pomeri loptu u pravcu linije padanja FB ili AC odnosi se prema efikasnosti iste te sile da pomeri loptu u pravcu njene određenosti, tj., u pravcu prave linije BC u kojoj ona direktno deluje na loptu, kao BE prema BC. Kada pomnožimo ove odnose, onda se efikasnost čestice, koja koso pada na loptu u pravcu prave linije FB, u pomeranju lopte u pravcu njenog pada, odnosi prema efikasnosti iste te čestice, koja pada na istu liniju normalno u odnosu na cilindar, u pomeranju u istom tom pravcu, kao BE^2 prema BC^2. Prema tome, ako na normali *b*E, koja je na kružnoj osnovi cilindra NAO i koja je jednaka sa poluprečnikom AC, uzmemo da je *b*H jednaka sa $\frac{BE^2}{CB}$, onda će se *b*H prema *b*E odnositi kao dejstvo čestice na lopti prema dejstvu čestice na cilindar. Odatle sledi da će se čvrsto telo koje je oblikovano svim pravim linijama *b*H odnositi prema čvrstom telu koje je oblikovano svim pravim linijama *b*E kao dejstvo svih čestica na lopti prema dejstvu svih čestica na cilindru. Ipak, prvo od ovih čvrstih tela jeste paraboloid čiji je vrh C, osa CA, a žižni parametar CA, a drugo čvrsto telo je cilindar koji je opisao krug oko paraboloida, a poznato je da paraboloid iznosi polovinu opisanog cilindra. Stoga celokupna sila sredine koja deluje na loptu iznosi polovinu od celokupne sile iste sredine koja deluje na cilindar. Zatim, ako su čestice sredine u stanju mirovanja i ako se cilindar i lopta kreću jednakim brzinama, onda će otpor lopte biti dvaput manji od otpora cilindra. Q.E.D.

SHOLIJA

Istim metodom mogu se međusobno uporediti i druge figure prema njihovim otporima, a mogu se pronaći među onima koje su sklone da nastave svoje kretanje u otpornim sredinama. Ako na kružnoj osnovi CEBH, iz centra O sa poluprečnikom OC i visinom OD, konstruišemo odsečak CBGF konusa, čiji bi otpor bio manji od otpora bilo kog drugog odsečka konstruisanog na istoj osnovi i na istoj visini i ako nastavi da se kreće prema D u pravcu ose, zatim ako presečemo visinu OD na pola u tački Q i produžimo OQ do S tako da QS može biti jednako sa QC, onda će S biti vrh konusa čiji odsečak tražimo.





Pošto je ugao CSB uvek oštar, i ako je čvrsto telo ADBE oblikovano presavijanjem eliptične ili ovalne figure ADBE oko ose AB, i ako tako oblikovanu figuru dodiruju tri prave linije FG, GH i HI u tačkama F, B i I, tako da je GH normalna u odnosu na osu u dodirnoj tački B, a FG i HI mogu biti nagnute prema GH uglovima FGB i BHI od 135 stepeni, onda će na čvrsto telo koje nastaje presavijanjem figure ADFGHIE oko iste ose AB delovati manji otpor nego na prethodno čvrsto telo, naime, ako se oba kreću napred u pravcu ose AB i ako se krajnja tačka B u oba tela nalazi najdalje. Smatram da se ova propozicija može upotrebiti za izgradnju brodova.

Ako je figura DNFG kriva takvog oblika da, ako iz bilo koje njene tačke, recimo N, spustimo normalu NM na osu AB i ako iz date tačke G povučemo pravu liniju GR paralelno sa pravom linijom koja dodiruje figuru u N, i ako presečemo osu koja je produžena do R tako da će se MN prema GR odnositi kao GR^3 prema $4BR \times GB^2$, onda će na čvrsto telo, opisano obrtanjem te figure oko ose AB, krećući se u, gorepomenutoj, retkoj sredini od A ka B, manje delovati otpor nego na bilo koje drugo kružno telo opisano sa jednakom dužinom i širinom.

PROPOZICIJA XXXV. PROBLEM VII

Ako se retka sredina sastoji od veoma malih čestica jednake veličine koje su u stanju mirovanja i koje su slobodno međusobno raspoređene na jednakim rastojanjima, onda ćemo pronaći otpor lopte koja se kreće ravnomerno pravolinijski u toj sredini.

Slučaj 1. Pretpostavićemo da se cilindar, opisan sa jednakim prečnikom i visinom, kreće napred jednakom brzinom u pravcu ose kroz istu sredinu. Takođe ćemo pretpostaviti da se čestice sredine, sa kojima se sreću lopta ili cilindar, odbijaju najvećom mogućom silom odbijanja. Onda je otpor lopte (prema prethodnoj Propoziciji) dvostruko manji od otpora cilindra i lopta se odnosi prema cilindru kao 2 prema 3 i pošto cilindar normalno pada na čestice, odbija ih najvećom silom i prenosi im brzinu koja je dvostruko veća od njegove, i onda će cilindar, koji se kreće napred ravnomerno pravolinijski preko polovine dužine ose, prenositi česticama kretanje koje se prema celokupnom kretanju cilindra odnosi kao gustina sredine prema gustini cilindra. A lopta će, u vremenu tokom kojeg opisuje jednu dužinu svog prečnika krećući se ravnomerno napred, preneti isto to kretanje česticama, a u vremenu tokom kojeg opisuje dve trećine svog prečnika, preneće česticama takvo kretanje koje se prema celokupnom kretanju lopte odnosi kao gustina sredine prema gustini lopte. Prema tome, na loptu deluje otpor koji se prema sili, kojom se celokupno kretanje može ili prigušiti ili stvoriti u vremenu tokom kojeg lopta opisuje dve trećine svog prečnika krećući se ravnomerno napred, kao gustina sredine prema gustini lopte.

Slučaj 2. Ako pretpostavimo da se čestice sredine, koje nailaze na loptu ili cilindar, ne odbijaju, onda će cilindar koji pada normalno na čestice njima preneti svoju sopstvenu brzinu, pa će na njega delovati otpor dvaput manji nego u prethodnom slučaju. Na loptu će delovati otpor takođe dvaput manji.

Slučaj 3. Ako pretpostavimo da se čestice sredine odbijaju od lopte silom koja nije ni najveća niti je jednaka nuli, već je neka određena srednja sila, onda će otpor lopte biti u istom srednjem odnosu između otpora u prvom i otpora u drugom slučaju. Q.E.I.

Kor. 1. Prema tome, ako su lopta i čestice beskonačno tvrdi i lišeni svake elastične sile, pa prema tome i sile odbijanja, onda će se otpor lopte odnositi prema sili, kojom se celokupno kretanje lopte

može ili uništiti ili stvoriti u vremenu tokom kojeg lopta opisuje četiri trećine dela njenog prečnika, kao gustina sredine prema gustini lopte.

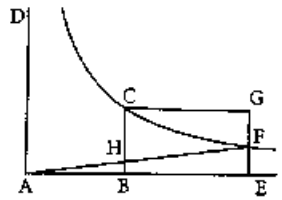
Kor. 2. Otpor lopte je, *caeteris paribus*, proporcionalan sa kvadratom brzine.

Kor. 3. Otpor lopte je, *caeteris paribus*, proporcionalan sa kvadratom prečnika.

Kor. 4. Otpor lopte je, *caeteris paribus*, proporcionalan sa gustinom sredine.

Kor. 5. Otpor lopte proporcionalan je sa kvadratom brzine, kvadratom prečnika i gustinom sredine.

Kor. 6. Kretanje lopte i otpor mogu se izložiti na sledeći način. Neka je AB vreme tokom kojeg lopta može, usled otpora koji se ravnomerno nastavlja, izgubiti svoje celokupno kretanje. Podignućemo AD i BC normalno na AB. Neka BC predstavlja to celokupno kretanje i kroz tačku C opisaćemo hiperbolu CF sa asimptotama AD i AB. Produžićemo AB do bilo koje tačke E i podignućemo normalu EF koja seče hiperbolu u F. Zatim ćemo dovršiti paralelogram CBEG



i povući ćemo AF koja seče BC u H. Onda, ako lopta, u bilo kom vremenu BE i sa kretanjem BC ravnomerno napred, opisuje u neotpornoj sredini prostor CBEG koji je predstavljen površinom paralelograma, onda će ta lopta u otpornoj sredini opisati prostor CBEF koji je predstavljen površinom hiperbole. Kretanje lopte će na kraju tog vremena predstavljati ordinatu hiperbole EF sa izgubljenim delom kretanja FG. A njen otpor na kraju tog istog vremena predstavljaće dužinu BH sa izgubljenim delom otpora CH. A sve to sledi iz Kor. 1 i 3, Propozicije V, Knjige II.

Kor. 7. Prema tome, ako lopta, u vremenu T i sa otporom R koji ostaje nepromenjen, izgubi svoje celokupno kretanje M, onda će ista ta lopta, u vremenu t i u otpornoj sredini u kojoj se otpor R umanjuje proporcionalno sa kvadratom brzine, izgubiti od svog kretanja M deo $\frac{tM}{T+t}$, dok će zadržati deo $\frac{TM}{T+t}$ i opisaće prostor koji se prema prostoru, opisanom u vremenu t sa ravnomernim kretanjem M, odnosi kao logaritam broja $\frac{T+t}{T}$ pomnožen brojem 2,302585092994 prema broju $\frac{t}{T}$, jer je odnos hiperbolične površine BCFE prema pravougaoniku BCGH u toj proporciji.

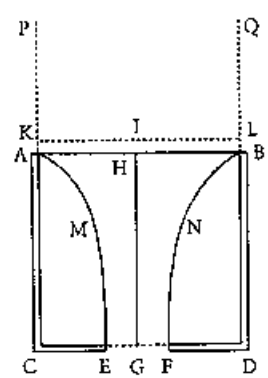
SHOLIJA

U ovoj propoziciji izložio sam otpor i usporavanje bačenih sfernih tela u sredinama koje nisu kontinuirane i pokazao sam da se taj otpor odnosi prema sili, kojom se celokupno kretanje lopte može ili uništiti ili stvoriti u vremenu tokom kojeg lopta može opisati dve trećine svog prečnika ravnomernom brzinom, kao gustina sredine prema gustini lopte, ako su lopta i čestice sredine savršeno elastični i ako na njih deluje najveća sila odbijanja, zatim, ako je ta sila, tamo gde su lopta i čestice sredine beskonačno tvrdi i lišeni bilo koje sile odbijanja, umanjena za jednu polovinu. Međutim, lopta u kontinualnim sredinama, kao što su voda, toplo ulje ili živa, dok prolazi kroz te sredine ne sudara se odmah sa svim česticama tečnosti koje stvaraju otpor, već pritiska samo one koje se nalaze pored nje, a koje onda pritiskaju čestice iza, i tako dalje; i u ovim sredinama otpor je umanjen za još jednu polovinu. Na loptu u ovim izuzetno tečnim sredinama deluje otpor koji se odnosi prema sili, kojom se celokupno kretanje može ili uništiti ili stvoriti u vremenu tokom kojeg može biti opisano, sa ravnomernim kretanjem, osam trećina dela prečnika, kao gustina sredine prema gustini lopte. U onome što sledi, nastojaću da pokažem ovo.

PROPOZICIJA XXXVI. PROBLEM VIII

Definisati kretanje vode koja ističe iz cilindričnog suda kroz rupu napravljenu na dnu.

Neka je ACDB cilindrični sud, AB njegov otvoreni vrh, CD dno koje je paralelno sa horizontom, EF okrugla rupa na sredini dna, G centar rupe, a GH osa cilindra normalna na horizont. Pretpostavimo da je cilindar od leda APQB iste širine sa šupljinom cilindra, da ima jednaku osu, da se neprekidno spušta ravnomernim kretanjem, da se njegovi delovi čim dodirnu površinu AB tope pretvarajući se u vodu koja teče u sud usled svoje težine i da pritom obrazuje vodopad ili stub vode ABNFEM, koji prolazi kroz rupu EF sasvim je ispunjavajući. Neka ravnomerna brzina leda koji se spušta i okolne vode u krugu AB bude takva kakvu bi



voda mogla zadobiti pri padanju kroz prostor IH i neka se IH i HG nalaze na istoj pravoj liniji, a kroz tačku I neka je povučena prava linija KL paralelno sa horizontom, koja seče led sa obe njegove strane u K i L. Onda će brzina vode koja teče iz rupe EF biti ista onakva kakvu bi zadobila kada bi tekla iz tačke I kroz prostor IG. Prema Galilejevim teoremama, odnos IG prema IH biće proporcionalan sa odnosom kvadrata brzine vode koja teče iz rupe prema brzini vode u krugu AB, tj., sa kvadratom odnosa kruga AB prema krugu EF. A ti krugovi obrnuto su proporcionalni sa brzinama vode koja tokom jednakog vremena i u jednakim količinama prolazi kroz svaki krug pojedinačno, pritom ih potpuno ispunjavajući. Sada ćemo razmotriti brzinu kojom voda teži ka ravni horizonta. Međutim, nećemo se osvrnuti na kretanje vode paralelno na horizont, kojim se delovi vode međusobno približavaju, jer nije stvoreno ni gravitacijom, niti menja kretanje normalno sa horizontom stvoreno gravitacijom. Svakako, pretpostavili smo da se delovi vode malo povezuju, tako da se njihovom kohezijom, tokom padanja, oni mogu međusobno približiti kretanjem paralelnim sa horizontom kako bi formirali jedan jedinstveni vodopad, a ne nekoliko njih. Ipak, kretanje paralelno sa horizontom koje nastaje iz ove kohezije nije predmet našeg trenutnog istraživanja.

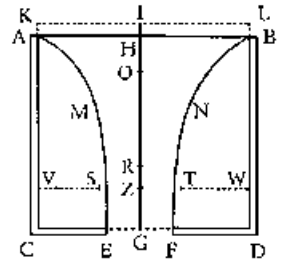
Slučaj 1. Zamislimo da je cela šupljina suda koji okružuje vodu koja teče ABNFEM ispunjena ledom tako da voda prolazi kroz led kao kroz tunel. Zatim, ako voda prolazi veoma blizu leda, ali ga ne dodiruje, ili, što je isto, ako usled glatke površine leda, voda sa najvećom slobodom klizi po njemu bez najmanjeg otpora, onda će voda isticati kroz rupu EF istom brzinom kao i ranije, a cela težina vodenog stuba ABNFEM iznosila bi kao i ranije pri izbacivanju vode, a dno suda zadržalo bi težinu leda koji okružuje taj stub.

Neka je sad led u sudu otopljen, dok isticanje vode u odnosu na brzinu ostane isto kao i ranije. Ono neće biti manje jer rastopljen led sad nastoji da teče i neće biti veće jer led, koji je sad voda, ne može teći bez ometanja toka druge vode koji se poklapa sa njegovim tokom. Jednaka sila uvek mora stvoriti jednaku brzinu u vodi koja teče.

Ipak, rupa na dnu suda, usled kosog kretanja čestica tekuće vode, mora biti malo veća nego ranije. Jer, sada, ne prolaze sve čestice vode normalno u odnosu na rupu, već dok teku na svim stranama suda i spajajući se prema rupi, prolaze kroz nju kosim kretanjem. Zatim, težeći prema dole spajaju se u mlazu čiji je prečnik

malo manji ispod rupe nego u samoj rupi; taj se prečnik približno odnosi prema prečniku rupe kao 5 prema 6 ili kao $5\frac{1}{2}$ prema $6\frac{1}{2}$, ukoliko sam dobro premerio te prečnike. Nabavio sam veoma tanku i ravnu ploču sa probušenom rupom u sredini, čiji prečnik okrugle rupe iznosi $\frac{5}{8}$ dela inča. A kako mlaz tekuće vode ne bi bio ubrzan tokom padanja i na taj način postao uži, pričvrstio sam tu ploču ne na dnu, već na strani suda tako da voda ističe u pravcu linije paralelne sa horizontom. Zatim, kada je sud bio ispunjen vodom, otvorio sam rupu i pustio da voda isteče; onda je prečnik mlaza, izmeren sa velikom preciznošću na rastojanju od oko pola inča od rupe, iznosio $\frac{21}{40}$ inča. Prema tome, prečnik ove okrugle rupe odnosi se prema prečniku mlaza približno kao 25 prema 21. Da bi voda prošla kroz rupu, ona se približava sa svih strana, a kad istekne iz suda, postaje tanja usled takve konvergencije. Pošto je postala tanja, ubrzava se sve dok ne stigne do rastojanja na pola inča do rupe, jer na tom rastojanju ona teče u tanjim mlazovima i većom brzinom nego u samoj rupi, tj., približno u odnosu 25 × 25 prema 21 × 21, ili 17 prema 12, odnosno, kao kvadratni koren iz 2 prema 1. Eksperimentima je potvrđeno da je količina vode koja ističe u datom vremenu kroz okruglu rupu na dnu suda jednaka sa onom količinom koja bi, dok teče sa gorepomenutom brzinom, istekla u istom tom vremenu kroz drugu okruglu rupu čiji se prečnik odnosi prema prethodnom kao 21 prema 25. Prema tome, tekuća voda koja prolazi kroz rupu imala bi brzinu približno jednaku onoj koju bi teško telo zadobilo pri padanju kroz polovinu visine stajaće vode u sudu. Međutim, kada voda istekne, još uvek se ubrzava usled konvergencije sve dok ne stigne na rastojanje od rupe koje je približno jednako njenom prečniku, pa zadobija brzinu koja je veća od one u rupi u odnosu kvadratnog korena iz 2 prema 1, a koju bi, približno, teško telo zadobilo pri padanju kroz celu visinu stajaće vode u sudu.

U onome što sledi, neka je prečnik mlaza predstavljen tom manjom rupom koju smo označili sa EF. Zamislimo da je još jedna ravan VW, iznad rupe EF koja je paralelna sa njom, smeštena na rastojanju jednakom sa prečnikom iste te rupe i da je probušena sa većom rupom ST koja je tolike veličine da mlaz, koji bi ispunio donju rupu EF, prolazi kroz nju, pri čemu bi se prečnik te rupe odnosio prema prečniku donje rupe približno kao 25 prema 21. Na ovakav način voda će teći normalno u odnosu na donju rupu, a količina vode koja ističe biće, u odnosu na veličinu ove poslednje

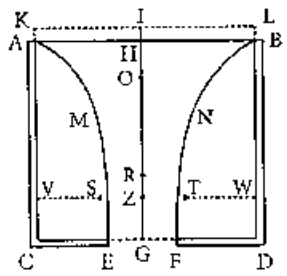


rupe, približno ista onoj koju rešenje Problema iziskuje. Prostor koji se nalazi između dve ravni, kao i mlaz, mogu se smatrati dnom suda. Ipak, da bismo učinili rešenje jednostavnijim i više matematičkim, bolje je uzeti samo donju ravan za dno suda i pretpostaviti da voda koja teče kroz led kao kroz tunel i koja ističe iz suda kroz rupu EF napravljenoj u donjoj ravni, neprekidno zadržava svoje kretanje, a da je led u stanju mirovanja. U onome što sledi neka je ST prečnik okrugle rupe opisane oko centra Z i neka mlaz ističe iz suda kroz tu rupu, onda kada je voda u sudu sva u tečnom stanju. Neka EF bude prečnik rupe koju mlaz ispunjava dok prolazi kroz nju, bilo da voda teče iz suda kroz rupu ST ili kroz sredinu leda kao kroz tunel. Neka se prečnik gornje rupe ST odnosi prema prečniku donje EF kao, otprilike, 25 prema 21, i neka normalno rastojanje između ravni rupa bude jednako prečniku manje rupe EF. Tada će brzina vode prema dole, dok ističe iz suda kroz rupu ST, biti u toj rupi kao ona koju bi telo moglo zadobiti padanjem kroz polovinu visine IZ, a brzina oba mlaza bila bi u rupi EF ista kao ona koju bi telo zadobilo padanjem kroz celu visinu IG.

Slučaj 2. Ako rupa EF nije na sredini dna suda već na nekom drugom delu, onda će voda teći istom brzinom kao i ranije, ako je veličina rupe ista. Iako teškom telu treba više vremena da stigne do iste dubine, kada pada po kosoj liniji, nego po normalnoj, ipak će zadobiti jednaku brzinu, kao što je Galilej dokazao.

Slučaj 3. Brzina vode je ista kada ona teče kroz rupu koja se nalazi na strani suda. Jer, ako je rupa mala, tako da interval između površina AB i KL može takoreći nestati i ako mlaz vode koji horizontalno izlazi može oblikovati paraboličnu figuru, onda iz žižnog parametra ove parabole možemo potvrditi da je brzina tekućih voda ona koju telo može zadobiti padanjem s visine IG ili HG u stajaćoj vodi u sudu. Izvodeći eksperiment, pronašao sam da će, ako je visina stajaće vode iznad rupe iznosila 20 inča i ako je visina rupe iznad ravni paralelne sa horizontom takođe 20 inča, mlaz vode koja odatle izlazi pasti na ravan na rastojanju od približno 37 inča od normale spuštene na tu ravan iz rupe. Bez otpora, mlaz bi pao na ravan na rastojanju od 40 inča, ako žižni parametar paraboličnog mlaza iznosi 80 inča.

Slučaj 4. Ako tekuća voda teži prema gore, ona će se takođe kretati istom brzinom. Mali mlaz vode koji teče prema gore, penje se normalnim kretanjem prema GH ili GI, tj., prema visini stajaće vode u sudu i ukoliko izuzmemo da je tokom penjanja malo ometano otporom vazduha, onda će isteći istom brzinom koju bi zadobio kada bi padao sa te visine. Svaka čestica stajaće vode jednako je pritisnuta sa svih strana (prema Prop. XIX, Knjige II) i popuštanjem prema pritisku uvek teži jednakom silom, bilo da pada kroz rupu na dnu suda ili šiklja u horizontalnom pravcu kroz rupu na strani ili prolazi kroz kanal i ističe odatle kroz malu rupu napravljenu na gornjem delu kanala. Činjenica da je brzina kojom voda ističe ista sa onom koju smo odredili u ovoj propoziciji, ne sledi samo iz ovakvog rasuđivanja, već je jasna i iz poznatih eksperimenata upravo pomenutih.



Slučaj 5. Brzina tekuće vode ista je bez obzira na to da li je oblik rupe okrugao, kvadratni, trougłasti ili bilo koji drugi sličan okruglom, jer brzina tekuće vode ne zavisi od oblika rupe, već je određena veličinom dubine ispod ravni KL.

Slučaj 6. Ako donji deo suda ABDC uronimo u stajaću vodu i ako je visina stajaće vode iznad dna posude GR, onda će brzina kojom voda iz posude ističe iz rupe EF u stajaću vodu biti ista sa onom koju bi voda zadobila padanjem sa visine IR; jer će težina vode u posudi, koja je ispod površine stajaće vode, zadržati ravnotežu pomoću težine te stajaće vode, i zbog toga uopšte neće ubrzati kretanje padajuće vode u posudi. Ovaj slučaj se pojavljuje i u eksperimentima prilikom merenja vremenâ tokom kojih bi voda istekla.

Kor. 1. Prema tome, ako se dubina vode CA produži do K, kako bi odnos AK prema CK bio jednak kvadratu odnosa površine rupe napravljene na bilo kom delu dna prema površini kruga AB, onda će brzina tekuće vode biti jednaka sa brzinom koju bi telo zadobilo pri padanju sa visine KC.

Kor. 2. Sila kojom se celokupno kretanje tekuće vode može proizvesti jednaka je sa težinom cilindričnog stuba vode čija je osnova rupa EF, a visina 2GI ili 2CK. Jer, tekuća voda, u vremenu tokom kojeg postaje jednaka sa ovim stubom, može zadobiti, padanjem

sa visine GI usled sopstvene težine, brzinu koja je jednaka onoj s kojom ističe.

Kor. 3. Težina vode u sudu ABDC odnosi se prema onom delu težine koji je upotrebljen za isticanje vode kao zbir krugova AB i EF prema dvostrukoj veličini kruga EF. Ako je IO geometrijska sredina između IH i IG, onda će voda koja ističe iz rupe EF, u vremenu tokom kog bi kap koja pada iz I opisala visinu IG, biti jednaka sa cilindrom čija je osnova krug EF a visina 2IG, tj., sa cilindrom čija je osnova krug AB a visina 2IO. Jer, krug EF odnosi se prema krugu AB kao kvadratni koren visine IH prema kvadratnom korenu visine IG, ili kao geometrijska sredina IO prema visini IG. Dalje, u vremenu tokom kojeg kap koja pada iz I može opisati visinu IH, voda koja ističe postaće jednaka sa cilindrom čija je osnova krug AB, a visina 2IH, a u vremenu tokom kojeg kap, koja pada iz I kroz H prema G, opisuje razliku visina HG, tekuća voda, tj., voda koja je sadržana u čvrstom telu ABNFEM, postaće jednaka sa razlikom cilindara, tj., sa cilindrom čija je osnova AB, a visina 2HO. Prema tome, sva voda koja je sadržana u sudu ABDC odnosi se prema vodi koja ističe i koja je sadržana u pomenutom čvrstom telu ABNFEM, kao HG prema 2HO, tj., kao HO + OG prema 2HO, ili kao IH + IO prema 2IH. Međutim, težina vode u čvrstom telu ABNFEM iskorišćena je za isticanje vode i zbog toga se težina vode u sudu odnosi prema onom delu težine koji je iskorišćen za isticanje vode kao IH + IO prema 2IH, a stoga kao zbir krugova EF i AB prema dvostrukoj veličini kruga EF.

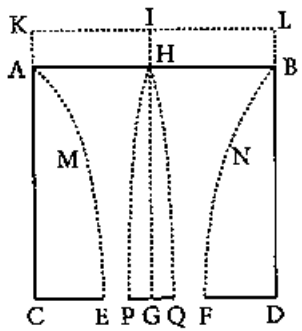
Kor. 4. Prema tome, težina vode u sudu ABDC odnosi se prema onom drugom delu težine koja je zadržana dnom suda kao zbir krugova AB i EF prema razlici istih tih krugova.

Kor. 5. Onaj deo težine koji zadržava dno suda odnosi se prema delu težine koji je iskorišćen za isticanje vode kao razlika krugova AB i EF prema dvostuko manjoj veličini kruga EF, ili kao površina dna prema dvostukoj površini rupe.

Kor. 6. Onaj deo težine koji pritiska dno odnosi se prema celokupnoj težini vode koja vertikalno pritiska to dno kao krug AB prema zbiru krugova AB i EF, ili kao krug AB prema višku dvostruke površine kruga AB u odnosu na površinu dna. Jer, taj deo težine koji pritiska dno odnosi se prema celokupnoj težini vode u sudu kao razlika krugova AB i EF prema zbiru tih istih krugova (prema Kor. 4), a težina vode u sudu odnosi se prema težini vode koja normalno pritiska dno kao krug AB prema razlici krugova AB i EF.

Prema tome, *ex aequo perturbate*, onaj deo težine koji pritiska dno odnosi se prema težini vode koja vertikalno pritiska dno kao krug AB prema zbiru krugova AB i EF, ili kao višak dvostruke površine kruga AB u odnosu na površinu dna.

Kor. 7. Ako je u sredini rupe EF smešten mali krug PQ opisan oko centra G paralelno sa horizontom, onda je težina vode koju zadržava taj mali krug veća od trećeg dela težine cilindra vode čija je osnova taj mali krug, a visina GH. Neka je ABNFEM vodopad ili stub vode čija je osa GH i pretpostavimo da je voda, čija fluidnost nije neophodna za brzo padanje vode, zamrznuta oko vodopada, kao i oko malog kruga. Neka je PHQ stub vode koji je zamrznut iznad malog kruga, čiji je vrh H, a visina GH. Pretpostavimo da vodopad pada svojom celom težinom prema dole i da ni najmanje ne pritiska PHQ, već da slobodno klizi po njemu bez ikakvog trenja, osim možda na samom vrhu leda, gde vodopad na početku svog pada može težiti konkavnom obliku. I pošto je zaleđena voda AMEC i BNFD koja se nalazi oko vodopada konveksna na svojim unutrašnjim površinama AME i BNF koje su okrenute prema vodopadu, onda će i stub PHQ takođe biti konveksan prema vodopadu zbog čega će biti veći od konusa čija je osnova taj mali krug PQ a visina GH, tj., veći od trećeg dela cilindra opisanog sa istom osnovom i visinom. Sada, taj mali krug će zadržavati težinu ovog stuba, tj., težinu koja je veća od težine konusa, ili trećeg dela cilindra.



Kor. 8. Težina vode koju zadržava veoma mali krug PQ izgleda da je manja od dve trećine težine cilindra vode čija je osnova taj mali krug, a visina HG. U skladu s prethodnim pretpostavkama, zamislićemo da je opisana polovina sferoida čija je osnova taj mali krug, a poluosa ili visina HG. Ta figura biće jednaka sa dve trećine tog cilindra i sadržaće stub zaleđene vode PHQ, čija je težina zadržana tim malim krugom. Iako kretanje vode teži direktno prema dole, spoljašnje površine tog stuba ipak moraju seći osnovu PQ pod unekoliko oštrim uglom zbog toga što je voda tokom pada neprekidno ubrzana, pa usled tog ubrzanja mlaz postaje uži. Pošto je taj ugao manji od pravog ugla, onda će se stub u užim delovima nalaziti unutar polusferoida. U gornjim delovima takođe će biti

oštar ili zašiljen, jer da bi bilo obrnuto, horizontalno kretanje vode pri vrhu mora biti beskonačno brže od kretanja prema horizontu. Što je manji taj krug PQ, oštriji će biti vrh tog stuba, a kada se krug umanji *in infinitum*, onda će i ugao PHQ biti umanjen *in infinitum*, pa će se i stub nalaziti unutar polusferoida. Odatle sledi da je taj stub manji od tog polusferoida, ili od dve trećine dela cilindra čija je osnova taj mali krug, a visina GH. Sada mali krug zadržava silu vode jednaku sa težinom tog stuba, dok je težina okolne vode upotrebljena za isticanje iz rupe.

Kor. 9. Težina vode koju mali krug PQ zadržava približno je jednaka sa težinom cilindra čija je osnova taj mali krug, a visina $\frac{1}{2}$ GH, jer je ta težina aritmetička sredina između težine konusa i gorepomenutog polusferoida. Međutim, ako taj mali krug nije izuzetno mali, već je uvećan tako da je jednak sa rupom EF, onda će zadržati težinu vode koja se nalazi vertikalno iznad njega, tj., težinu cilindra vode čija je osnova taj mali krug, a visina GH.

Kor. 10. Onoliko koliko mogu da prosudim, težina koju taj mali krug zadržava, uvek se odnosi prema težini cilindra vode čija je osnova taj mali krug, a visina $\frac{1}{2}$ GH, kao EF^2 prema $EF^2 - \frac{1}{2} PQ^2$, ili približno kao krug EF prema višku tog kruga u odnosu na polovinu malog kruga PQ.

LEMA IV

Ako se cilindar kreće ravnomerno napred u pravcu svoje dužine, onda otpor koji deluje na njega uopšte nije promenjen uvećanjem ili umanjenjem te dužine. Prema tome, isti je sa otporom kruga koji je opisan s istim prečnikom i koji se kreće napred istom brzinom u pravcu prave linije normalne na njenu ravan.

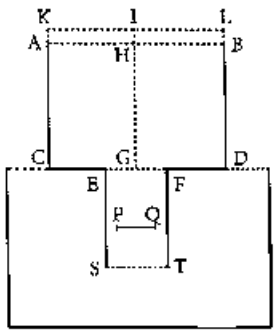
Jer, strane cilindra uopšte se ne suprotstavljaju kretanju i cilindar postaje krug kada je njegova dužina umanjena *in infinitum*.

PROPOZICIJA XXXVII. TEOREMA XXIX

Ako se cilindar kreće ravnomerno napred u sabijenoj, beskonačnoj i neelastičnoj tečnosti u pravcu svoje dužine, onda se otpor koji nastaje iz veličine njegovog poprečnog preseka odnosi prema sili, kojom se celokupno kretanje može uništiti ili stvoriti u vremenu

tokom kojeg cilindar prolazi svoju četvorostruku dužinu, približno kao gustina sredine prema gustini cilindra.

Neka sud ABDC dodiruje površinu stajaće vode svojim dnom CD i neka voda ističe iz tog suda u stajaću vodu kroz cilindrični kanal EFTS normalan u odnosu na horizont. Neka je mali krug PQ smešten bilo gde na sredini kanala paralelno sa horizontom i ako produžimo CA prema K, tako da odnos AK prema CK može biti jednak kvadratu odnosa viška otvora kanala EF u odnosu na mali krug PQ prema krugu AB. Onda je jasno (prema slučajevima 5 i 6, Kor. 1, Prop. XXXVI) da će brzina vode koja prolazi kroz prstenasti prostor između malog kruga i strana posude biti ista onakva kakvu bi voda zadobila padanjem s visine KC ili IG.



Prema Kor. 10, Prop. XXXVI, ako je širina suda beskonačna, tako da lineola HI može nestati, a visine IG i HG postati jednake, onda će se sila vode, koja teče prema dole i koja pritiska krug, odnositi prema težini cilindra, čija je osnova taj mali krug, a visina $\frac{1}{2}$ IG, približno kao EF^2 prema $EF^2 - \frac{1}{2} PQ^2$. Jer, sila vode koja ravnomerno teče prema dole kroz ceo kanal delovala bi podjednako na mali krug PQ u bilo kom delu kanala da je smešten.

Neka su sada otvori EF i ST zatvoreni i neka se mali krug podiže u tečnosti sabijenoj sa svih strana. Neka to podizanje čini da se voda koja se nalazi iznad kruga spušta kroz prstenasti prostor između malog kruga i strana kanala. Onda će se brzina malog tela koje se podiže odnositi prema brzini vode koja se spušta kao razlika krugova EF i PQ prema krugu PQ, a brzina malog kruga koji se podiže odnosiće se prema zbiru brzina, tj., prema relativnoj brzini vode koja se spušta i kojom prolazi pored malog kruga koji se podiže, kao razlika krugova EF i PQ prema krugu EF, ili kao $EF^2 - PQ^2$ prema EF^2. Neka je ta relativna brzina jednaka onoj brzini kojom bi, kao što je ranije pokazano, voda prošla kroz prstenasti prostor, ako krug ostaje nepokretan, tj., brzini koju bi telo zadobilo padanjem s visine IG, a sila vode koja deluje na krug koji se podiže biće ista kao i ranije (prema Kor. 5 Zakona o kretanju); tj., otpor malog kruga koji se podiže odnosiće se prema težini cilindra vode

čija je osnova taj mali krug, a visina $\frac{1}{2}$ IG, približno kao EF^2 prema $EF^2 - \frac{1}{2} PQ^2$. Međutim, brzina malog kruga odnosiće se prema brzini koju bi voda zadobila padanjem s visine IG, kao $EF^2 - PQ^2$ prema EF^2.

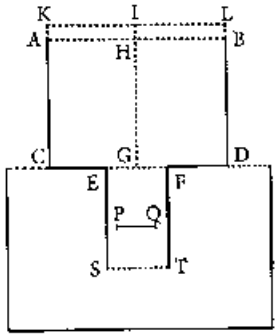
Ukoliko se širina kanala uveća *in infinitum*, onda će odnosi između $EF^2 - PQ^2$ i EF^2 i između EF^2 i $EF^2 - \frac{1}{2} PQ^2$ postati odnosi jednakosti. Zbog toga će brzina malog kruga sada biti jednaka brzini koju bi voda zadobila padanjem iz visine IG, a otpor će postati jednak težini cilindra čija je osnova taj mali krug, a visina polovina visine IG iz koje cilindar mora pasti da bi stekao brzinu kruga koji se podiže, a tom brzinom cilindar će, u vremenu svog padanja, opisati četvorostruku svoju dužinu. Međutim, otpor cilindra koji se kreće napred tom brzinom i u pravcu svoje dužine isti je sa onim otporom malog kruga (prema Lemi IV), pa je zbog toga približno jednak sili kojom kretanje može biti stvoreno pri opisivanju četvorostruke dužine.

Ako je dužina cilindra uvećana ili umanjena, onda će njegovo kretanje, kao i vreme tokom kog opisuje četvorostruku svoju dužinu, biti uvećani ili umanjeni u istom odnosu, pa će sila, kojom tako uvećano ili umanjeno kretanje može biti uništeno ili stvoreno, ostati nepromenjena, jer je vreme uvećano ili umanjeno u istoj proporciji, pa zbog toga sila i dalje ostaje jednaka s otporom cilindra jer (prema Lemi IV) taj otpor takođe ostaje nepromenjen.

Ako se gustina cilindra uveća ili umanji, onda će se njegovo kretanje, kao i sila kojom se to kretanje može stvoriti ili uništiti, tokom istog vremena, uvećati ili umanjiti u istom odnosu. Prema tome, otpor bilo kog cilindra odnosiće se prema sili kojom njegovo celokupno kretanje može biti stvoreno ili uništeno, u vremenu tokom kojeg cilindar prođe put jednak četvorostrukoj svojoj dužini, približno kao gustina sredine prema gustini cilindra. Q.E.D.

Tečnost se mora sabiti da bi postala čvrsta; ona mora biti čvrsta i neelastična tako da se sav pritisak koji nastaje sabijanjem može momentalno raširiti. Na taj način, delujući jednako na sve delove tela koje se kreće, neće stvoriti nikakvu promenu otpora. Pritisak koji nastaje iz kretanja tela potrošen je pri stvaranju kretanja u delovima tečnosti, a to onda stvara otpor. Međutim, pritisak koji nastaje iz sabijanja tečnosti, bez obzira na to koliko jak može biti, ako se rasprostire momentalno, ne stvara kretanje u delovima neprekidne tečnosti, a ne stvara ni bilo kakvu promenu u kretanju unutar te tečnosti – prema tome, niti uvećava niti umanjuje otpor.

Sigurno je da delovanje tečnosti koje nastaje iz sabijanja ne može biti jače na zadnjim delovima tela koje je pomereno od onog na njegovim prednjim delovima, pa zbog toga ne može ni umanjiti otpor koji je opisan u ovoj propoziciji. I ako je prostiranje beskonačno brže od kretanja tela na koje deluje pritisak, ono na prednjim delovima neće delovati jače nego na zadnjim. Ipak, delovanje će biti beskonačno brže i raširiće se momentalno ako je tečnost čvrsta i neelastična.



Kor. 1. Otpori koji deluju na cilindre koji se kreću ravnomerno napred u pravcu njihovih dužina kroz čvrste i beskonačne sredine, proporcionalni su sa kvadratom brzina, kvadratom prečnika i sa gustinama sredina.

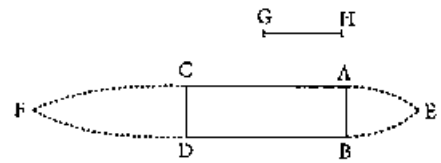
Kor. 2. Ako širina kanala nije beskonačno uvećana tako da se cilindar kreće napred u pravcu svoje dužine kroz sadržanu sredinu koja je u stanju mirovanja i ako se njegova osa poklapa sa osom kanala, onda će odnos otpora prema sili, kojom se celokupno kretanje, u vremenu tokom kog cilindar opisuje svoju četvorostruku dužinu, može stvoriti ili uništiti, biti jednak proizvodu odnosa EF^2 prema $EF^2 - \frac{1}{2} PQ^2$ i kvadrata odnosa EF^2 prema $EF^2 - PQ^2$, kao i odnosa gustine sredine prema gustini cilindra.

Kor. 3. Prema istim pretpostavkama, ako je odnos dužine L prema četvorostrukoj dužini cilindra jednak proizvodu odnosa $EF^2 - \frac{1}{2} PQ^2$ prema EF^2 i kvadrata odnosa $EF^2 - PQ^2$ prema EF^2, onda će se otpor cilindra odnositi prema sili kojom se celokupno kretanje, u vremenu tokom kojeg opisuje dužinu L, može ili uništiti ili stvoriti, kao gustina sredine prema gustini cilindra.

SHOLIJA

U ovoj Propoziciji istražili smo otpor koji nastaje iz veličine poprečnog preseka cilindra, zanemarujući onaj deo koji može nastati iz ukošenog kretanja. Jer, u Slučaju 1 iz Propozicije XXXVI, ukošenost kretanja, kojim su se delovi vode u sudu sabijali sa svih strana prema rupi EF, ometala je isticanje vode kroz rupu, a u ovoj propoziciji, ukošenost kretanja, kojim su se delovi vode koji su pritisnuti gornjim delom cilindra i koji popuštaju pritisku i razilaze se na sve strane, usporava njihov prolaz kroz mesta koja se nalaze na tom gornjem delu, prema zadnjim delovima cilindra i uzrokuju da se tečnost pomeri do većeg rastojanja, a to uvećava otpor skoro u istom odnosu u kom on umanjuje isticanje vode iz suda, tj., približno kao kvadrat odnosa 25 prema 21. Takođe, u Slučaju 1 iste Propozicije, učinili smo da delovi vode prolaze kroz rupu EF normalno i u velikoj količini, tako što smo pretpostavili da je sva voda u sudu koja se nalazi oko vodopada zamrznuta i da je onaj deo vode čije je kretanje ukošeno i nekorisno bez kretanja, kao u ovoj propoziciji, tako da se ukošenost kretanja može izostaviti, a da delovi vode mogu dati najslobodniji prolaz prema cilindru, prilazeći mu sa najdirektnijim i najbržim mogućim kretanjem, tako da preostane samo toliko otpora koliko može nastati iz veličine poporečnog preseka, a koji je nesposoban za umanjenje, osim ako ne umanjuje prečnik cilindra. Sada, moramo zamisliti da se ti delovi tečnosti čija su kretanja ukošena i beskorisna i koja produžuju otpor, međusobno nalaze u stanju mirovanja na oba kraja cilindra i da se tamo spajaju i sjedinjuju sa cilindrom.

Neka je ABCD pravougaonik, a AE i BE dva parabolična luka opisana osom AB, čiji žižni parametar se prema prostoru HG, koji mora opisati cilindar koji pada kako bi zadobio brzinu kojom se pomera, odnosi kao HG prema $\frac{1}{2}$ AB. Neka su CF i DF dva druga parabolična luka opisana osom CD, čiji je žižni parametar četiri puta veći od prethodnog; onda će kruženjem figure oko ose EF biti stvoreno čvrsto telo čiji je središnji deo ABDO cilindar, o kome i govorimo, i čiji krajnji delovi ABE i CDF sadrže delove tečnosti koji su međusobno u stanju mirovanja i koji čine dva teška tela koja prianjaju cilindru kao glava i rep. Potom, ako se ovo čvrsto telo EACFDB pomera u pravcu dužine svoje ose FE ka delovima koji se nalaze iza E, onda će otpor biti približno isti sa onim koji smo odredili u ovoj propoziciji; tj., odnosiće se prema sili, kojom se celokupno kretanje cilindra može uništiti ili stvoriti u vremenu tokom kojeg opisuje dužinu 4AC sa ravnomernim kretanjem, približno kao gustina tečnosti prema gustini cilindra. A prema Kor. 7 Prop. XXXVI, otpor se mora odnositi prema sili najmanje kao 2 prema 3.



LEMA V

Ako su cilindar, sfera i sferoid jednake širine uzastopno smešteni u sredini cilindričnog kanala, tako da se njihove ose mogu poklapati sa osom kanala, onda će ta tela podjednako ometati prolazak vode kroz kanal.

Jer, prostori koji se nalaze između strana kanala, kao i cilindar, sfera i sferoid kroz koje prolazi voda, jednaki su, pa će i voda jednako proći kroz jednake prostore.

Ovo proizlazi iz pretpostavke da je sva voda, čija fluidnost ne doprinosi prolazu vode na najbrži mogući način, zamrznuta iznad cilindra, sfere i sferoida, baš kao što je i objašnjeno ranije u Kor. 7 Prop. XXXVI.

LEMA VI

Prema istoj pretpostavci, na gorepomenuta tela podjednako deluje voda koja teče kroz kanal.

Ovo proizlazi iz Leme V Zakona III. Jer, voda i tela međusobno jednako deluju jedno na drugo.

LEMA VII

Ako je voda u kanalu u stanju mirovanja i ako se tela kreću jednakom brzinom i u suprotnom pravcu kroz kanal, onda će njihovi otpori biti međusobno jednaki.

Ovo proizlazi iz poslednje Leme, jer relativna kretanja ostaju međusobno ista.

SHOLIJA

Sve izloženo odnosi se i na sva konveksna i okrugla tela čije se ose poklapaju sa osom kanala. Poneka razlika može nastati iz većeg ili manjeg trenja. Međutim, u ovim lemama pretpostavili smo da su tela savršeno glatka i da je sredina lišena čvrstoće i trenja, kao i da su oni delovi tečnosti, koji svojim kosim i suvišnim kretanjem mogu remetiti, ometati ili usporiti tok vode kroz kanal, međusobno u stanju mirovanja, tako što su pričvršćeni kao voda zamrzavanjem, pomoću kojeg su prednji i zadnji delovi tela pričvršćeni na način objašnjen u Sholiji poslednje Propozicije. A u onome što sledi,

razmatramo najmanji mogući otpor koji može delovati na okrugla tela opisana sa najvećim datim poprečnim presecima.

Kada tela, koja pravolinijski plivaju po tečnosti, uzrokuju da se tečnost podigne u svojim gornjim delovima, a opadne u zadnjim delovima, posebno ako su tupog oblika, onda na njih deluje malo manji otpor nego kada bi bili oštri na svojim krajevima. A tela, koja se kreću u elastičnoj tečnosti i koja su tupa na krajevima, sabijaju tečnost malo više na prednjim delovima, a popuštaju ista na zadnjim delovima, pa zbog toga na njih deluje malo veći otpor nego kada bi bila oštra na svojim krajevima. Ipak, u ovim lemama i propozicijama ne bavimo se elastičnim, već neelastičnim tečnostima i ne razmatramo tela koja plutaju po površini tečnosti, već ona koja su duboko uronjena. I kada je jednom poznat otpor tela u neelastičnoj tečnosti, onda možemo malo uvećati taj otpor za elastične tečnosti, kao što je naš vazduh, kao i za površine stajaćih tečnosti, poput jezera i mora.

PROPOZICIJA XXXVIII. TEOREMA XXX

Ako se lopta kreće ravnomerno napred u sabijenoj, beskonačnoj i neelastičnoj tečnosti, onda se njen otpor odnosi prema sili kojom se celokupno kretanje može uništiti ili stvoriti u vremenu tokom kog lopta opisuje osam trećina svog prečnika, približno kao gustina tečnosti prema gustini lopte.

Jer, lopta se prema cilindru ograničenim istim prečnikom odnosi kao 2 prema 3 i zbog toga će sila, koja može uništiti celokupno kretanje cilindra, dok isti taj cilindar opisuje dužinu od četiri svoja prečnika, uništiti celokupno kretanje lopte, pri čemu lopta opisuje dve trećine svoje dužine, tj., osam trećina svog prečnika. Sada, otpor cilindra odnosi se prema toj sili približno kao gustina tečnosti prema gustini cilindra ili lopte (prema Prop. XXXVII), a otpor lopte jednak je otporu cilindra (prema Lemi V, VI i VII). Q.E.D.

Kor. 1. Otpori lopti u beskonačno sabijenim sredinama proporcionalni su sa kvadratima brzina, kvadratima prečnika i sa gustinama sredina.

Kor. 2. Najveća brzina kojom lopta može padati pomoću svoje relativne težine kroz otpornu tečnost, ista je onoj brzini koju može zadobiti padanjem s istom tom težinom i bez ikakvog otpora, dok pri padanju opisuje prostor koji se prema četiri trećine dela njenog

prečnika odnosi kao gustina lopte prema gustini tečnosti. Jer, lopta će u vremenu svog padanja i krećući se brzinom koju zadobija tim padanjem, opisati prostor koji će se prema osam trećina dela prečnika odnositi kao gustina lopte prema gustini tečnosti, a sila njene težine koja stvara to kretanje odnosiće se prema sili koja može stvoriti isto kretanje u vremenu tokom kojeg lopta s istom brzinom opisuje osam trećina dela prečnika kao gustina tečnosti prema gustini lopte. Zbog toga će, prema ovoj propoziciji, sila težine biti jednaka sili otpora, pa zato i ne može ubrzati loptu.

Kor. 3. Ako je poznata gustina lopte, njena brzina na početku kretanja, kao i gustina sabijene tečnosti koja je u stanju mirovanja i kroz koju se kreće lopta, onda će u bilo kom vremenu biti poznata i brzina lopte, njen otpor, kao i njome opisan prostor (prema Kor. 7 Prop. XXXV).

Kor. 4. Lopta, koja se kreće u sabijenoj tečnosti koja je u stanju mirovanja i koja ima istu gustinu kao i lopta, izgubiće polovinu količine svog kretanja pre nego što opiše dužinu od dva svoja prečnika (prema istoj Kor. 7).

PROPOZICIJA XXXIX. TEOREMA XXXI

Ako se lopta kreće ravnomerno napred kroz tečnost koja je sadržana i sabijena u cilindričnom kanalu, onda je odnos njenog otpora prema prema sili kojom njeno celokupno kretanje može biti stvoreno ili uništeno u vremenu tokom kojeg lopta opisuje osam trećina dela svog prečnika, približno jednak proizvodu sledećih odnosa: odnos otvora kanala prema višku tog otvora u odnosu na polovinu najvećeg kruga lopte, kvadrat odnosa otvora kanala prema višku tog otvora u odnosu na najveći krug te lopte i odnos gustine tečnosti prema gustini lopte.

Ovo proizlazi iz Kor. 2 Prop. XXXVII, a dokazivanje sledi na isti način kao u prethodnoj Propoziciji.

SHOLIJA

U poslednje dve propozicije pretpostavili smo da je (kao i ranije u Lemi V) zamrznuta sva voda koja se nalazi u lopti i čija fluidnost uvećava otpor. Sada, ako ta voda postane tečna, ona će uneko-

liko uvećati otpor. Međutim, u ovim propozicijama, taj otpor je toliko mali da se može zanemariti, jer konveksne površine lopte stvaraju skoro isti efekat kao i zamrznuta voda.

PROPOZICIJA XL. PROBLEM IX

Pomoću posmatranih pojava pronaći ćemo otpor lopte koja se kreće kroz savršeno tečnu i sabijenu sredinu.

Neka je A težina lopte *in vacuo*, B njena težina u otpornoj sredini, D prečnik lopte, F prostor koji se prema $\frac{4}{3}$ D odnosi kao gustina lopte prema gustini sredine, tj., kao A prema A – B, G vreme tokom kojeg će telo dok pada sa težinom B i bez otpora opisati prostor F, a H brzina koju telo zadobija padanjem. Onda će H biti najveća brzina kojom lopta uopšte može padati sa težinom B u otpornoj sredini (prema Kor. 2 Prop, XXXVIII), a otpor koji deluje na loptu, tokom njenog padanja sa tom brzinom, biće jednak sa njenom težinom B i zbog toga će se otpor koji deluje na loptu koja se kreće bilo kojom drugom brzinom odnositi prema težini B kao kvadrat te brzine prema kvadratu najveće brzine H (prema Kor. 1 Prop. XXXVIII).

To je otpor koji nastaje iz neaktivnosti materije tečnosti. Otpor koji nastaje iz elastičnosti, čvrstoće i trenja njenih delova može se istražiti na sledeći način.

Neka se lopta pusti tako da može padati u tečnosti pomoću svoje težine B i neka P predstavlja vreme tog padanja, pri čemu je vreme izraženo u sekundama, ako je vreme G dato u sekundama. Pronaći ćemo apsolutni broj N koji odgovara logaritmu 0,4342944819 $\frac{2P}{G}$ i neka je L logaritam broja $\frac{N+1}{N}$. U tom slučaju će brzina koja je zadobijena padanjem iznositi $\frac{N-1}{N+1}$H, a opisana visina će biti $\frac{2PF}{G}$ – 1,3862943611 F + 4,605170186 LF. Ako je tečnost dovoljne dubine, možemo zanemariti član 4,605170186 LF, pa će onda $\frac{2PF}{G}$ – 1,3862943611 F približno biti opisana visina. Ovo proizlazi iz Prop. IX, Knjige II i njenih korolara i istinito je pod pretpostavkom da na loptu ne deluje nijedan drugi otpor osim onog koji nastaje iz neaktivnosti materije. Sada, ako na njega deluje bilo koji drugi otpor, kretanje će biti sporije, pa će iz količine tog usporenja biti poznata i količina tog novog otpora.

Kako bi se brzina i padanje tela kroz tečnost mogli lakše pronaći, sastavio sam sledeću tabelu u kojoj prva kolona označava

vremena padanja, druga – brzine zadobijene pri padanju, od kojih najveća iznosi 100000000; treća – prostore opisane padanjem u tim vremenima, od kojih 2 F predstavlja prostor koji telo opisuje u vremenu G sa najvećom brzinom, a četvrta kolona označava prostore opisane sa najvećim brzinama u istim vremenima.

Brojevi u četvrtoj koloni jesu $\frac{2P}{G}$, a oduzimanjem broja 1,38629344 – 4,6051702 L, pronađeni su brojevi u trećoj koloni, a ti se brojevi moraju pomnožiti sa prostorom F kako bi se dobili prostori opisani padanjem. Pritom, dodata je i peta kolona koja sadrži prostore opisane, u istim vremenima, telom koje pada *in vacuo* pod dejstvom sile B koja je jednaka njegovoj relativnoj težini.

Vremena P	Brzine tela koje pada kroz tečnost	Prostori opisani pri padanju kroz tečnost	Prostori opisani s najvećom brzinom	Prostori opisani padanjem *in vacuo*
0,001 G	99999 $\frac{29}{30}$	0,000001 F	0,002 F	0,00001 F
0,01 G	999967	0,0001 F	0,02 F	0,0001 F
0,1 G	9966799	0,0099834 F	0,2 F	0,01 F
0,2 G	19737532	0,0397361 F	0,4 F	0,04 F
0,3 G	29131261	0,0886815 F	0,6 F	0,09 F
0,4 G	37994896	0,1559070 F	0,8 F	0,16 F
0,5 G	46211716	0,2402290 F	1,0 F	0,25 F
0,6 G	53704957	0,3402706 F	1,2 F	0,36 F
0,7 G	60436778	0,4545405 F	1,4 F	0,49 F
0,8 G	66403677	0,5815071 F	1,6 F	0,64 F
0,9 G	71629787	0,7196609 F	1,8 F	0,81 F
1 G	76159416	0,8675617 F	2 F	1 F
2 G	96402758	2,6500055 F	4 F	4 F
3 G	99505475	4,6186570 F	6 F	9 F
4 G	99932930	6,6143765 F	8 F	16 F
5 G	99990920	8,6137964 F	10 F	25 F
6 G	99998771	10,6137179 F	12 F	36 F
7 G	99999834	12,6137073 F	14 F	49 F
8 G	99999980	14,6137059 F	16 F	64 F
9 G	99999997	16,6137057 F	18 F	81 F
10 G	99999999 $\frac{3}{5}$	18,6137056 F	20 F	100 F

SHOLIJA

Kako bih istražio otpore tečnosti iz eksperimenata, nabavio sam kvadratni drveni sud, čija su unutrašnja dužina i širina iznosile 9 *engleskih* inča, a dubina $9\frac{1}{2}$ stopa; taj sud sam ispunio kišnicom i pošto sam obezbedio lopte napravljene od voska sa olovom

sadržanim u njima, zapisao sam vremena padanja tih lopti, pri čemu je visina sa kojih su padale iznosila 112 inča. Kubna stopa *engleske* mere sadrži 76 *troa* funti težine kišnice, a inč sadrži $\frac{19}{36}$ *troa* unci težine, ili $253\frac{1}{3}$ zrna, a vodena lopta od jednog inča u prečniku sadrži 132,645 zrna u vazduhu, ili 132,8 zrna u vakuumu, i bilo koja druga lopta biće proporcionalna sa viškom svoje težine *in vacuo* u odnosu na težinu u vodi.

Eksp. 1. Lopta, čija je težina iznosila $156\frac{1}{4}$ zrna u vazduhu, a 77 zrna u vodi, opisala je celokupnu dužinu od 112 inča za 4 sekunde. I, pošto sam ponovio eksperiment, lopta je opet 4 sekunde padala.

Težina ove lopte u vakuumu iznosi $156\frac{13}{38}$ zrna, a višak ove težine u odnosu na težinu lopte u vodi iznosi $79\frac{13}{38}$ zrna. Odatle se čini da je prečnik lopte 0,84224 delova inča. I kao višak težine lopte u vakuumu, tako se i gustina vode odnosi prema gustini lopte, kao i $\frac{8}{3}$ delova prečnika lopte (2,24597 inča) prema prostoru 2F, koji će zbog toga iznositi 4,4256 inča. Sada, lopta koja pada u vakuumu sa svojom celom težinom od $156\frac{13}{38}$ zrna u jednoj sekundi opisaće $193\frac{1}{3}$ inča; dok pada u vodi tokom istog vremena sa težinom od 77 zrna i bez otpora opisaće 95,219 inča; u vremenu G, koje se prema jednoj sekundi odnosi kao kvadratni koren prostora F, ili kao 2,2128 inča prema 95,219 inča, opisaće 2,2128 inča i dostignuće najveću brzinu H koju može steći pri padanju u vodi. Prema tome, vreme G iznosi 0,15244 sekunde. A u tom vremenu G i sa najvećom brzinom H, lopta će opisati prostor 2 F, koji iznosi 4,4256 inča, a tokom 4 sekunde opisaće prostor od 116,1245 inča. Kada oduzmemo prostor 1,3862944 F, ili 3,0676 inča, preostaće prostor od 113,0569 inča, koji će za 4 sekunde opisati lopta koja pada kroz vodu u veoma širokom sudu. Međutim, taj prostor se, usled uzanosti gorepomenutog drvenog suda, mora umanjiti u odnosu koji je jednak proizvodu kvadratnog korena odnosa otvora suda prema višku tog otvora u odnosu na polovinu velikog kruga lopte i odnosa istog tog otvora prema njegovom višku u odnosu na veliki krug lopte, tj., u odnosu 1 prema 0,9914. Kada to uradimo, prema ovoj teoriji dobićemo prostor od 112,08 inča, koji će za 4 sekunde približno opisati lopta koja pada kroz vodu u ovom drvenom sudu; ipak, prema eksperimentima ona opisuje 112 inča.

Eksp. 2. Naizmenično su puštene da padaju tri jednake lopte čije težine pojedinačno iznose $76\frac{1}{3}$ zrna u vazduhu i $5\frac{1}{16}$ zrna u vodi; svaka od njih je za 15 sekundi tokom padanja u vodi opisala visinu od 112 inča.

Izračunavanjem je dobijeno da težina svake lopte *in vacuo* iznosi $76\frac{5}{12}$ zrna, da višak ove težine u odnosu na težinu u vodi iznosi $71\frac{17}{48}$ zrna, da prečnik lopte iznosi 0,81296 inča, da $\frac{8}{3}$ delova tog prečnika iznosi 2,16789 inča, da prostor 2F iznosi 2,3217 inča, da prostor koji bi lopta od $5\frac{1}{16}$ zrna opisala u 1 sekundi iznosi 12,808 inča i da vreme G iznosi 0,301056 sekundi. Prema tome, lopta će, svojom najvećom brzinom koju može steći iz svoje težine od $5\frac{1}{16}$ zrna pri svom padanju u vodi, opisati prostor od 2,3217 inča u vremenu od 0,301056 sekundi, a za 15 sekundi opisaće prostor od 115,678 inča. Kada oduzmemo prostor 1,3862944 F, ili 1,609 inča, preostaće prostor od 114,069 inča, koji će tokom istog vremena opisati lopta koja pada, ukoliko je sud veoma širok. Međutim, pošto je naš sud veoma uzak, prostor se mora umanjiti za oko 0,895 inča. Tako će, prema teoriji, preostati prostor od 113,174 inča, koji će približno opisati lopta koja pada u tom sudu za 15 sekundi. Ipak, prema eksperimentima, ona opisuje 112 inča. Razlika nije primetna.

Eksp. 3. Naizmenično su puštene da padaju tri lopte čije težine pojedinačno iznose 121 zrno u vazduhu i 1 zrno u vodi; one padaju kroz vodu tokom 46, 47 i 50 sekundi, opisujući visinu od 112 inča.

Prema teoriji, ove lopte bi trebalo da padnu za oko 40 sekundi. Da li su njihova padanja usporena zbog toga što je, tokom sporijeg kretanja, otpor koji nastaje iz sile inercije zaista manji u odnosu na otpor koji nastaje iz drugih uzroka, ili se može pripisati malim mehurima vazduha koji se mogu zalepiti za lopte, ili razređivanju voska usled atmosferske toplote ili toplote ruke koja ih je bacila, ili, na kraju, zato što su nastale neke neprimetne greške pri merenju lopti u vodi. Prema tome, težina lopte u vodi bi trebalo da iznosi nekoliko zrna kako bi eksperiment bio izvestan i pouzdan.

Eksp. 4. Započeo sam izvođenje prethodnih eksperimenata kako bih istražio otpore tečnosti i pre nego što sam se upoznao sa teorijom koja je izložena u gornjoj Propoziciji. Kasnije sam, kako bih ispitao tu tek pronađenu teoriju, napravio drveni sud čija je unutrašnja širina iznosila 82 inča, a dubina $15\frac{1}{3}$ stopa. Onda sam napravio četiri lopte od voska, sa uključenim olovom, od kojih je svaka težila $139\frac{1}{4}$ zrna u vazduhu i $7\frac{1}{8}$ zrna u vodi. Pustio sam ih da padaju, mereći vremena njihovih padanja u vodi pomoću klatna koje je oscilovalo svake polusekunde. Lopte su bile hladne i ostale su takve tokom nekog vremena i dok su merene i dok su puštene

da padaju, pošto toplota razređuje vosak, a razređivanje umanjuje težinu lopte u vodi, onda se vosak, kada je već razređen, ne može momentalno pomoću hladnoće vratiti svojoj prvobitnoj gustini. Pre nego što su puštene da padaju, bile su potpuno uronjene u vodu, kako se njihovo padanje ne bi ubrzalo u početku usled težine bilo kog njihovog dela koji je slučajno mogao ostati iznad vode. Kada su posle uronjenja bile u savršenom stanju mirovanja, lopte su puštene sa najvećom mogućom pažnjom kako im se ne bi preneo nijedan impuls od ruke koja ih pušta. Naizmenično su padale u vremenima od $47\frac{1}{2}$, $48\frac{1}{2}$, 50 i 51 oscilacije, opisujući visinu od 15 stopa i 2 inča. Međutim, vremenski uslovi su bili malo hladniji nego kada su lopte merene, pa sam zbog toga ponovio eksperiment narednog dana; tada su lopte padale u vremenima od 49, $49\frac{1}{2}$, 50 i 53 oscilacije; pri trećem pokušaju padale su u vremenima od $49\frac{1}{2}$, 50, 51 i 53 oscilacije. Posle nekoliko uzastopnih pokušaja, ustanovio sam da lopte najčešće padaju u vremenima od $49\frac{1}{2}$ i 50 oscilacija. Kada padaju sporije, pretpostavljam da su usporene udarcima po stranama suda.

Izračunavanjem prema teoriji, težina lopte *in vacuo* iznosila je $139\frac{2}{5}$ zrna; višak te težine u odnosu na težinu lopte u vodi iznosio je $132\frac{11}{46}$ zrna; prečnik lopte – 0,99868 inča; $\frac{8}{3}$ delova prečnika – 2,66315 inča; prostor 2F – 2,8066 inča; prostor koji lopta, koja teži $7\frac{1}{8}$ zrna pri padanju bez otpora, opisuje u jednoj sekundi, iznosi 9,88164 inča; vreme G – 0,376843 sekundi. Prema tome, lopta će, najvećom brzinom kojom može padati kroz vodu pomoću sile težine od $7\frac{1}{8}$ zrna, opisati prostor od 2,8066 inča u vremenu od 0,376843 sekunde, dok će u jednoj sekundi opisati prostor od 7,44766 inča, a u vremenu od 25 sekundi, ili tokom 50 oscilacija, opisaće prostor od 186,1915 inča. Kada oduzmemo prostor od 1,366294 F, ili 1,9454 inča, preostaće prostor od 184,2461 inča koji će lopta opisati tokom tog vremena u veoma širokom sudu. Pošto je naš sud uzak, neka se taj prostor umanji u odnosu koji je jednak proizvodu kvadratnog korena odnosa otvora suda prema višku tog otvora u odnosu na polovinu velikog kruga lopte i odnosa istog tog otvora prema njegovom višku u odnosu na veliki krug lopte. Onda ćemo imati prostor od 181,86 inča, koji bi, prema teoriji, lopta opisala u tom sudu približno u vremenu od 50 oscilacija. Ipak, prema eksperimentu, lopta opisuje prostor od 182 inča tokom $49\frac{1}{2}$ i 50 oscilacija.

Eksp. 5. Četiri lopte, koje teže $154\frac{3}{8}$ zrna u vazduhu i $21\frac{1}{2}$ zrna u vodi, puštene su da padaju nekoliko puta i padale su u vremenima od $28\frac{1}{2}$, 29, $29\frac{1}{2}$ i 30 oscilacija, a ponekad tokom 31, 32 i 33 oscilacije, opisujući pritom visinu od 15 stopa i 2 inča.

Prema teoriji, padale bi približno u vremenu od 29 oscilacija.

Eksp. 6. Pet lopti, koje teže $212\frac{3}{8}$ zrna u vazduhu i $79\frac{1}{2}$ zrna u vodi, puštene su da padaju nekoliko puta i padale su u vremenima od 15, $15\frac{1}{2}$, 16, 17 i 18 oscilacija, opisujući pritom visinu od 15 stopa i 2 inča.

Prema teoriji, padale bi približno u vremenu od 15 oscilacija.

Eksp. 7. Četiri lopte, koje teže $293\frac{3}{8}$ zrna u vazduhu i $35\frac{7}{8}$ zrna u vodi, puštene su da padaju nekoliko puta i padale su u vremenima od $29\frac{1}{2}$, 30, $30\frac{1}{2}$, 31, 32 i 33 oscilacije, opisujući pritom visinu od 15 stopa i $1\frac{1}{2}$ inča.

Prema teoriji, padale bi približno u vremenu od 28 oscilacija.

U potrazi za onim što uzrokuje da neke lopte, određene težine i veličine, padaju brže a neke sporije, došao sam do sledećeg: lopte, kada se puste i kada započnu padanje, osciluju oko svojih centara, a ona strana koja je slučajno teža, pada prva, pa stvara oscilatorno kretanje. Oscilujući na takav način, lopta prenosi veće kretanje ka vodi, nego kada bi padala bez oscilovanja, a tim prenošenjem ona gubi deo svog kretanja sa kojim bi trebalo da pada i zbog toga će lopta, ako je ta oscilacija veća ili manja, biti više ili manje usporena. Pored toga, lopta će uvek padati sa te svoje strane koja se spušta tokom oscilacije, a na takav način prilaziće stranama suda, a ponekad će se i sudariti s njima. Što je lopta teža, to je jača oscilacija, a što su tela veća, voda je više uznemirena. Kako bih umanjio oscilacije, napravio sam nove lopte, od olova i voska, tako što sam olovo stavio na onu stranu lopte koja je veoma blizu površine i pustio sam lopte da padaju na takav način da teža strana lopte, što je više moguće, bude najniže na početku padanja. Posle toga, oscilacije su postale mnogo manje nego ranije, a vremena padanja više nisu bila toliko nejednaka, kao što ćemo videti u narednim eksperimentima.

Eksp. 8. Četiri lopte, koj teže 139 zrna u vazduhu i $6\frac{1}{2}$ u vodi, puštene su da padaju nekoliko puta i padale su uglavnom u vremenu od 51 oscilacije, tj., nikad više od 52 i manje od 50 oscilacija, opisujući pritom visinu od 182 inča.

Prema teoriji, padale bi u vremenu od oko 52 oscilacije.

Eksp. 9. Četiri lopte, koje teže $273\frac{1}{4}$ zrna u vazduhu i $140\frac{3}{4}$ zrna u vodi, puštene su da padaju nekoliko puta i padale su u vremenu nikad manjem od 12 i nikad većem od 13 oscilacija, opisujući pritom visinu od 182 inča.

Te lopte bi, prema teoriji, padale približno u vremenu od $11\frac{1}{3}$ oscilacija.

Eksp. 10. Četiri lopte, koje teže 384 zrna u vazduhu i $119\frac{1}{2}$ zrna u vodi, puštene su da padaju nekoliko puta i padale su u vremenima od $17\frac{3}{4}$, 18, $18\frac{1}{2}$ i 19 oscilacija, opisujući pritom visinu od $181\frac{1}{2}$ inča. A kada padnu u vremenu od 19 oscilacija, ponekad sam ih čuo kako se sudaraju sa stranom suda pre nego što dostignu dno.

Prema teoriji, padale bi približno u vremenu od $15\frac{5}{9}$ oscilacija.

Eksp. 11. Tri jednake lopte, koje teže 48 zrna u vazduhu i $3\frac{29}{32}$ zrna u vodi, puštene su da padaju nekoliko puta i padale su u vremenima od $43\frac{1}{2}$, 44, $44\frac{1}{2}$, 45 i 46 oscilacija, a najčešće tokom 44 i 45 oscilacija, opisujući pritom visinu od približno $182\frac{1}{2}$ inča.

Prema teoriji, padale bi približno u vremenu od $46\frac{5}{9}$ oscilacija.

Eksp. 12. Tri jednake lopte, koje teže 141 zrno u vazduhu i $4\frac{3}{8}$ zrna u vodi, puštene su da padaju nekoliko puta i padale su u vremenima od 61, 62, 63, 64 i 65 oscilacija, opisujući pritom prostor od 162 inča.

Prema teoriji, padale bi približno tokom $64\frac{1}{2}$ oscilacija.

Iz ovih eksperimenata jasno je da su, kada lopte padaju sporo, kao što je slučaj u drugom, četvrtom, petom, osmom, jedanaestom i dvanaestom eksperimentu, vremena padanja pravilno izložena teorijom, ali, kada lopte padaju brže, kao što je slučaj u šestom, devetom i desetom eksperimentu, onda je otpor unekoliko veći nego u odnosu s kvadratom brzine. Jer, lopte pri padanju ne osciluju mnogo, a te oscilacije, u onim loptama koje su lakše i koje padaju sporije, uskoro prestaju usled slabog kretanja, ali, u većim i težim loptama, kretanje je jače, pa oscilacije traju duže i zaustavljene su okolnom vodom tek posle nekoliko oscilacija. Pored toga, što se brže lopta kreće, tečnost manje pritiska njene zadnje delove i ako se brzina neprekidno uvećava, na kraju će ostaviti prazan prostor za sobom, osim ako se istovremeno ne poveća i sabijanje tečnosti. Sabijanje tečnosti se, prema Prop. XXXII i XXXIII, mora uvećati proporcionalno sa kvadratom brzine, kako bi se u takvoj proporciji očuvao otpor. Međutim, pošto to nije urađeno, zadnji delovi lopti koje se kreću brže nisu toliko pritisnuti, a usled nedostatka tog pritiska, njihov otpor je malo veći od onog koji je proporcionalan s kvadratom brzine.

Na takav način, teorija je saglasna sa pojavom tela koja padaju u vodi, a preostaje nam da istražimo pojavu tela koja padaju u vazduhu.

Eksp. 13. Sa vrha crkve Sv. Pavla u Londonu, u junu 1790. godine, istovremeno su puštene da padaju dve staklene lopte, od kojih je jedna napunjena živom, a druga vazduhom. Pri padanju opisali su visinu od 220 *engleskih* stopa. Drvena ploča pričvršćena je gvozdenim šarkama s jedne strane, a s druge drvenim klinom. Dve lopte koje se nalaze na toj ploči istovremeno su puštene da padaju tako što je izvučen klin pomoću gvozdene žice koja se proteže odatle pa skoro do zemlje i pošto je klin sklonjen, onda se ploča okrenula, jer je nije držalo ništa drugo osim gvozdenih šarki, pa su lopte pale sa nje. Istovremeno sa povlačenjem gvozdene žice koja je izvukla klin, pušteno je i klatno koje je oscilovalo u razmaku od jedne sekunde. Prečnici i težine lopti, kao i njihova vremena padanja izloženi su u narednoj tabeli.

Lopte ispunjene živom			*Lopte ispunjene vazduhom*		
Težina	Prečnik	Vreme padanja	Težina	Prečnik	Vreme padanja
(zrno)	(inč)	(sekunda)	(zrno)	(inč)	(sekunda)
908	0,8	4	510	5,1	$8\frac{1}{2}$
983	0,8	4 (–)	642	5,2	8
866	0,8	4	599	5,1	8
747	0,75	4 (+)	515	5,0	$8\frac{1}{4}$
808	0,75	4	483	5,0	$8\frac{1}{2}$
784	0,75	4 (+)	641	5,2	8

Međutim, neophodno je uneti ispravke u posmatranim vremenima, jer će lopte sa živom (prema Galilejevoj teoriji) opisati 257 *engleskih* stopa za 4 sekunde, a 220 stopa za samo 3 sekunde i 42 stotinke. Prema tome, pošto je izvučen klin, drvena ploča se nije tako brzo okrenula oko svojih šarki kao što je pretpostavljeno, pa je sporost tog okretanja usporila padanje lopte na početku. Jer, lopte su se nalazile oko sredine ploče i bile su bliže osi oko koje se ploča okrenula nego klinu. Zbog toga se vreme padanja produžilo za oko 18"', pa se mora ispraviti tako što će se oduzeti taj višak, posebno za najveće lopte koje, usled veličine svojih prečnika, duže ostaju na ploči koja se okreće od ostalih lopti. Kada je to urađeno, vremena tokom kojih će šest velikih lopti pasti iznose 8" 12"', 7" 42"', 7" 42"', 7" 57"', 8" 12"' i 7" 42"'.

Prema tome, peta po redu među loptama napunjenih vazduhom, čiji je prečnik iznosio 5 inča, i koja je težila 483 zrna, padala je za 8" 12"', opisujući prostor od 220 stopa. Količina vode koja je jednaka sa ovom loptom teži 16600 zrna, a ista količina vazduha teži $\frac{16600}{860}$ zrna, ili $19\frac{3}{10}$ zrna; odatle sledi da težina lopte *in vacuo* iznosi 502 $\frac{3}{10}$ zrna, a ta se težina odnosi prema težini količine vazduha jednake sa loptom kao $502\frac{3}{10}$ prema $19\frac{3}{10}$, dok se u takvom odnosu nalazi i 2F prema $\frac{8}{3}$ prečnika lopte, tj., prema $13\frac{1}{3}$ inča. Zbog toga 2F postaje jednako sa 28 stopa i 11 inča. Lopta će, tokom padanja *in vacuo* sa svojom težinom od $502\frac{3}{10}$ zrna, u jednoj sekundi opisati $193\frac{1}{3}$ inča, kao i ranije, a sa težinom od 483 zrna opisaće 185,905 inča; dok će sa tom težinom od 483 zrna *in vacuo* će opisati prostor F, ili 14 stopa i $5\frac{1}{2}$ inča, u vremenu od 57" 58"', i zadobiće najveću brzinu kojom može da pada u vazduhu. Sa tom brzinom, lopta će opisati 245 stopa i $5\frac{1}{3}$ inča u vremenu od 8" 12"'. Kada oduzmemo 1,3863 F, ili 20 stopa i $\frac{1}{2}$ inča, preostaće 225 stopa i 5 inča. Taj prostor bi, prema ovoj teoriji, trebalo opisati lopta koja pada za 8" 12"'. Međutim, eksperiment je pokazao da ona opisuje prostor od 220 stopa. Ipak, razlika je neosetna.

Sličnim proračunima primenjenim na ostale lopte koje su ispunjene vazduhom, sačinio sam narednu tabelu.

Težina lopte (zrno)	*Prečnik* (inč)	*Vreme padanja s visine od 220 stopa*	*Prostor koji bi lopte opisale prema teoriji*	*Višak*
510	5,1	8" 12"'	226 stopa 11 inča	6 stopa 11 inča
642	5,2	7" 42"'	230 stopa 9 inča	10 stopa 9 inča
599	5,1	7" 42"'	227 stopa 10 inča	7 stopa
515	5	7" 57"'	224 stope 5 inča	4 stope 5 inča
483	5	8" 12"'	225 stopa 5 inča	5 stopa 5 inča
641	5,2	7" 42"'	230 stopa 7 inča	10 stopa 7 inča

Eksp. 14. Godine 1719, u mesecu julu, dr Dezaglije (J. T. Desaguliers) iznova je izveo eksperimente ove vrste tako što je svinjske bešike oblikovao u sferu, a to je uradio tako što je u konkavnu drvenu sferu stavio bešike koje su isprva bile dobro pokvašene. Pošto su napunjene vazduhom, morale su ispuniti sfernu šupljinu u kojoj su sadržane, a kada su se osušile, izvađene su napolje. Potom su puštene sa fenjera koji se nalazio na vrhu kupole iste crkve, tj. sa visine od 272 stope, a istovremeno je puštena da pada i olovna lopta čija je težina iznosila oko 2 *troa* funte. U međuvremenu su pojedinci, koji su stajali na gornjem delu crkve odakle su lopte

puštene, posmatrali celokupno vreme padanja, dok su ostali, koji su stajali na zemlji, posmatrali razlike u vremenu između padanja olovne lopte i padanja bešike. Vremena su merena pomoću klatna koje je oscilovalo u razmaku od pola sekunde. Jedan od tih pojedinaca koji su stajali na zemlji imao je aparat koji je vibrirao četiri puta u jednoj sekundi, dok je drugi imao precizan aparat sa klatnom koji takođe vibrira četiri puta u jednoj sekundi. Jedan od onih koji su stajali na vrhu crkve imao je sličan aparat, a ti instrumenti su izumljeni tako da se mogu proizvoljno zaustaviti i ponovo pokrenuti. Olovna lopta pala je za oko $4\frac{1}{4}$ sekunde, a dodavanjem tog vremena gore navedenoj razlici između vremena, prikupljeno je celokupno vreme padanja bešike. Vremena padanja pet bešika, pošto je olovna lopta stigla do zemlje, iznosila su prvi put: $14\frac{3}{4}$", $12\frac{3}{4}$", $14\frac{5}{8}$", $17\frac{3}{4}$" i $16\frac{7}{8}$", a drugi put: $14\frac{1}{2}$", $14\frac{1}{4}$", 14", 19" i $16\frac{3}{4}$". Kada tome dodamo 4", tj., vreme padanja olovne lopte, onda je celokupno vreme padanja bešika iznosilo prvi put 19", 17", $18\frac{7}{8}$", 22" i $21\frac{1}{8}$", a drugi put: $18\frac{3}{4}$", $18\frac{1}{2}$", $18\frac{1}{4}$", $23\frac{1}{4}$" i 21". Vremena koja su posmatrana na vrhu crkve iznosila su prvi put $19\frac{3}{8}$", $17\frac{1}{4}$", $18\frac{3}{4}$", $22\frac{1}{8}$" i $21\frac{5}{8}$", a drugi put: 19", $18\frac{5}{8}$", $18\frac{3}{8}$", 24" i $21\frac{1}{4}$". Međutim, bešike nisu uvek pale direktno, već su ponekad malo lepršale u vazduhu, pa su se tokom padanja njihale napred i nazad. Onda je usled takvih kretanja vreme njihovog padanja produženo, ponekad za pola sekunde, a ponekad za celu sekundu. Druga i četvrta bešika prvi put su pale najdirektnije, a prva i treća drugi put. Peta bešika je bila naborana, pa je usled toga bila malo usporena. Njihove prečnike sam pronašao pomoću njihovih obima izmerenih veoma tankom niti koja ih dvaput obmotava. U narednoj tabeli uporedio sam eksperimente sa teorijom: uzeo sam da se gustina vazduha odnosi prema gustini kišnice kao 1 prema 860, a izračunavanjem sam dobio i prostore koje bi, prema teoriji, morale opisati lopte pri padanju.

Težina bešike (zrno)	*Prečnik* (inč)	*Vreme padanja s visine od 272 stope* (sekunda)	*Prostor koji bi, prema teoriji, morao biti opisan u tim vremenima*	*Razlika između teorije i eksperimenata*
128	5,28	19	271 stopa 11 inča	– 0 stopa 1 inč
156	5,19	17	272 stope $\frac{1}{2}$ inča	+ 0 stopa $\frac{1}{2}$ inča
$137\frac{1}{2}$	5,3	18	272 stope 7 inča	+ 0 stopa 7 inča
$97\frac{1}{2}$	5,26	22	277 stopa 4 inča	+ 5 stopa 4 inča
$99\frac{1}{8}$	5	$21\frac{1}{8}$	282 stope 0 inča	+ 10 stopa 0 inča

Teorija se, prema tome, pokazala prilično ispravnom. Sav otpor koji deluje na lopte koje se kreću ili u vazduhu ili u vodi, izgleda da je proporcionalan sa gustinama tečnosti u loptama jednakih veličina i sa jednakim brzinama.

U Sholiji, koja je dodata Odeljku VI, pokazali smo, pomoću eksperimenata sa klatnima, da su otpori jednakih i jednako brzih lopti koje se kreću u vazduhu, vodi ili živi proporcionalni sa gustinama tečnosti. Isto to ovde dokazujemo, ali sa većom preciznošću, pomoću ekeperimenata sa telima koja padaju u vazduhu i vodi. Jer, klatna pri svakoj oscilaciji pokreću kretanje u tečnosti koje je uvek suprotno sa kretanjem klatna pri vraćanju, a otpor koji nastaje iz ovakvog kretanja, kao i otpor niti na kojoj je okačeno klatno, čine celokupni otpor klatna većim od otpora koji je izveden iz eksperimenata sa telima koja padaju. Prema eksperimentima sa klatnima opisanih u toj sholiji, lopta koja je iste gustine kao i voda opisujući dužinu svog poluprečnika u vazduhu izgubiće $\frac{1}{3342}$ dela svog kretanja. Međutim, prema teoriji izvedenoj u Odeljku VII i prema potvrdi dobijenoj iz eksperimenata sa telima koja padaju, ista lopta bi, opisujući istu dužinu, izgubila samo deo svog kretanja koji je jednak sa $\frac{1}{4586}$, pri pretpostavci da se gustina vode odnosi prema gustini vazduha kao 860 prema 1. Odatle sledi da su otpori veći pri eksperimentima sa klatnima (iz pomenutog razloga) od onih pri eksperimentima sa telima koja padaju, i to u odnosu od otprilike 4 prema 3. Ipak, pošto su otpori klatna koja osciluju u vazduhu, vodi ili živi na sličan način uvećani sličnim uzrocima, onda će proporcija otpora u ovim sredinama podjednako valjano biti izložena eksperimentima sa klatnom, kao i eksperimentima sa telima koja padaju. Iz svega ovog može se zaključiti da su otpori tela, koja se kreću u bilo kojoj tečnosti, čak i u najekstremnijoj, *caeteris paribus*, propocionalni sa gustinama tečnosti.

Pošto su ove stvari na takav način postavljene, sada možemo odrediti koji će deo svog kretanja bilo koja bačena lopta u bilo kojoj tečnosti približno izgubiti u datom vremenu. Neka je D prečnik lopte, V njena brzina na početku kretanja, T vreme u kojem lopta sa brzinom V može opisati *in vacuo* prostor koji se prema prostoru od $\frac{8}{3}$ D odnosi kao gustina lopte prema gustini tečnosti. Lopta bačena u toj tečnosti izgubiće u bilo kom drugom vremenu t deo $\frac{tV}{T+t}$, dok će deo $\frac{TV}{T+t}$ preostati i opisaće prostor koji će se prema prostoru opisanom tokom istog vremena *in vacuo* sa ravnomernom brzinom V, odnositi kao logaritam broja $\frac{T+t}{T}$ pomnoženim sa

brojem 2,302585093 prema broju $\frac{1}{1}$, prema Kor. 7, Prop. XXXV. Pri sporim kretanjima, otpori mogu biti malo manji, jer je oblik lopte prilagođeniji za kretanje od oblika cilindra opisanog sa istim prečnikom. Pri bržim kretanjima, otpori mogu biti malo veći, jer elastičnost i sabijanje tečnosti nije uvećana proporcionalno s kvadratom brzine. Ipak, zanemariću ove sitne detalje.

Ako bi se vazduh, voda, živa i slične tečnosti deljenjem *in infinitum* stanjili i postali beskonačno tečne sredine, otpori, kojim bi oni delovali na bačena tela, ipak bi ostali isti. Jer, otpor koji je razmatran u prethodnim propozicijama nastaje usled inercije materije, a inercija materije je suštinska za tela i uvek je proporcionalna sa količinom materije. Deljenjem delova tečnosti, otpor koji nastaje iz čvrstoće i trenja tih delova, svakako se može umanjiti. Međutim, ovim deljenjem, količina materije uopšte se neće umanjiti i ako je količina materije ista, njena sila inercije biće ista, zbog čega će otpor, o kome ovde govorimo, biti isti, pošto je uvek proporcionalan sa tom silom. Da bismo umanjili taj otpor, mora se umanjiti količina materije u prostorima kroz koje se telo kreće. Stoga, nebeski prostor, kroz koji neprekidno prolaze planete i komete krećući se najvećom slobodom i bez i najmanjeg umanjenja njihovog kretanja, mora biti potpuno lišen bilo koje materijalne tečnosti, osim možda poneke izuzetno retke pare ili zrakova svetlosti.

Bačena tela pokreću kretanje u tečnostima svojim prolaskom kroz njih, a to kretanje nastaje iz viška pritiska tečnosti na prednjim delovima bačenog tela u odnosu na pritisak tečnosti na zadnjim delovima, a njihove gustine ne mogu biti manje, u sredinama koje su beskonačno tečne, od odnosa njihove gustine prema gustini vazduha, vode ili žive. Sada, taj višak pritiska, koji je proporcionalan sa količinom kretanja, ne samo da pokreće kretanje u tečnosti, već utiče i na bačeno telo tako što usporava njegovo kretanje. Prema tome, otpor je u svakoj tečnosti proporcionalan sa kretanjem koje je pokrenulo bačeno telo i ne može biti manji u onom najtanjem u odnosu na gustinu etera, nego što je u vazduhu, vodi ili živi u odnosu na gustinu tih tečnosti.

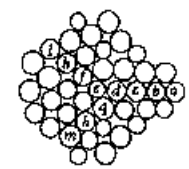
ODELJAK VIII

O kretanju koje se prostire kroz tečnost

PROPOZICIJA XLI. TEOREMA XXXII

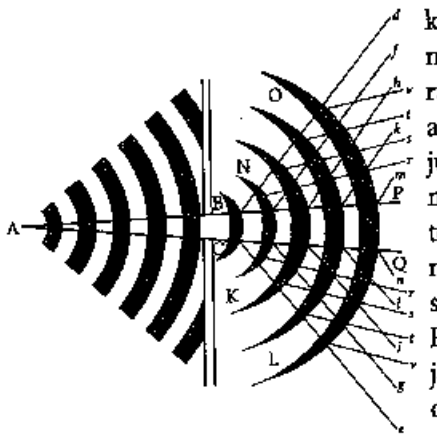
Pritisak se ne prostire pravolinijski kroz tečnost, osim ako čestice tečnosti ne leže na pravoj liniji.

Ako se čestice *a*, *b*, *c*, *d* i *e* nalaze na pravoj liniji, onda pritisak svakako može da se prostire pravo od *a* prema *e*. Međutim, ako čestica *e* teži položenim česticama *f* i *g* ukoso, onda te čestice *f* i *g* ne mogu da izdrže taj pritisak, osim ako nisu podržane česticama *h* i *k* koje se nalaze iza njih; ali, čestice koje ih podržavaju takođe su pritisnute njima, pa te čestice ne mogu da izdrže taj pritisak, osim ako nisu podržane i pritisnute onim česticama koje se nalaze još dalje, kao što su *l* i *m*, i tako dalje *in infinitum*.



Prema tome, pritisak, čim stigne do čestica koje se nalaze izvan prave linije, započinje da skreće na obe strane i odatle će se koso prostirati *in infinitum*, a pošto je započeo da se prostire koso i ako dostigne udaljenije čestice koje se nalaze van prave linije, opet će započeti skretanje i to će se dešavati toliko često sve dok deluje na čestice koje se ne nalaze tačno na pravoj liniji. Q.E.D.

Kor. Ako je bilo koji deo pritiska, koji se prostire kroz tečnost iz date tačke, zadržan preprekom, preostali deo skrenuće u prostorima iza prepreke. To se može pokazati na sledeći način. Neka se pritisak prostire iz tačke A prema bilo kom delu i, ako je moguće, pravolinijski. Ako je prepreka NBCK probijena u BC, neka sav pritisak naleti na prepreku osim konusnog dela APQ koji prolazi kroz okruglu rupu BC. Neka je konus APQ podeljen na odsečke poprečnim ravnima *de*, *fg* i *hi*. Dok konus ABC, koji prostire pritisak, deluje na konusni odsečak *degf* koji se nalazi iza njega na površini *de*, taj odsečak deluje na sledeći odsečak *fgih* na površini *fg*, a taj odsečak deluje na treći odsečak, i tako dalje *in infinitum* – onda je jasno (prema Zakonu III) da prvi odsečak *defg* usled reakcije drugog odsečka *fghi* isto toliko deluje i pritiska površinu *fg* kao što deluje i pritiska taj drugi odsečak. Prema tome, odsečak *degf* sabijen je sa obe strane, tj., između konusa A*de* i odsečka *fhig* i zbog toga (prema Slučaju 6, Prop. XIX) ne može sačuvati svoj oblik, osim ako nije sabijen sa svih strana istom silom. Dakle, istom silom

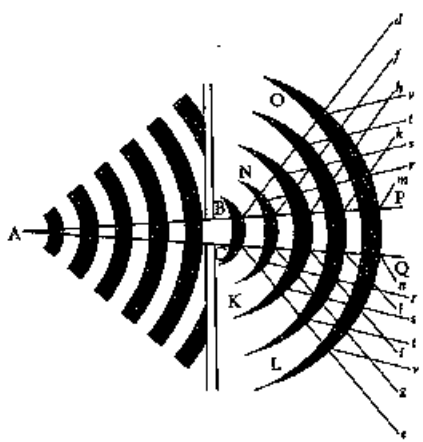


kojom je pritisnut na površinama *de* i *fg*, nastojaće da se rasporedi na stranama *df* i *eg*, a tamo će se i završiti proširujući sebe (pošto taj odsečak nije tvrd ili težak, već savršeno tečan), osim ako ne postoji neka okolna tečnost koja bi se suprotstavila tom nastojanju. Prema tome, iz svog nastojanja da se proširi, pritiskaće okolnu tečnost na stranama *df* i *eg* istom silom kao što pritiska odsečak *fghi* i zato će se pritisak prostirati od strana *df* i *eg* prema prostorima NO i KL kao što se prostire od površine *fg* prema PQ. Q.E.D.

PROPOZICIJA XLII. TEOREMA XXXIII

Sva kretanja koja se prostiru kroz tečnost skreću sa pravolinijskog pravca u nepokretne prostore.

Slučaj 1. Neka se kretanje prostire iz tačke A kroz rupu BC i ako je moguće, neka produži do konusnog prostora BCQP po pravim linijama koje se razilaze u tački A. Na početku ćemo pretpostaviti da je to kretanje poput kretanja talasa na površini stajaće vode i neka su *de*, *fg*, *hi*, *kl* itd. vrhovi nekoliko talasa koji su međusobno podeljeni sa isto toliko dolina ili šupljina. Pošto je na grebenima talasa voda viša nego na nepokretnim delovima tečnosti KL i NO, ona će teći prema dole od vrhova tih grebena *e*, *g*, *i*, *l* itd., *d*, *f*, *h*, *k* itd. prema KL i NO, a pošto je voda niža u dolinama talasa nego u nepokretnim delovima tečnosti KL i NO, ona će teći prema dole iz onih nepokretnih delova ka tim dolinama. Posle prvog oticanja, grebeni talasa će se proširiti i prostiraće se



prema KL i NO. I pošto je kretanje talasa iz A prema PQ nošeno neprekidnim tokom sa grebena talasa ka susednim dolinama, ono ne može biti brže nego što je u proporciji sa brzinom padanja, a padanje vode na svakoj strani prema KL i NO mora se izvesti istom brzinom – onda sledi da će se širenje talasa, na svakoj strani prema KL i NO, prostirati istom brzinom koju imaju i talasi kada se kreću napred od A prema PQ. Na taj način, ceo prostor prema KL i NO biće ispunjen talasima *rfgr*, *shis*, *tkit*, *vmnv*, itd. Svako može uvideti da se ovo dešava ako napravi eksperiment u stajaćoj vodi.

Slučaj 2. Pretpostavimo da *de*, *fg*, *hi*, *kl* i *mn* predstavljaju pulsiranja koja se naizmenično prostiru iz tačke A kroz elastičnu sredinu. Zamislimo da se pulsiranja prostiru naizmeničnim sabijanjima i razređivanjima sredine, tako da najgušći deo svakog pulsa može zaokupiti sfernu površinu opisanu oko centra A, a da se jednaki intervali prostiru između naizmeničnih pulseva. Neka linije *de*, *fg*, *hi*, *kl* itd. predstavljaju najgušće delove pulseva koji se prostiru kroz rupu BC i pošto je sredina tu gušća nego u prostorima sa bilo koje strane prema KL i NO, ona će se širiti kako prema tim prostorima KL i NO, sa svake strane, tako i prema retkim intervalima između pulseva; zbog toga će sredina, pošto će postajati sve ređa tokom narednih intervala, a gušća neposredno pored pulseva, doprineti njihovom kretanju. Pošto progresivno kretanje pulseva nastaje iz neprekidnog širenja gušćih delova prema prethodnim retkim intervalima, i pošto će se pulsevi međusobno širiti, sa svake strane prema delovima sredine KL i NO koji su u stanju mirovanja, približno istom brzinom – onda će se pulsevi međusobno proširiti sa svih strana prema nepokretnim delovima KL i NO, skoro istom brzinom kojom se prostiru direktno iz centra A. Zbog toga će ispuniti ceo prostor KLON. Isto ćemo pronaći pri ispitivanju zvukova koji se čuju preko planina: ako zvukovi prodru kroz prozor u sobu, raširiće se kroz sve delove te sobe i čuće se u svakom uglu; oni se ne odbijaju od suprotnih zidova, već se šire neposredno od prozora, onoliko koliko naša čula mogu da prosude. Q.E.D.

Slučaj 3. Pretpostavimo, na kraju, da se kretanje bilo koje vrste prostire od tačke A kroz rupu BC. Pošto je uzrok ovom prostiranju to da delovi sredine koji su bliži centru A poremećuju i deluju na one koji se nalaze dalje od tog centra, i pošto su ti delovi tečni, pa zato opadaju svugde prema onim prostorima u kojima su manje pritisnuti, oni će, kao posledica toga, opadati prema svim delovima sredine koja je u stanju mirovanja, tj., prema delovima na sva-

koj strani, kao što su KL i NO, kao i prema onim prethodnim, kao što je PQ. Na taj način, kretanje, čim prođe kroz rupu BC, započeće da se širi i odatle će se, iz svog početka i centra, prostirati direktno u svim pravcima. Q.E.D.

PROPOZICIJA XLIII. TEOREMA XXXIV

Svako vibrirajuće telo u elastičnoj sredini prostire kretanje svojih pulseva pravolinijski, dok u neelastičnoj sredini pobuđuje kružno kretanje.

Slučaj 1. Delovi vibrirajućeg tela, koji naizmenično odlaze i vraćaju se, tokom odlaska guraju one delove sredine koji se nalaze najbliže, i tim impulsom ih pritiskaju i sabijaju, dok pri povratku deluju na one sabijene delove tako da se ponovo udaljavaju i započinju da se šire. Prema tome, delovi sredine koji su najbliži vibrirajućem telu, kreću se naizmenično napred i nazad, na sličan način kao što to čini i samo vibrirajuće telo. I iz istog razloga iz kog delovi tog tela deluju na delove sredine, ti će delovi, pošto na njih deluju slična podrhtavanja, u svom povratku delovati na one koji se nalaze pored njih, a oni će, na sličan način, delovati na one koji se nalaze iza njih, i tako dalje *in infinitum*. Na sličan način kao što su prvi delovi sredine sabijeni u odlasku, i potom raširen u povratku, tako će i drugi delovi biti sabijeni pri svakom odlasku i širiće se pri svakom povratku. Prema tome, oni neće odlaziti i vraćati se istovremeno (jer, u tom slučaju bi uvek očuvali određeno međusobno rastojanje, pa ne bi bilo moguće naizmenično sabijanje i širenje), već se oni međusobno približavaju u mestima gde se sabijaju, a u mestima gde se šire, međusobno se udaljavaju. Zbog toga će neki delovi odlaziti dok se neki delovi vraćaju, i tako dalje *in infinitum*. Delovi koji odlaze i koji su sabijeni jesu pulsevi usled progresivnog kretanja s kojim nailaze na prepreke na svom putu i zbog toga će se neizmenični pulsevi stvoreni vibrirajućim telom prostirati u pravolinijskim pravcima i nalaziće se približno na jednakim međusobnim rastojanjima usled jednakih intervala vremena tokom kojeg telo sa svojim naizmeničnim vibrirajućim stvara naizmenične pulseve. Iako delovi vibrirajućeg tela odlaze i vraćaju se u nekom određenom pravcu, ipak će se pulsevi, koji se odatle prostiru kroz sredinu, međusobno širiti prema stranama (prema prethodnoj Propoziciji) i prostiraće se na svakoj strani od tog vibrirajućeg tela, kao od zajedničkog centra, po površinama koje su

približno sferne i koncentrične. Kao primer za ovo, poslužiće nam talasi koji su pokrenuti mešanjem vode prstom. Talasi ne samo da nastavljaju da se kreću napred i nazad shodno kretanju prsta, već se međusobno šire kao koncentrični krugovi oko prsta i prostiru se na svim stranama. U tom slučaju, sila gravitacije zamenila je elastičnu silu.

Slučaj 2. Ako sredina nije elastična i pošto njeni delovi ne mogu biti sabijeni pritiskom koji nastaje iz vibriranja tela, onda će se kretanje momentalno prostirati prema onim delovima gde sredina najviše popušta, tj., prema delovima koje bi vibrirajuće telo ostavilo praznim iza sebe. Slučaj je isti sa telom bačenim u bilo kojoj sredini. Sredina koja popušta bačenim telima ne udaljava se *in infinitum*, ali pri kružnom kretanju dolazi do onih prostora koje telo ostavlja za sobom. Prema tome, koliko često vibrirajuće telo teži ka bilo kom delu, toliko često će sredina koja popušta doći kružnim kretanjem do onih delova koje telo ostavlja za sobom i koliko često se telo vraća prvobitnom mestu, toliko često će se i sredina vratiti prvobitnom položaju. Iako vibrirajuće telo ne sme biti čvrsto i teško, već mora biti elastično, i ako je očuvalo svoju veličinu, pri čemu ne može pritisnuti sredinu svojim vibriranjem na bilo kom mestu bez popuštanja na nekom drugom mestu, onda će sredina, koja se udaljava od onih delova tela u kojima je pritisnuta, uvek dolaziti kružnim kretanjem do onih delova koji joj popuštaju. Q.E.D.

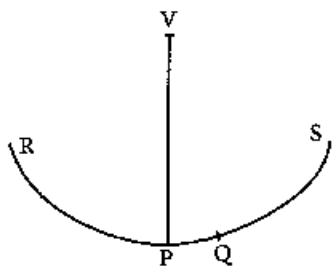
Kor. Zbog toga je pogrešno misliti, kao što to neki čine, da vibriranje delova plamena doprinosi prostiranju pritiska u pravolinijskom pravcu kroz okolnu sredinu. Pritisak te vrste mora biti izveden, ne samo iz vibriranja delova plamena, već i iz širenja celine.

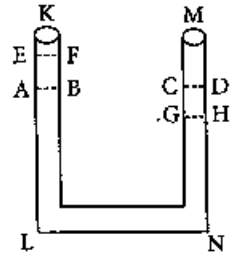
PROPOZICIJA XLIV. TEOREMA XXXV

Ako se voda naizmenično podiže i spušta na podignutim kracima KL i MN kanala ili cevi i ako je konstruisano klatno tako da je njegova dužina između tačke kačenja i centra oscilacije jednaka polovini dužine vode u kanalu, tvrdim da će se voda podizati i spuštati u istim vremenuma tokom kojih klatno osciluje.

Izmerio sam dužinu vode po osama kanala i njegovih krakova i učinio sam je jednakom sa zbirom tih osa. Pritom, nisam se obazirao na otpor vode koji nastaje iz trenja sa stranama kanala. Neka

AB i CD predstavljaju srednju dužinu vode u oba kraka i kada se voda u kraku KL podigne do visine EF, onda će se voda u kraku MN spustiti do visine GH. Neka je P klatno, VP nit, V tačka kačenja, RPQS cikloida koju opisuje klatno, P najniža tačka, a PQ luk koji je jednak sa visinom AE. Sila kojom je kretanje vode naizmenično ubrzano i usporeno jednaka je sa viškom težine vode u jednom kraku u odnosu na težinu u drugom. Prema tome, kad se voda u kraku KL podigne do EF, a u drugom kraku spusti do GH,





onda je sila jednaka dvostrukoj težini vode EABF i zbog toga se prema težini celokupne vode odnosi kao AE ili PQ prema VP ili PR. Takođe, sila kojom je telo P ubrzano ili usporeno u bilo kom mestu cikloide, recimo Q (prema Kor. Prop. LI) odnosi se prema celoj težini kao rastojanje PQ iz najniže tačke P prema dužini PR cikloide. Zbog toga su pokretačka sila vode i klatno, koji opisuju jednake prostore AE i PQ, proporcionalni sa pomerenim težinama i ako su voda i klatno prvobitno bili u stanju mirovanja, onda će ih te sile pomeriti u jednakim vremenima i uzrokovaće da se kreću napred i nazad sa naizmeničnim kretanjem. Q.E.D.

Kor. 1. Prema tome, naizmenična kretanja vode pri podizanju i spuštanju izvedena su u jednakim vremenima, bez obzira na to da li je kretanje više ili manje jako ili slabo.

Kor. 2. Ako dužina ukupne vode u kanalu iznosi $6\frac{1}{9}$ *francuskih* stopa, onda će se voda spustiti u jednoj sekundi i podignuće se u narednoj sekundi, i tako dalje *in infinitum*, jer će klatno dužine od $3\frac{1}{18}$ stopa oscilovati tokom jedne sekunde vremena.

Kor. 3. Međutim, ako se dužina vode uveća ili umanji, onda će se uvećati ili umanjiti vreme naizmeničnog kretanja proporcionalno sa kvadratnim korenom te dužine.

PROPOZICIJA XLV. TEOREMA XXXVI

Brzina talasa proporcionalna je sa kvadratnim korenom iz širina.

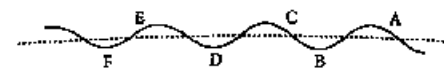
Ovo sledi iz postavke u narednoj Propoziciji.

PROPOZICIJA XLVI. PROBLEM X

Pronaći brzinu talasa.

Ako je konstruisano klatno čija je dužina između tačke kačenja i centra oscilacije jednaka sa širinom talasa, onda će se, u vremenu tokom kog klatno izvodi jednu oscilaciju, talasi približiti za dužinu koja je jednaka njihovoj širini.

Ono što ja nazivam širinom talasa zapravo je poprečno rastojanje između najdubljih delova dolina ili vrhova grebena. Neka ABCDEF predstavlja površinu stajaće vode koja se podiže i spušta uzastopnim talasima; neka A, C, E itd. budu vrhovi talasa, a B, D, F itd. središnje doline. Pošto je kretanje talasa nošeno uzastopnim podizanjem i spuštanjem vode, tako da se delovi poput A, C, E itd., koji su u jednom vremenu bili najviši, postaju najniži i pošto pokretačka sila, kojom se najviši delovi spuštaju, a najniži podižu, jeste težina podignute vode, onda će ta naizmenična podizanja i spuštanja biti jednaka sa naizmeničnim kretanjem vode u kanalu i slediće iste zakone koji važe i za vremena njihovih podizanja i spuštanja. Prema Prop. XLIV, ako su rastojanja između najviših mesta na talasima A, C i E i najnižih B, D i F jednaka sa dvostrukom dužinom bilo kog klatna, onda će najviša mesta A, C i E postati najniža u vremenu od jedne oscilacije, dok će se u vremenu naredne oscilacije ponovo podignuti. Zbog toga će se između prolaza svakog talasa desiti dve oscilacije, tj., talas će opisati svoju širinu u vremenu tokom kog će klatno oscilovati dva puta. Međutim, klatno četvorostruke dužine, koje je zbog toga jednako sa širinom talasa, samo će jednom oscilovati u tom vremenu. Q.E.D.



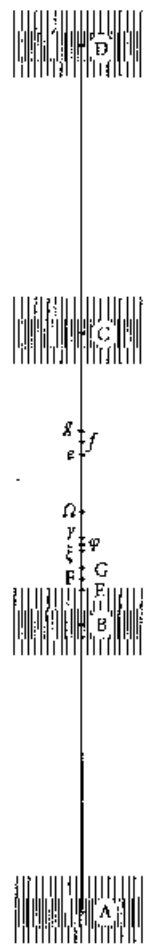
Kor. 1. Prema tome, talasi čija je širina jednaka sa $3\frac{1}{18}$ *francuskih* stopa, napredovaće kroz prostor koji je jednak njihovoj širini tokom jedne sekunde vremena i zbog toga će u jednoj minuti proći prostor od $183\frac{1}{3}$ stopa, a u jednom satu, približno 11000 stopa.

Kor. 2. Brzina većih ili manjih talasa biće uvećana ili umanjena sa kvadratnim korenom njihovih širina.

Ovo proizlazi iz pretpostavke da se delovi vode podižu ili spuštaju pravolinijski. Ipak, uistinu, to podizanje i spuštanje pre je izvedeno po krugu i zbog toga su predložena vremena u ovoj propoziciji samo približna.

PROPOZICIJA XLVII. TEOREMA XXXVII

Ako se pulsevi prostiru kroz tečnost, onda je nekoliko čestica tečnosti, koje odlaze i vraćaju se s najkraćim naizmeničnim kretanjem, uvek ubrzano ili usporeno shodno zakonu oscilatornog klatna.



Neka AB, BC, CD itd. predstavljaju rastojanja uzastopnih pulseva; ABC liniju pravca kretanja uzastopnih pulseva koji se prostiru od A prema B; E, F i G tri fizičke tačke sredine, koja je u stanju mirovanja, a koje su smeštene na pravoj liniji AC na jednakim međusobnim rastojanjima; E*e*, F*f* i G*g* jednaki prostori koji su izuzetno kratki, a kroz koje te tačke odlaze i vraćaju se naizmeničnim kretanjem u svakoj vibraciji; ε, φ i γ bilo koja središnja mesta istih tačaka; i neka su EF i FG fizičke lineole, tj. linearni delovi sredine koji se nalaze između tih tačaka, koji se naizmenično pretvaraju u mesta εφ, φγ i *ef*, *fg*. Neka je povučena prava linija PS jednaka sa pravom linijom E*e*. Preseći ćemo je na pola u O i iz centra O, sa intervalom OP, opisaćemo krug SIP*i*. Neka je ukupno vreme jedne vibracije sa proporcionalnim delovima izraženo ukupnim obimom kruga sa njegovim delovima, na takav način da se fizička tačka E može pronaći u ε, tj., onda kada je dovršeno bilo koje vreme PH ili PHS*h*, zatim, ako se normala HL ili *hl* spusti na PS i ako je uzeto da je Eε jednako sa PL ili P*l*. Tačka, kao što je E, kreće se, shodno ovom zakonu, naizmeničnim kretanjem, a idući od E kroz ε prema *e* i vraćajući se opet kroz ε do E, izvodi pojedinačne vibracije sa stepenom ubrzanja i umanjenja koji je isti kao i za oscilatorno klatno. Sada ćemo dokazati da na nekoliko fizičkih tačaka sredine deluje takva vrsta kretanja. Pretpostavimo da sredina usled bilo kog uzroka ima takvo kretanje i razmotrićemo šta odatle sledi.

Na obimu PHS*h* uzmimo jednake lukove HI, IK ili *hi*, *ik*, koji imaju isti odnos sa ukupnim obimom kao jednake prave linije EF i FG prema ukupnom intervalu pulseva BC. Spustićemo normale IM, KN ili *im*, *kn*. Pošto na tačke E, F i G uzastopno deluju takva kretanja, one će izvesti svoje cele vibracije koje se sastoje iz odlaženja i vraćanja, dok se puls prenosi iz B prema C; ako PH ili PHS*h* predstavljaju proteklo vreme od početka kretanja tačke E, onda će PI ili PHS*i* predstavljati proteklo vreme od početka kretanja tačke F, a PK ili PHS*k* proteklo vreme od početka kretanja tačke G i zbog toga će Eε, Fφ i Gγ biti jednaki sa PL, PM i PN pri odlasku tačaka, a sa P*l*, P*m* i P*n* pri njihovom vraćanju. Prema tome, εγ ili EG + Gγ – Eε biće jednako sa EG – LN pri odlasku, a pri povratku sa EG + *ln*. Ipak, εγ jeste širina ili širenje dela EG sredine u mestu εγ i zbog toga se širenje tog dela u odlasku odnosi prema srednjem širenju kao EG – LN prema EG, a u povratku kao EG + *ln* ili EG + LN prema EG.

Pošto se LN odnosi prema KH kao IN prema poluprečniku OP, a KH prema EG kao obim PHS*h*P prema BC, ili ako stavimo V za poluprečnik kruga čiji je obim jednak sa intervalom pulseva BC, kao OP prema V i, *ex aequo*, LN prema EG kao IM prema V, onda će se širenje dela EG ili fizičke tačke F u mestu εγ, odnositi prema srednjem širenju istog dela u svom prvom mestu EG, kao V – IM prema V u odlasku i kao V + *im* prema V u povratku. Odatle sledi da se elastična sila tačke F u mestu εγ odnosi prema srednjoj elastičnoj sili u mestu EG kao $\frac{1}{V-IM}$ prema $\frac{1}{V}$ u odlasku i kao $\frac{1}{V+im}$ prema $\frac{1}{V}$ u povratku. Istim rasuđivanjem, elastične sile fizičkih tačaka E i G u odlasku odnose se kao $\frac{1}{V-HL}$ i $\frac{1}{V-KN}$ prema $\frac{1}{V}$, a razlika između tih sila i srednje elastične sile sredine odnosi se kao $\frac{HL-KN}{VV-V\times HL-V\times KN+HL\times KN}$ prema $\frac{1}{V}$, tj., kao $\frac{HL-KN}{VV}$ prema $\frac{1}{V}$, ili kao HL – KN prema V, ako pretpostavimo da su (usled veoma malih opsega vibracija) HL i KN beskonačno manji od veličine V. Pošto je veličina V poznata, onda će razlika sila biti proporcionalna sa HL – KN, ili sa OM, pošto je HL – KN proporcionalno sa HK, a OM sa OI ili OP i pošto su HK i OP poznati, tj., sa Ωφ, ako je F*f* prepolovljena u Ω. Iz istog razloga će, u povratku, razlika elastičnih sila fizičkih tačaka ε i γ koje deluju na fizičku lineolu εγ biti proporcionalna sa Ωφ. Međutim, ta razlika (višak

elastične sile tačke ε u odnosu na elastičnu silu tačke φ), jeste sama ta sila kojom je fizička lineola εγ sredine ubrzana u odlasku, a usporena u povratku i zbog toga je sila ubrzanja fizičke lineole εγ proporcionalna sa rastojanjem od središnjeg mesta vibracije Ω. Zbog toga, prema Prop. XXXVIII, Knjige I, vreme je pravilno predstavljeno lukom PI, a linearni deo sredine εγ pomeren je u skladu sa gorepomenutim zakonom, tj., u skladu sa zakonom o oscilatornom klatnu. Slučaj je isti za sve linearne delove od kojih se i sastoji celokupna sredina. Q.E.D.

Kor. Odatle sledi da je broj pulseva koji se prostiru jednak broju vibracija treperavog tela i on se ne umnožava pri njihovom prostiranju. Jer, čim se fizička lineola εγ vrati na prvobitno mesto, ona je u stanju mirovanja, a neće se ponovo ni pokrenuti, osim ukoliko na nju ne deluje novo kretanje ili od impulsa vibrirajućeg tela ili od pulseva koji se prostiru od tog tela. Prema tome, čim pulsevi prestanu da se prostiru od vibrirajućeg tela, lineola će biti u stanju mirovanja i neće se dalje kretati.

PROPOZICIJA XLVIII. TEOREMA XXXVIII

Brzine pulseva koji se prostiru po elastičnoj tečnosti direktno su proporcionalni sa kvadratnim korenom iz elastične sile, a obrnuto sa kvadratnim korenom gustine pod pretpostavkom da su elastične sile tečnosti proporcionalne sa njenim sabijanjem.

Slučaj 1. Ako su sredine homogene, a rastojanja pulseva u tim sredinama međusobno jednaka i ako je kretanje u jednoj sredini jače nego u drugoj, onda će se sabijanja i širenja odgovarajućih delova međusobno odnositi kao ta kretanja. No, ta proporcija nije savršeno precizna. Ipak, ako sabijanja i širenja nisu izuzetno jaka, onda greška neće biti primetna, pa se ta proporcija može smatrati fizički tačnom. Pokretačke elastične sile proporcionalne su sa sabijanjima i širenjima, te će brzine stvorene u istim vremenima i u jednakim delovima biti proporcionalne sa silama. Prema tome, jednaki i odgovarajući delovi odgovarajućih pulseva zajedno će odlaziti i vraćati se kroz prostore koji su proporcionalni sa njihovim sabijanjima i širenjima, kao i sa brzinama koje su proporcionalne sa tim prostorima. Zbog toga će pulsevi, koji u vremenu jednog odlaska i povratka napreduju prema prostoru koji je jednak sa njihovom širinom i koji uvek stižu na mesta onih pulseva koji idu

neposredno pre njih, uvek ići napred u obema sredinama jednakom brzinom, usled jednakosti između rastojanja.

Slučaj 2. Ako su rastojanja pulseva ili njihovih dužina u jednoj sredini veće nego u drugoj, pretpostavićemo da odgovarajući delovi opisuju prostore, pri odlasku i povratku, koji su svaki put proporcionalni sa širinama pulseva. Onda će njihova sabijanja i širenja biti jednaka, a ako su sredine homogene, onda će i pokretačke elastične sile, koje deluju na njih naizmeničnim kretanjem, biti jednake. Materija, koja je pokrenuta ovim silama, proporcionalna je sa širinom pulseva, a u istom odnosu je i prostor kroz koji se kreću svaki put kada odlaze i vraćaju se. A vreme jednog odlaska i povratka proporcionalno je sa kvadratnim korenom iz materije i kvadratnim korenom iz tog prostora, pa je zato proporcionalno sa prostorom. Međutim, pulsevi napreduju kroz prostor koji je jednak njihovim širinama u vremenu jednog odlaska i jednog povratka, tj., oni prolaze kroz prostore koji su proporcionalni sa vremenima, pa su zato podjednako brzi.

Slučaj 3. Prema tome, u sredinama sa jednakom gustinom i elastičnom silom svi pulsevi su jednako brzi. Sada, ako se gustina ili elastična sila jedne sredine uveća i pošto je pokretačka sila uvećana u istom odnosu kao i elastična sila i pošto je materija koja je pokrenuta ovom silom uvećana u istom odnosu kao i gustina, onda će vreme, koje je neophodno za proizvođenje takvog kretanja kao i ranije, biti uvećano za kvadratni koren iz gustine, a umanjeno za kvadratni koren iz elastične sile. Zbog toga će brzina pulseva biti obrnuto proporcionalna sa kvadratnim korenom iz gustine sredine, a direktno sa kvadratnim korenom iz elastične sile. Q.E.D.

Ova propozicija biće jasnija iz postavke narednog Problema.

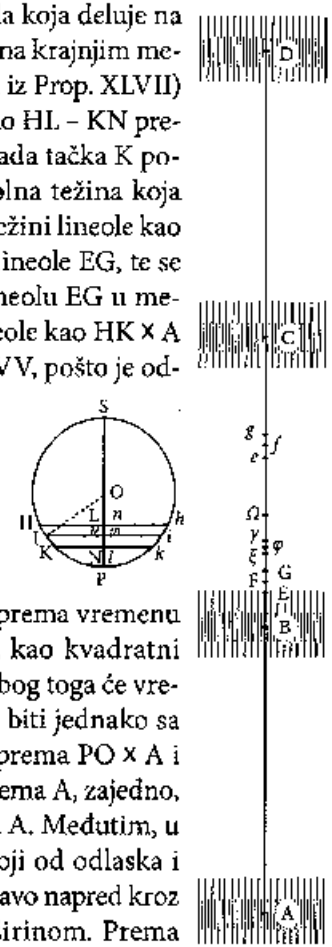
PROPOZICIJA XLIX. PROBLEM XI

Ako su gustina i elastična sila sredine poznate, pronaći ćemo brzinu pulseva.

Pretpostavimo da je sredina pritisnuta okolnom težinom, kao što to čini vazduh. Neka je A visina homogene sredine, čija je težina jednaka sa okolnom težinom, a čija je gustina jednaka sa gustinom sabijene sredine u kojoj se prostiru pulsevi. Pretpostavimo da je konstruisano klatno čija je dužina između tačke kačenja i centra oscilacije A. Onda će se, u vremenu tokom kog će to klatno izvesti jednu celu oscilaciju koja se sastoji od njegovog odlaska i

povratka, puls prostirati pravo napred kroz prostor koji je jednak sa obimom kruga opisanim sa poluprečnikom A.

Ako zadržimo postavke koje su predložene u Prop. XLVII i ako na krajevima P i S bilo koje fizičke lineole, recimo EF, pri opisivanju prostora PS u svakoj vibraciji, deluje elastična sila koja je jednaka sa njenom težinom, ona će izvoditi nekoliko vibracija u vremenu tokom kojeg ista može oscilovati po cikloidi čiji je opseg jednak sa dužinom PS, jer, jednake sile deluju na jednake čestice kroz jednake prostore u istim ili jednakim vremenima. Pošto je vreme oscilacije proporcionalno sa kvadratnim korenom dužine klatna i pošto je dužina klatna jednaka polovini luka cele cikloide, onda će se vreme jedne vibracije odnositi prema vremenu oscilacije klatna, čija je dužina A, kao kvadratni koren iz odnosa $\frac{1}{2}$ PS ili PO prema toj dužini A. Ipak, elastična sila koja deluje na fizičku lineolu EG, kada je pronađena na krajnjim mestima P i S, odnosila se (prema dokazu iz Prop. XLVII) prema svojoj ukupnoj elastičnoj sili kao HL – KN prema V, tj., kao HK prema V, pošto se sada tačka K poklapa sa tačkom P. I cela ta sila (okolna težina koja pritiska lineolu EG) odnosi se prema težini lineole kao visina A okolne težine prema dužini lineole EG, te se stoga, *ex aequo*, sila koja deluje na lineolu EG u mestima P i S odnosi prema težini te lineole kao HK × A prema V × EG, ili kao PO × A prema VV, pošto je odnos HK prema EG bio isti s odnosom PO prema V. Pošto su vremena, tokom kojih jednaka tela prolaze kroz jednake prostore, obrnuto proporcionalna sa kvadratnim korenom iz sila, onda će se vreme jedne vibracije, stvorene delovanjem te elastične sile, odnositi prema vremenu vibracije, stvorene impulsom težine, kao kvadratni koren iz odnosa VV prema PO × A. Zbog toga će vreme oscilacije klatna, čija je dužina A, biti jednako sa kvadratnim korenom iz odnosa VV prema PO × A i kvadratnim korenom iz odnosa PO prema A, zajedno, tj., biće jednako sa odnosom V prema A. Međutim, u vremenu jedne vibracije, koja se sastoji od odlaska i povratka klatna, puls će se prostirati pravo napred kroz prostor koji je jednak sa njegovom širinom. Prema



tome, vreme, tokom kojeg puls prolazi kroz prostor BC, odnosi se prema vremenu jedne oscilacije, koja se sastoji od odlaska i povratka klatna, kao V prema A, tj., kao BC prema obimu kruga čiji je poluprečnik A. Ipak, vreme tokom kojeg će puls proći kroz prostor BC i vreme tokom kojeg će puls proći dužinu koja je jednaka sa tim obimom, biće u istom odnosu. Dakle, u vremenu takve oscilacije puls će proći dužinom koja je jednaka sa tim obimom. Q.E.D.

Kor. 1. Brzina pulseva jednaka je sa onom brzinom koju teška tela dobijaju padanjem sa jednakim ubrzanim kretanjem, opisujući pritom polovinu visine A. U vremenu ovog padanja i ako pretpostavimo da se kreće brzinom dobijenom tim padanjem, puls će proći kroz prostor koji će biti jednak sa ukupnom visinom A i zbog toga će, u vremenu jedne oscilacije koja se sastoji od odlaska i povratka, proći kroz prostor koji je jednak sa obimom kruga opisanim sa poluprečnikom A. Jer, vreme padanja se prema vremenu oscilacije odnosi kao poluprečnik kruga prema njegovom obimu.

Kor. 2. Pošto je ta visina A direktno proporcionalna sa elastičnom silom tečnosti, a obrnuto sa njenom gustinom, brzina pulsa biće obrnuto proporcionalna sa kvadratnim korenom iz gustine, a direktno sa kvadratnim korenom iz elastične sile.

PROPOZICIJA L. PROBLEM XII

Pronaći rastojanja između pulseva.

Neka je broj vibracija tela, čijim su treperenjima stvoreni pulsevi, poznat za bilo koje dato vreme. Tim brojem ćemo podeliti prostor kroz koji puls može proći u istom vremenu i taj pronađen deo biće širina jednog pulsa. Q.E.I.

SHOLIJA

Poslednja Propozicija odnosi se na kretanje svetlosti i zvuka. Pošto se svetlost prostire pravolinijski, onda je sigurno da se ne može sastojati samo iz delovanja (prema Prop. XLI i XLII). Pošto zvukovi nastaju iz vibrirajućih tela, oni ne mogu biti ništa drugo nego pulsevi vazduha koji se prostiru u skladu s Prop. XLIII. To je potvrđeno vibracijama koje zvukovi, ako su glasni i duboki, prenose na obližnja tela, slično zvukovima bubnjeva. Ako su zvukovi brzi i kratki, oni se teže prenose. Ipak, dobro je poznato da bilo koji zvuk, koji pada na žice u rezonanciji sa zvučnim telima, pre-

nosi vibracije na te žice. Takođe, to je potvrđeno iz brzine zvukova: pošto se specifična gravitacija kišnice i živa međusobno odnose otprilike kao 1 prema $13\frac{2}{3}$ i kada je živa u barometru na visini od 30 inča, onda se specifična gravitacija vazduha i kišnice međusobno odnose otrpilike kao 1 prema 870, te se specifična gravitacija vazduha i žive međusobno odnose kao 1 prema 11890. Prema tome, kada je visina žive na 30 inča, onda visina ravnomernog vazduha, čija bi težina bila dovoljna da sabije naš vazduh do gustine koju on i ima, mora biti jednaka sa 356700 inča, ili 29725 stopa. A upravo je to ona visina sredine koju sam označio sa A u postavci prethodne Propozicije. Krug čiji poluprečnik iznosi 29725 stopa, ima obim od 186768 stopa. Pošto klatno dužine od $39\frac{1}{5}$ inča, kao što je poznato, dovršava jednu oscilaciju, koja se sastoji iz njegovog odlaska i povratka, za dve sekunde, onda će klatno dužine od 29725 stopa ili 356700 inča izvesti sličnu oscilaciju za $190\frac{3}{4}$ sekundi. Prema tome, u tom vremenu će se zvuk kretati pravo napred kroz 186768 stopa, a u jednoj sekundi kroz 979 stopa.

Međutim, u ovom izračunavanju nisu uzete u obzir tvrde čestice vazduha pomoću kojih se zvuk momentalno prostire. Pošto se težina vazduha odnosi prema težini vode kao 1 prema 870 i pošto su soli skoro dva puta gušće od vode, a pritom pretpostavimo da su čestice vazduha skoro iste gustine kao voda i so i da retkost vazduha nastaje iz intervala čestica, onda će se prečnik jedne čestice vazduha odnositi prema intervalu između centara čestica kao 1 prema otprilike 9 ili 10, a prema intervalu između samih tih čestica kao 1 prema 8 ili 9. U skladu sa gornjim računom, zvuk će u jednoj sekundi preći preko 979 stopa, čemu možemo dodati $\frac{979}{9}$ ili oko 109 stopa, kako bismo nadoknadili veličinu čestica vazduha. Onda će zvuk u jednoj sekundi proći kroz otprilike 1088 stopa.

Povrh toga, para koja pluta vazduhom, pošto je drugačijeg porekla i drugačijeg tona, teško da će, ako uopšte, učestvovati u kretanju istinskog vazduha u kojem se zvuk prostire. Sada, ako te pare miruju, kretanje će se prostirati kroz sâm istinski vazduh većom brzinom, nego u odnosu kvadratnog korena iz manjka materije. Ako se atmosfera sastoji iz deset delova istinskog vazduha i iz jednog dela pare, kretanje zvuka biće brže za kvadratni koren iz odnosa 11 prema 10, ili približno kao odnos 21 prema 20, nego kada bi se prostirao kroz jedanaest delova istinskog vazduha i zbog toga se kretanje zvuka, koje je pronađeno ranije, mora uvećati u tom

odnosu. Na taj način, zvuk će proći 1142 stope u jednoj sekundi vremena.

Sve ovo može da važi kao istinito tokom proleća i jeseni, jer je tad vazduh razređen umerenom toplotom tih godišnjih doba, pa na taj način elastična sila postaje nešto intenzivnija. Međutim, tokom zime, kada je vazduh zgusnut usled hladoće i kada je elastična sila nešto umanjenija, kretanje zvuka biće sporije u odnosu kvadratnog korena iz gustine, a, s druge strane, biće brže leti.

Iz eksperimenata zapravo sledi da se zvuk u jednoj sekundi vremena zaista kreće kroz otprilike 1142 *engleske* stope, ili 1070 *francuskih* stopa.

Pošto je poznata brzina zvuka, onda su poznati i intervali pulseva. Izvodeći eksperimente, Sover (J. Sauveur) je pronašao da otvorena cev dužine od oko 5 *pariskih* stopa daje zvuk istog tona kao viol-žica koja vibrira 100 puta u jednoj sekundi. Prema tome, postoji blizu 100 pulseva u prostoru od 1070 *pariskih* stopa, kroz koji prolazi zvuk u jednoj sekundi vremena, a jedan puls ispunjava prostor od oko $10\frac{7}{10}$ *pariskih* stopa, tj., otprilike dvostruku dužinu cevi. Odatle je moguće da su širine pulseva za sve zvukove u otvorenim cevima jednake sa dvostrukom dužinom cevi.

Povrh toga, iz Korolara Prop. XLVII jasan je razlog zbog kog zvuk momentalno prestaje sa kretanjem zvučnih tela i zbog čega se više ne čuje kada smo na velikoj udaljenosti od zvučnih tela, nego kada smo veoma blizu njih. Pored toga, iz prethodnih principa jasan je razlog zbog kog je zvuk značajno uvećan *govornim trubama*, jer su sva naizmenična kretanja uvećana generišućim uzrokom pri svakom povratku. A u cevima koje ometaju širenje zvukova, kretanje se gubi sporije, a vraća se jače, te je stoga najviše uvećano novim kretanjima koja deluju pri svakom povratku a to su principi zvučnih pojava.

ODELJAK IX

O kružnom kretanju tečnosti

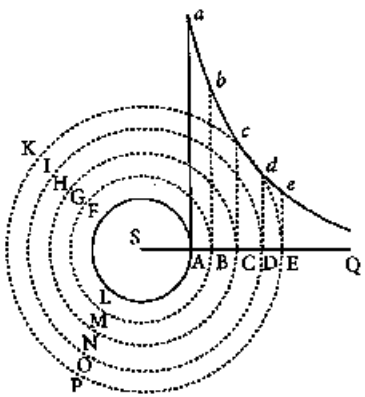
HIPOTEZA

Otpor koji nastaje usled nedostatka klizavosti u delovima tečnosti, *caeteris paribus*, proporcionalan je sa brzinom kojom su međusobno razdvojeni delovi tečnosti.

PROPOZICIJA LI. TEOREMA XXXIX

Ako u ravnomernoj i beskonačnoj tečnosti, tvrdi cilindar koji je beskonačno dug kruži ravnomernim kretanjem oko ose sa datim položajem, zatim ako se tečnost kreće okolo samo usled delovanja tog impulsa cilindra i ako svaki deo tečnosti očuva svoje ravnomerno kretanje, tvrdim da su periodi vremena delova tečnosti propocionalni sa njihovim rastojanjima od ose cilindra.

Neka je AFL cilindar koji ravnomerno kruži oko ose S i neka koncentrični krugovi BGM, CHN, DIO, EKP itd. dele tečnost na bezbrojne koncentrične cilindrične čvrste sfere iste debljine. Pošto je tečnost homogena, onda će uzajamna dejstva susednih sfera biti (prema Hipotezi) proporcionalna sa njihovim međusobnim premeštanjem, kao i sa susednim površinama na kojima se pojavljuju ta uzajamna dejstva. Ako su dejstva na sferi veća ili manja na njenoj konkavnoj strani nego na konveksnoj, jače dejstvo će prevagnuti, pa će ili ubrzati ili usporiti kretanje sfere, jer ono je u svakom mestu usmereno ili u pravcu kretanja ili u suprotnom pravcu. Prema tome, kako bi svaka sfera mogla očuvati svoje ravnomerno kretanje, dejstva na obema stranama moraju biti jednaka, a njihovi pravci suprotni. A pošto su dejstva proporcionalna sa susednim površinama, kao i sa njihovim međusobnim premeštanjem, onda će premeštanja biti obrnuto proporcionalna sa površinama, tj., obrnuto proporcionalna sa rastojanjima površina od ose. Međutim, razlika ugaonih kretanja oko ose proporcionalna je sa onim premeštanjima primenjenim na rastojanjima, tj., direktno je proporcionalna sa premeštanjima, a obrnuto sa rastojanjima. A kada spojima ova dva odnosa, ta razlika je obrnuto porporcionalna sa kvadratima rastojanja. Prema tome, ako se podignu linije A*a*, B*b*, C*c*, D*d*, E*e* itd. normalne u odnosu na nekoliko delova beskonačne prave linije SABCDEQ, i ako su one obrnuto proporcionalne sa kvadratima iz SA, SB, SC, SD, SE



itd., zatim, ako pretpostavimo da kroz krajeve tih normala prolazi hiperbolična kriva, onda će zbir razlika, ili ukupno ugaono kretanje, biti proporcionalno sa odgovarajućim zbirom linija A*a*, B*b*, C*c*, D*d*, E*e* itd., tj. (ako sačinjavaju sredinu ravnomerne tečnosti, onda će broj sfera biti uvećan, a njihova širina umanjena, *in infinitum*), sa hiperboličnim površinama A*a*Q, B*b*Q, C*c*Q, D*d*Q, E*e*Q itd. koje su slične tom zbiru. Pošto su vremena obrnuto proporcionalna sa ugaonim kretanjem, takođe će biti obrnuto proporcionalna sa tim površinama. Prema tome, periodi vremena bilo koje čestice D obrnuto su proporcionalni sa površinom D*d*Q, a direktno proporcionalni sa rastojanjem SD (kao što proizlazi iz poznate metode kvadrature krivih). Q.E.D.

Kor. 1. Iz ovoga sledi da je ugaono kretanje čestica tečnosti obrnuto proporcionalno sa rastojanjem od ose cilindra pri čemu su apsolutne brzine jednake.

Kor. 2. Ako je tečnost sadržana u cilindričnom sudu beskonačne dužine, koji unutar sebe sadrži još jedan cilindar i ako oba cilindra kruže oko jedne zajedničke ose, pri čemu su vremena njihovih revolucija proporcionalna sa njihovim poluprečnicima, a svaki deo tečnosti može da očuva svoje ravnomerno kretanje, onda će period vremena nekoliko delova biti proporcionalni sa rastojanjima od ose cilindra.

Kor. 3. Ako cilindru ili tečnosti, koji se kreću na takav način, dodamo ili oduzmemo bilo koju zajedničku količinu ugaonog kretanja, a pošto to novo kretanje neće izmeniti međusobno trenje delova tečnosti, neće se izmeniti ni međusobno kretanje tih delova, jer međusobno premeštanje delova zavisi od trenja. Bilo koji deo očuvaće takvo kretanje koje nije više ubrzano nego što je usporeno usled trenja koje deluje na obe strane u suprotnim pravcima.

Kor. 4. Ako se iz celog sistema cilindara i tečnosti oduzme ukupno ugaono kretanje spoljašnjeg cilindra, onda ćemo dobiti kretanje tečnosti u cilindru koji je u stanju mirovanja.

Kor. 5. Prema tome, ako je tečnost u spoljašnjem cilindru u stanju mirovanja i ako unutrašnji cilindar ravnomerno kruži, onda će se na tečnost preneti kružno kretanje koje će se postepeno širiti kroz tečnost i nastaviće neprekidno da se uvećava sve dotle dok nekoliko delova tečnosti ne stekne kretanje koje je određeno u Kor. 4.

Kor. 6. Pošto tečnosti nastoje da šire svoje kretanje još dalje, njihov impuls će nositi i spoljašnji cilindar, osim ako on nije nasilno zadržan i ubrzavaće svoje kretanje sve dok period vremena u

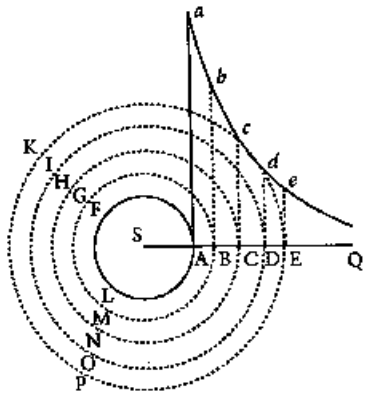
oba cilindra ne postanu međusobno jednaki. Međutim, ako je spoljašnji cilindar nasilno zadržan, impuls će usporiti kretanje tečnosti i učiniće da postepeno prestaje, osim ako unutrašnji cilindar uspe da očuva svoje kretanje pomoću neke spoljašnje sile koja deluje na njega.

Sve ovo pokazaće se istinitim ako izvedemo eksperiment u stajaćoj vodi.

PROPOZICIJA LII. TEOREMA XL

Ako čvrsta sfera, u ravnomernoj i beskonačnoj tečnosti, ravnomernim kretanjem kruži oko ose sa datim položajem, zatim, ako se tečnost kreće okolo samo usled impulsa te sfere i ako svaki deo tečnosti može da očuva svoje ravnomerno kretanje, tada tvrdim da će period vremena delova tečnosti biti proporcionalni sa kvadratima njihovih rastojanja od centra sfere.

Slučaj 1. Neka je AFL sfera koja ravnomerno kruži oko ose S i neka koncentrični krugovi BGM, CHN, DIO, EKP itd. dele tečnost na beskonačne koncentrične sfere iste debljine. Pretpostavimo da su te sfere čvrste i, pošto je tečnost homogena, onda će uzajamno delovanje susednih sfera biti proporcionalno sa njihovim međusobnim premeštanjima i sa susednim površinama na kojima oni deluju. Ako je delovanje na bilo kojoj sferi veće ili manje na konkavnoj nego na konveksnoj strani, onda će jače delovanje prevagnuti, pa će ili ubrzati ili usporiti brzinu sfere s obzirom na to da li je usmereno u pravcu kretanja sfere ili suprotno njenom kretanju. Prema tome, da bi svaka sfera sačuvala ravnomerno kretanje, neophodno je da delovanja na obema stranama sfere budu jednaka i da deluju u suprotnim pravcima. Pošto su delovanja proporcionalna sa susednim površinama i sa njihovim međusobnim premeštanjima, onda će premeštanja biti obrnuto proporcionalna sa površinama, tj., obrnuto proporcio-



nalna sa kvadratima rastojanja tih površina od centra. Međutim, razlike ugaonih kretanja oko ose proporcionalne su sa premeštanjima primenjenim na rastojanja, tj., direktno sa premeštanjima, a obrnuto sa rastojanjima, ili, kada složimo te odnose, razlike će biti obrnuto propocionalne sa kubnim rastojanjima. Ako na nekoliko delova beskonačne prave linije SABCDEQ podignemo normale A*a*, B*b*, C*c*, D*d*, E*e* itd. koje su obrnuto proporcionalne sa kubnim apscisama SA, SB, SC, SD, SE itd. onda će zbir razlika, ukupno ugaono kretanje, biti proporcionalno sa odgovarajućim zbirom linija A*a*, B*b*, C*c*, D*d*, E*e* itd., tj., sa hiperboličnim površinama A*a*Q, B*b*Q, C*c*Q, D*d*Q, E*e*Q itd. koje su analogne s tim zbirom (ako se poveća broj sfera, a njihova debljina umanji *in infinitum*, kako bi se dobila ravnomerna tečna sredina). Pošto su periodi vremena obrnuto proporcionalni sa ugaonim kretanjima, takođe će biti obrnuto proporcionalni sa tim površinama. Prema tome, period vremena bilo kog kruga DIO obrnuto je proporcionalno sa površinom D*d*Q, ili, prema poznatoj metodi kvadratura, direktno je proporcionalno sa kvadratom rastojanja SD, što treba dokazati pre svega ostalog.

Slučaj 2. Neka je iz centra sfere, pod datim uglovima sa osom i na međusobno jednakim rastojanjima, povučen veliki broj beskonačnih pravih linija. Zamislimo da je sfera, koja tim linijama kruži oko ose, presečena na bezbroj prstenova – onda će svaki prsten imati četiri susedna prstena, jedan sa unutrašnje strane, jedan sa spoljašnje i dva sa strane. Nijedan od tih prstenova ne može iskusiti jednaka delovanja u suprotnim pravcima pomoću trenja unutrašnjeg i spoljašnjeg prstena, osim ako se kretanje ne prenosi shodno zakonu koji je pokazan u Slučaju 1, što i sledi iz dokaza u tom slučaju. Zbog toga će se bilo koji niz prstenova, koji se pravolinijski proteže *in infinitum* od lopte, kretati shodno zakonu Slučaja 1, s tim što bi trebalo da zamislimo da je kretanje ometano trenjem prstena sa svake njegove strane. Ipak, tokom kretanja, koje se nastavlja shodno ovom zakonu, ne postoji i ne može biti nikakve prepreke kretanju koje se nastavlja shodno tom zakonu. Ako prstenovi, koji se nalaze na jednakom rastojanju od centra, kruže ili brže ili sporije na polovima nego na ekliptici, onda će, ako su spori, biti ubrzani, a ako su brzi, biće usporeni njihovim međusobnim trenjem, pa će se i period vremena neprekidno približavati jednakosti, shodno zakonu Slučaja 1. Odatle sledi da trenje uopšte neće ometati kretanje koje se nastavlja shodno zakonu Slučaja 1, zbog

čega i važi taj zakon; tj., period vremena nekoliko prstenova biće proporcionalni sa kvadratima njihovih rastojanja od centra lopte, što treba dokazati.

Slučaj 3. Sada, neka je svaki prsten podeljen poprečnim presecima na bezbrojne čestice koje sačinjavajú supstancu koja je apsolutno i ravnomerno tečna. Pošto ti poprečni preseci uopšte ne slede zakon kružnog kretanja, već samo služe da stvore tečnu supstancu, taj zakon će ostati nepromenjen. Ili nijedan od veoma malih prstenova neće uopšte izmeniti svoje hrapavosti i silu međusobnog trenja na tim presecima, ili će se sve podjednako izmeniti. Stoga, odnos uzroka ostaje isti, pa će i odnos posledica ostati nepromenjen (tj., odnos kretanja i perioda vremena). Međutim, pošto odatle nastaje kružno kretanje i centrifugalna sila, odnos je veći na ekliptici nego na polovima. I mora postojati neki uzrok usled kog se nekoliko čestica zadržava na krugovima; u suprotnom bi se materija koja je na ekliptici uvek udaljavala od centra, da bi se spoljašnjim virom vraćala ka polovima, a odatle bi se osom vratila do ekliptike neprekidnim kruženjem.

Kor. 1. Ugaona kretanja delova tečnosti oko ose lopte obrnuto su proporcionalna sa kvadratima rastojanja od centra lopte, a apsolutne brzine obrnuto su proporcionalne sa kvadratima rastojanja od ose.

Kor. 2. Ako lopta kruži sa 4 ravnomerna kretanja oko ose koja se nalazi u sličnoj i beskonačnoj tečnosti koja je u stanju mirovanja i koja se ravnomerno kreće, onda će ona prenositi vrtložno kretanje slično onom u viru, a to će se kretanje postepeno širiti napred *in infinitum*; takođe, to će se kretanje neprekidno povećavati u svakom delu tečnosti, sve dok period vremena nekoliko delova ne postanu proporcionalni sa kvadratima rastojanja od centra lopte.

Kor. 3. Pošto unutrašnji delovi vira, usled svoje veće brzine, neprekidno pritiskaju spoljašnje delove i teže ka njima, i pošto tim delovanjem njima neprekidno prenose kretanja, dok istovremeno ti spoljašnji delovi prenose istu količinu kretanja onim delovima koji se nalaze iza njih i koji su nepomični, a pošto je tim delovanjem neprekidno očuvana količina njihovih kretanja, onda je jasno da se kretanje neprekidno prenosi od centra do obima vira sve dok se ne apsorbuje i izgubi u bezgraničnom prostranstvu tog obima. Materija, koja se nalazi između bilo koje dve sferne površine koncentrične sa virom, neće se nikad ubrzati, jer će ta materija uvek

prenositi kretanje koje dobija od materije koja je bliža centru onoj materiji koja se nalazi bliže obimu.

Kor. 4. Prema tome, da bi vir nastavio sa istim stanjem kretanja, neophodan je neki aktivni princip od koga bi lopta neprekidno dobijala istu količinu kretanja koju bi prenosila materiji vira. Bez takvog principa nesumnjivo je da će lopta i unutrašnji delovi vira, koji uvek šire svoje kretanje prema spoljašnjim delovima i koji ne dobijaju novo kretanje, postepeno usporavati sve dok ne prestanu da kruže.

Kor. 5. Ako neka druga lopta pliva u istom viru na određenom rastojanju od centra i ako u međuvremenu pomoću neke sile neprestano kruži oko ose sa datim nagibom, onda će kretanje te lopte uzrokovati da se tečnost kreće kao što se kreće u viru. Na početku će taj novi i mali vir kružiti sa svojom loptom oko centra prvog vira, dok će se njegovo kretanje nastaviti sve dalje i dalje i postepeno će se širiti *in infinitum*, baš kao i u prvom viru. I kao što je ranije lopta novog vira nošena kretanjem prvog vira, tako će i lopta prvog vira biti nošena kretanjem tog novog vira, pa će obe lopte kružiti oko neke središnje tačke, a usled kružnog kretanja međusobno će se udaljavati, sve dok ih neka sila ne zaustavi. Zatim, ako bi dejstvo sila, pomoću kojih lopta može da sačuva svoje kretanje, prestalo i ako bi sve delovalo u skladu sa zakonima mehanike, onda bi se kretanje lopti postepeno usporavalo (iz razloga određenog u Kor. 3 i 4), dok bi se virovi na kraju umirili.

Kor. 6. Ako nekoliko lopti u datim mestima konstantno kruži određenim brzinama oko ose sa datim položajem, onda će ispred njih nastati toliko virova koji se nastavljaju *in infinitum*. Na isti način po kom bilo koja lopta širi svoje kretanje *in infinitum*, takođe će i svaka zasebna lopta širiti svoje kretanje *in infinitum*. Tako će svaki deo beskonačne tečnosti biti pomeren kretanjem koje proizlazi iz delovanja svih lopti. Prema tome, virovi neće biti ograničeni nikakvim određenim granicama, već će postepeno naletati jedan na drugog, a uzajamnim delovanjem virova, lopte će se neprestano pomerati sa svojih mesta, kao što je pokazano u poslednjem Korolaru. Nemoguće je da lopte zadrže bilo koje međusobne položaje, osim ako ih neka sila ne zadržava. Međutim, ako bi te sile, koje konstantno deluju na lopte kako bi one nastavile sa tim kretanjima, prestale, onda će materija (iz razloga određenog u Kor. 3 i 4), postepeno stati i prestaće da se pomera u virovima.

Kor. 7. Ako sferni sud sadrži sličnu tečnost koja je ravnomernim rotacijama lopte oko centra vođena u krug po viru, zatim, ako lopta i sud kruže oko iste ose i ako su njihova period vremena proporcionalni sa kvadratima poluprečnika, onda delovi tečnosti neće nastaviti svoje kretanje bez ubrzavanja ili usporavanja, sve dok njihovi periodi vremena ne postanu proporcionalni sa kvadratima njihovih rastojanja od centra do vira. Nijedna druga struktura vira nije postojana osim ove.

Kor. 8. Ako sud, sadržana tečnost i lopta održe ovo kretanje, zatim, ako kruže sa zajedničkim ugaonim kretanjem oko bilo koje date ose, a pošto međusobno trenje delova tečnosti nije promenjeno ovim kretanjem, onda se ni međusobna kretanja delova neće promeniti, jer međusobna premeštanja tih delova zavise od tog trenja. Bilo koji deo sačuvaće takvo kretanje koje usporava trenje s jedne strane, dok ga s druge strane ubrzava.

Kor. 9. Prema tome, ako je sud u stanju mirovanja i ako je dato kretanje lopte, biće poznato i kretanje tečnosti. Zamislimo da ravan prolazi kroz osu lopte i da kruži sa suprotnim kretanjem i pretpostavimo da se zbir vremena ove revolucije i revolucije lopte odnose prema vremenu revolucije lopte kao kvadrat poluprečnika suda prema kvadratu poluprečnika lopte. U tom će slučaju period vremena tečnosti u odnosu na ovu ravan biti proporcionalni sa kvadratima njihovih rastojanja od centra lopte.

Kor. 10. Zbog toga, ako se sud kreće oko iste ose kao i lopta ili oko druge ose ali datom brzinom, onda će kretanje tečnosti biti poznato. Jer, ako iz celog sistema oduzmemo ugaono kretanje suda, međusobno kretanje će ostati isto kao i ranije (prema Kor. 8), a ta kretanja biće poznata iz Kor. 9.

Kor. 11. Ako su sud i tečnost u stanju mirovanja i ako lopta ravnomerno kruži, onda će se to kretanje postepeno širiti kroz ukupnu tečnost prema sudu i sud će biti nošen tim kretanjem, osim ako nije prisilno zadržan, dok će tečnost i sud biti neprekidno ubrzani sve dok njihovi periodi vremena ne postanu jednaki sa periodima lopte. Ako je sud zadržan nekom silom ili kruži bilo kakvim konstantnim i ravnomernim kretanjem, onda će sredina malo-pomalo doći do stanja kretanja opisanog u Kor. 8, 9 i 10 i nikad neće nastaviti kretanje u bilo kom drugom stanju. Međutim, ako delovanje sila, kojim lopta i sud kruže određenim kretanjima, prestanu, i ako ceo sistem deluje u skladu sa zakonima mehanike, onda će lopta i sud, posredstvom tečnosti, međusobno delovati jedno na drugo i nastaviće da šire svoja međusobna kretanja kroz tečnost sve dok njihovi periodi vremena ne postanu međusobno jednaki, a ceo sistem nastavi da kruži poput čvrstog tela.

SHOLIJA

U svim ovim rasuđivanjima pretpostavio sam da se tečnost sastoji iz materije sa ravnomernom gustinom i fluidnošću. Pretpostavio sam da je tečnost takva da lopta, koja je smeštena bilo gde u njoj, može da se prostire sopstvenim kretanjem, na neprekidno jednakim rastojanjima od sebe i sa sličnim i jednakim kretanjima u tečnosti tokom istog intervala vremena. Ovim kružnim kretanjem materija nastoji da se udalji od ose vira i zbog toga pritiska svu materiju koja se nalazi iza nje. Ovaj pritisak čini trenje jačim, a odvajanje delova težim, a usled toga se umanjuje fluidnost materije. S druge strane, ako su delovi tečnosti u bilo kom mestu gušći ili veći nego u drugim mestima, onda će u tom mestu fluidnost biti manja, jer tu postoji manje površina na kojima bi se delovi mogli međusobno razdvojiti. U takvim slučajevima pretpostavio sam da se nedostatak fluidnosti može nadomestiti glatkoćom ili mekoćom delova ili nekim drugim uslovom. Inače, materija će se bolje povezivati tamo gde je manja fluidnost i biće sporija, pa će zbog toga sporije sticati kretanje i prostiraće se dalje od onog što je gore propisano. Ako sud nije sferan, čestice će se kretati po linijama koje nisu kružne, ali koje odgovaraju obliku suda, dok će periodi vremena biti približno proporcionalni sa kvadratima srednjih rastojanja od centra. U delovima koji se nalaze između centra i obima, kretanje će biti sporije tamo gde je prostor širok, a brže tamo gde je uzan; ipak, čestice uopšte neće više težiti ka obimu zbog svog bržeg kretanja, jer onda one opisuju lukove sa manjom zakrivljenošću i njihovo stremljenje ka udaljavanju od centra umanjeno je umanjenjem ove krive kao što je uvećano uvećanjem brzine. Pri prelasku iz užih u šire prostore one se malo više udaljavaju od centra, dok su pritom usporene, a kada iz širokog pređu u uzane prostore, one su opet ubrzane, pa je tako svaka čestica zauvek naizmenično usporena i ubrzana. Sve se to pojavljuje u čvrstom sudu, a stanje virova u beskonačnoj tečnosti poznato je iz Kor. 6, ove propozicije.

U ovoj Propoziciji nastojao sam da istražim svojstva virova kako bih doznao da li se nebeski fenomeni mogu objasniti pomoću njih. Fenomen se sastoji u tome da se periodi vremena planeta koje kruže

oko Jupitera nalaze u polukubnom odnosu njihovih rastojanja od centra Jupitera, a isto pravilo važi i za planete koje kruže oko Sunca. Ta pravila potvrđena su s najvećom preciznošću dosadašnjim otkrićima dobijenim astronomskim posmatranjima. Prema tome, ako te planete, koje su nošene virovima, kruže oko Jupitera i Sunca, onda virovi moraju kružiti shodno tom zakonu. Međutim, pronašli smo da su periodi vremena delova vira proporcionalni sa kvadratima rastojanja od centra kretanja. Taj se odnos ne može umanjiti i svesti na polukubni, osim ako materija vira nije fluidnija tamo gde je udaljenija od centra, ili ako se otpor, koji nastaje iz nedostatka klizavosti u delovima tečnosti pri čemu se uvećava brzina kojom su delovi tečnosti razdvojeni, uveća u donosu koji je veći od odnosa uvećanja brzine. Ipak, nijedna od ovih pretpostavki ne čini se razumnom. Veći i manje fluidniji delovi, ako nisu teži prema centru, težiće ka obimu kruga. Premda sam, radi dokazivanja, na početku ovog odeljka predložio hipotezu da je otpor proporcionalan s brzinom, ipak je verovatno da se otpor nalazi u manjem odnosu od brzine, a pod takvom pretpostavkom, periodi vremena delova vira biće u većem odnosu nego što je kvadrat njihovog rastojanja od centra. Ako se, kao što neki misle, virovi kreću brže u blizini centra, pa se zatim usporavaju na određenoj granici, da bi se potom ponovo ubrzali u blizini obima kruga, onda ne možemo dobiti njihov odnos, bilo da je polukubni ili bilo koji drugi određeni odnos. Neka onda filozofi utvrde kako se fenomen polukubnog odnosa može primeniti na virove.

PROPOZICIJA LIII. TEOREMA XLI

Tela koja se kreću po viru i koja se vraćaju u istu sferu imaju istu gustinu kao i vir i kreću se u skladu s istim zakonima brzine i pravca kretanja kao i delovi vira.

Ako se bilo koji mali deo vira, čije čestice ili fizičke tačke ostaju u datom međusobnom položaju, zamrzne, onda će se te čestice kretati u skladu s istim zakonom kao i ranije, jer nema nikakvih promena u njihovoj gustini, sili inercije ili obliku. I opet, ako je zamrznut ili čvrst deo vira iste gustine kao i ostatak vira i ako se razloži u tečnost, onda će se kretati u skladu s istim zakonom kao i ranije, osim ako se njegove čestice, koje su sad postale tečne, ne kreću među sobom. Prema tome, ako zanemarimo međusobno kretanje čestica tako da ne utiče na progresivno kretanje celine, onda će kretanje celine biti isto kao i ranije. Međutim, to kretanje biće isto kao i kretanje drugih delova vira koji su na jednakom rastojanju od centra, jer je čvrsto telo, koje je razloženo na tečnost, sada postalo savršeno slično s ostalim delovima vira. Ako je čvrsto telo iste gustine kao i materija vira, ono će se kretati istim kretanjem kao i njegovi delovi, pošto su u stanju mirovanja u odnosu na materiju koja okružuje to telo. Ako je gustina tog tela veća, ono će više nego ranije težiti da se udalji od centra i kada prevaziđe tu silu vira, kojom je u ravnotežnom stanju zadržano u svojoj orbiti, ono će se udaljavati od centra i tokom svoje revolucije opisaće spiralu i neće se više vratiti u istu orbitu. Takvim rasuđivanjem, ako je gustina tela manja, ono će se približavati ka centru. Prema tome, telo nikad ne može neprekidno kružiti po istoj orbiti, osim u slučaju kad je iste gustine kao i tečnost. Ipak, pokazali smo da će u tom slučaju ono kružiti u skladu sa istim zakonom kao i oni delovi tečnosti koji su na istom ili jednakom rastojanju od centra vira.

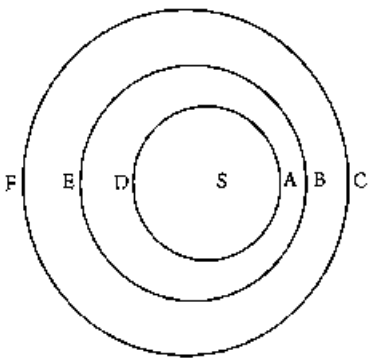
Kor. 1. Prema tome, čvrsto telo koje kruži po viru i koje se neprekidno kreće po istoj orbiti, nalazi se u stanju mirovanja u odnosu na tečnost koja ga nosi.

Kor. 2. Ako vir ima ravnomernu gustinu, isto telo može kružiti na bilo kom rastojanju od centra vira.

SHOLIJA

Odatle je jasno da se planete ne mogu prenositi materijalnim virovima, jer, shodno Kopernikovoj (N. Copernicus) hipotezi, planete kruže oko Sunca po elipsama, sa Suncem kao zajedničkim centrom, a povučenim poluprečnicima prema njemu opisuju površine koje su proporcionalne sa vremenima. Međutim, delovi vira nikad ne mogu kružiti takvim kretanjem. Neka AD, BE i CF predstavljaju tri orbite opisane oko Sunca S, od kojih je spoljašnji krug CF koncentričan sa Suncem i neka su afeli dva unutrašnja kruga A i B, a njihovi periheli D i E. Prema tome, telo koje kruži po orbiti CF opisujući, poluprečnikom povučenim do Sunca, površine koje su proporcionalne sa vremenima, kretaće se ravnomerno. Shodno zakonima astronomije, telo koje kruži po orbiti BE kretaće se sporije u svom afelu B, a brže u perihelu E s obzirom na to da se, u skladu sa zakonima mehanike, materija vira kreće brže u užem prostoru između A i C, nego u širem prostoru između D i F, tj., brže u afelu nego u perihelu. Ipak, ta dva zaključka međusobno su

kontradiktorna. Tako se na početku znaka Device, gde se trenutno nalazi afel Marsa, rastojanje između orbita Marsa i Venere odnosi prema rastojanju između istih orbita na početku znaka Ribe približno kao 3 prema 2 i zbog toga materija vira između te dve orbite mora biti brža na početku znaka Ribe nego na početku znaka Device u odnosu 3 prema 2. Jer, što je uži prostor kroz koji će preći ista količina materije tokom istog vremena jedne revolucije, to je veća brzina. Prema tome, ako se Zemlja nalazi u stanju mirovanja u odnosu na tu nebesku materiju, ona je nošena njome i kružiće zajedno sa njom oko Sunca, a brzina Zemlje na početku znaka Ribe odnosiće se prema brzini na početku znaka Device kao 3 prema 2. Vidljivo dnevno kretanje Sunca na početku znaka Device biće iznad 70 minuta, a na početku znaka Ribe manje od 48 minuta. Nasuprot tome, kao što iskustvo potvrđuje, vidljivo kretanje Sunca zapravo je brže na početku znaka Ribe nego na početku znaka Device i zbog toga je kretanje Zemlje brže na početku znaka Device nego na početku znaka Ribe. Na taj način, hipoteza o virovima potpuno protivreči astronomskim pojavama i pre služi tome da iskomplikuje nego da objasni nebeska kretanja. Pomoću Knjige I može se razumeti način izvođenja kretanja u slobodnom prostoru bez virova, a u narednoj Knjizi podrobnije ću razmotriti ta kretanja.



KNJIGA III

SISTEM SVETA

U prethodnim knjigama izložio sam principe filozofije, principe ne filozofske već matematičke, takve, naime, pomoću kojih možemo zasnovati naše rasuđivanje na filozofskim istraživanjima. Ti principi su zakoni i uslovi određenih kretanja i sila koji se prvenstveno odnose na filozofiju. Ipak, da se ne bi pojavili kao suvoparni i prazni, prikazao sam ih tu i tamo ponekim filozofskim sholijama, razmatrajući takva pitanja koja su opšte prirode i na kojima se filozofija prvenstveno zasniva, kao što su gustina i otpor tela, prostori lišeni svih tela i kretanje zvuka i svetlosti. Preostalo je da, prema istim principima, izložim okvir sistema sveta. Isprva sam zaista sačinio Knjigu III pridržavajući se popularnog metoda, kako bi mnogi mogli da je čitaju. Međutim, kasnije sam, uzimajući u obzir da oni koji nisu dovoljno razumeli principe ne mogu lako raspoznati jačinu posledica niti mogu odložiti na stranu predrasude kojima su godinama ranije bili naviknuti, a i kako bih sprečio osporavanja koja bi mogla nastati zbog toga, odabrao sam da svedem suštinu ove knjige na oblik propozicija (u matematičkom smislu), koju bi trebalo da čitaju oni koji su na prvom mestu ovladali principima izloženim u prethodnim knjigama. Ne savetujem, pritom, prethodno proučavanje svake propozicije tih knjiga, jer njih ima toliko da bi mogle da oduzmu mnogo vremena, čak i čitaocima sa dobrim poznavanjem matematike. Dovoljno je da se pažljivo pročitaju definicije, zakoni kretanja i prva tri odeljka Knjige I. Tada se može preći na ovu knjigu, pritom se konsultujući

sa preostalim propozicijama prve dve knjige ukoliko okolnost iziskuje pozivanje na njih.

PRAVILA RASUĐIVANJA U FILOZOFIJI

PRAVILO I

Ne moramo priznavati nijedan uzrok prirodnim stvarima osim onih koji su istiniti i dovoljni za objašnjenje njihovih pojava.

U tu svrhu filozofi tvrde da Priroda ne čini ništa uzalud, uzaludno je raditi komplikovano, ono što se može raditi jednostavno, jer Priroda je zadovoljna jednostavnošću i na nju ne utiče raskoš prekomernih uzroka.

PRAVILO II

Prema tome, istim prirodnim efektima moramo, koliko god je moguće, pripisati iste uzroke.

Kao što su disanje ljudi i životinja, padanje kamenja u Evropi i u Americi, svetlost naše kuhinjske vatre i svetlost Sunca, odbijanje svetlosti na Zemlji i na planetama.

PRAVILO III

Svojstva tela koja se ne mogu ni uveličati ni oslabiti i koja pripadaju svim telima unutar okvira naših eksperimenata moraju se priznati za univerzalna svojstva svih tela uopšte.

Pošto su nam svojstva tela poznata samo iz eksperimenata, moramo priznati za univerzalne sva ona koja se uopšteno slažu sa eksperimentima, a ona koja ne podležu umanjenju, ne mogu se nikad potpuno odstraniti. Zasigurno se nećemo odreći dokaza iz eksperimenata zarad naših snova i uzaludnih izmišljanja, niti ćemo se udaljiti od analogije Prirode, koja je jednostavna i uvek dosledna samoj sebi. Širenje tela nam je poznato samo pomoću naših čula, ali nisu sva tela dostupna našim čulima. Ipak, pošto mi opažamo to širenje koje je prisutno u svim telima dostupnim našim čulima, mi ih pripisujemo svim telima uopšte. Iz iskustva znamo

da su mnoga tela čvrsta, a pošto čvrstoća celine nastaje iz čvrstoće njenih delova, onda smo pravilno zaključili da su nedeljive čestice čvrste ne samo u telima koja opažamo već i u svim drugim. Ne zaključujemo na osnovu rasuđivanja da su sva tela neprobojna, već na osnovu našeg osećaja. Pronalazimo da su tela kojima mi baratamo neprobojna, a odatle zaključujemo da je neprobojnost univerzalno svojstvo svih tela uopšte. Zaključujemo da su sva tela pokretna i da posredstvom određene sile (koju ćemo nazvati silom inercije), nastoje da sačuvaju svoje kretanje, ili stanje mirovanja, samo pomoću sličnih svojstava tela koja smo posmatrali. Širenje, čvrstoća, neprobojnost, pokretnost i sila inercije celine posledice su širenja, čvrstoće, neprobojnosti, pokretnosti i sile inercije delova i odatle zaključujemo da će se najmanje čestice svih tela takođe širiti, zatim da će biti čvrste, neprobojne i pokretne, kao i da će posedovati sopstvenu silu inercije. Upravo je to osnova filozofije. Dalje, stvar je posmatranja to da se odvojene i susedne čestice tela mogu međusobno razdvojiti, a kao što je matematički dokazano, iz čestica koje ostanu nedeljive naš um može izdvojiti još manje delove. Međutim, ne može se sa sigurnošću odrediti da li se ti izdvojeni i još uvek nerazdeljeni delovi zapravo mogu međusobno podeliti i razdvojiti pomoću sila Prirode. Ipak, ako smo samo jednim eksperimentom dokazali da se bilo koja nedeljiva čestica izlaže deljenju pri probijanju kroz tvrdo i čvrsto telo, onda uz pomoć tog pravila možemo zaključiti da se i nedeljive i deljive čestice mogu podeliti i uistinu razdvojiti *in infinitum*.

Na kraju, ako iz eksperimenata i astronomskih posmatranja univerzalno sledi da sva tela oko Zemlje teže ka Zemlji proporcionalno sa količinom materije koju svako telo ponaosob sadrži, kao i da Mesec proporcionalno sa svojom količinom materije teži ka Zemlji, dok, s druge strane, naše more teži ka Mesecu, zatim, da sve planete uzajamno teže jedna drugoj, a komete, na sličan način, teže ka Suncu – onda moramo, na osnovu tog pravila, univerzalno utvrditi da sva tela imaju princip uzajamne gravitacije. Iz pojava zaključujemo da univerzalna gravitacija deluje jače od neprobojnosti svih tela, jer za ona tela koja se nalaze u nebeskim oblastima nemamo potvrdu iz eksperimenata niti ih na bilo koji način možemo posmatrati. Takođe, ne tvrdim da je gravitacija od suštinske važnosti za tela, a pod njihovom urođenom silom ne podrazumevam ništa drugo do silu inercije. Ona je nepromenljiva, dok se gravitacija umanjuje pri udaljavanju od Zemlje.

PRAVILO IV

Propozicije u eksperimentalnoj filozofiji, koje su sakupljene opštom indukcijom iz fenomena, moramo smatrati tačnim ili približno tačnim, uprkos bilo kojim suprotnim hipotezama koje se mogu zamisliti, sve dok se ne pojavi neki drugi fenomen pomoću kojeg bi one bile ili preciznije ili isključene.

Ovo pravilo moramo slediti kako argument indukcije ne bi mogao biti izbegnut hipotezama.

FENOMENI ILI POJAVE

FENOMEN I

Sateliti Jupitera poluprečnicima, koji su povučeni do njegovog centra, opisuju površine proporcionalne sa vremenima opisivanja, a njihova periodična vremena u odnosu na fiksne zvezde koje su u stanju mirovanja nalaze se u polukubnom odnosu njihovih rastojanja od tog centra.

Ovo nam je poznato iz astronomskih posmatranja. Orbite ovih satelita ne razlikuju se značajno od krugova koncentričnih s Jupiterom, a pronađeno je da su njihova kretanja po tim krugovima ravnomerna. I svi se astronomi slažu u tome da su periodična vremena u polukubnom odnosu sa poluprečnicima njihovih orbita, a to očigledno sledi iz sledeće tabele.

Periodična vremena Jupiterovih satelita

$1^d\ 18^h\ 27'\ 34''$; $3^d\ 13^h\ 13'\ 42''$; $7^d\ 3^h\ 42'\ 36''$; $16^d\ 16^h\ 32'\ 9''$

Rastojanja satelita od centra Jupitera

Prema posmatranjima	I	II	III	IV	
Boreli (Borelli)	$5\frac{2}{3}$	$8\frac{2}{3}$	14	$24\frac{2}{3}$	*poluprečnik Jupitera*
Taunli (Townly), mikrometrom	5,52	8,78	13,47	24,72	
Kazini (Cassini), teleskopom	5	8	13	23	
Kazini, eklipsama satelita	$5\frac{2}{3}$	9	$14\frac{23}{60}$	$25\frac{3}{10}$	
Prema periodičnim vremenima	5,667	9,017	14,384	25,299	

Gospodin Paund (Pound) je pomoću izuzetnih mikrometara odredio poluprečnike Jupitera i elongaciju njegovih satelita na sledeći način. Najveća heliocentrična elongacija četvrtog satelita od Jupiterovog centra dobijena je mikrometrom teleskopa od 15 stopa i na srednjem rastojanju Jupitera od Zemlje iznosila je oko 8' 16". Elongacija trećeg satelita dobijena je mikrometrom teleskopa od 123 stope i na istom rastojanju Jupitera od Zemlje iznosila je oko 4' 42". Najveće elongacije ostalih satelita, na jednakom rastojanju Jupitera od Zemlje, pronađene su pomoću periodičnih vremena i iznosile su 2' 56" 47"' i 1' 51" 6"'.

Prečnik Jupitera dobijen je mikrometrom teleskopa od 123 stope nekoliko puta, a kad je sveden na Jupiterovo srednje rastojanje od Zemlje, iznosio je uvek manje od 40", nikad manje od 38", a uglavnom 39". Ovaj prečnik u manjim teleskopima iznosi 40" ili 41", jer se Jupiterova svetlost malo širi usled nejednakog prelamanja zrakova, a to rastezanje čini manjim odnos Jupiterovog prečnika u dužim i preciznijim teleskopima nego u onim čiji je luk kraći i manje precizan. Dugačkim teleskopom su posmatrana vremena, tokom kojih dva satelita, prvi i treći, prelaze kroz Jupiterov disk, od početka ulaska i početka izlaska, kao i od ukupnog ulaska i ukupnog izlaska. Pri prelasku prvog satelita, prečnik Jupitera, na srednjem rastojanju od Zemlje, iznosio je $37\frac{1}{8}$", a pri prelasku trećeg satelita $37\frac{3}{8}$". Takođe je posmatrano i vreme tokom kojeg senka prvog satelita prelazi preko Jupiterovog satelita. Odatle smo dobili da Jupiterov prečnik na srednjem rastojanju od Zemlje iznosi oko 37". Ako pretpostavimo da prečnik približno iznosi $37\frac{1}{4}$", onda će najveće elongacije prvog, drugog, trećeg i četvrtog satelita biti jednake sa 5,965, 9,494, 15,141 i 26,63 poluprečnika Jupitera.

FENOMEN II

Sateliti Saturna poluprečnicima, koji su povučeni do njegovog centra, opisuju površine proporcionalne sa vremenima opisivanja, a njihova periodična vremena u odnosu na fiksne zvezde koje su u stanju mirovanja nalaze se u polukubnom odnosu njihovih rastojanja od tog centra.

Kao što je Kazini svojim posmatranjima utvrdio, njihova rastojanja od Saturnovog centra i njihova periodična vremena jesu sledeća:

Periodična vremena Saturnovih satelita

$1^d\ 21^h\ 18'\ 27''$; $2^d\ 17^h\ 41'\ 22''$; $4^d\ 12^h\ 25'\ 12''$; $15^d\ 22^h\ 41'\ 14''$; $79^d\ 7^h\ 48'\ 00''$

Rastojanja satelita od centra Saturna u poluprečnicima njegovog prstena:

Prema posmatranjima.....	$1\frac{19}{20}$	$2\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$	8	24
Prema periodičnim vremenima...	1,93	2,47	3,45	8	23,35

Najveća elongacija četvrtog satelita iz Saturnovog centra koja je određena prema posmatranjima iznosi približno osam ovih poluprečnika. Međutim, najveća elongacija ovog satelita od Saturnovog centra koja je dobijena mikrometrom Hajgensovog (Huygens), teleskopa od 123 stope iznosila je osam poluprečnika i $\frac{7}{19}$ prečnika. Iz ovih posmatranja i iz periodičnih vremena sledi da rastojanja satelita od Saturnovog centra u poluprečnicima prstena iznose 2,1; 2,69; 3,75; 8,7 i 25,35. Saturnov prečnik, posmatran ovim teleskopom, odnosi se prema prečniku prstena kao 3 prema 7, a prečnik prstena je 28 i 29. maja 1719. godine iznosio je 43" i odatle sledi da prečnik prstena, kad je Saturn na srednjem rastojanju od Zemlje, iznosi 42", a prečnik Saturna 18". Sve ovo proizlazi iz posmatranja sa veoma dugačkim i preciznim teleskopom, jer se u takvim teleskopima očigledne veličine nebeskih tela nalaze u većem odnosu prema dilataciji svetlosti u blizini krajeva tih tela, nego u kraćim teleskopima.

Ako odbacimo sve privide nastale usled svetlosti, onda Saturnov prečnik neće biti veći od 16".

FENOMEN III

Pet osnovnih planeta – Merkur, Venera, Mars, Jupiter i Saturn – sa svojih nekoliko orbita obuhvataju Sunce.

Jasno je da Merkur i Venera kruže oko Sunca iz svojih pojava sličnih Mesecu. Kada sijaju punim diskom, oni su u odnosu na nas iza ili iznad Sunca; kada sijaju polovinom diska, oni su na otprilike istoj visini s jedne ili s druge strane Sunca; kada sijaju u obliku srpa, nalaze se ispod ili između nas i Sunca; a kada su neposredno ispod, ponekad su viđeni kao tačkice koje prelaze preko Sunčevog diska. Da Mars obilazi oko Sunca, jasno je iz njegovog punog diska kada se nalazi blizu konjunkcije sa Suncem i iz njegovog izbočenog oblika u kvadraturama. Isto se može primeniti i na Jupiter i Saturn

koji u svim slučajevima sijaju punim diskom, jer senke njihovih satelita koje se ponekad pojavljuju na diskovima ne sijaju svojom svetlošću već svetlošću pozajmljenoj od Sunca.

FENOMEN IV

Pošto su fiksne zvezde u stanju mirovanja, onda se periodična vremena pet osnovnih planeta, kao i kruženja Sunca oko Zemlje ili Zemlje oko Sunca, nalaze u polukubnom odnosu njihovih srednjih rastojanja od Sunca.

Ovaj odnos, koji je prvi uočio Kepler, prihvaćen je od strane svih astronoma, jer ista su periodična vremena i dimenzije orbita bez obzira na to da li Sunce kruži oko Zemlje ili Zemlja oko Sunca. I svi stronomi se slažu u vezi sa merenjem periodičnih vremena. Međutim, dimenzije orbita, koje su pre svih ostalih odredili Kepler i Bulialdus (Bullialdus), svojim posmatranjima sa najvećom preciznošću, kao i srednja rastojanja koja odgovaraju periodima vremena, ne razlikuju se značajno od onih koja su im pripisana, a najveći deo nalazi se između njih, kao što možemo videti u narednoj tabeli.

Periodična vremena planeta i Zemlje koje kruže oko Sunca, a s obzirom na fiksne zvezde, izražena u danima i decimalnim delovima dana.

♄	♃	♂	♁	♀	☿
10759,275	4332,514	686,9785	365,2565	224,6176	87,9692

Srednja rastojanja planeta i Zemlje od Sunca

	♄	♃	♂
Prema Kepleru.....	951000	519650	152350
Prema Bulialdusu.....	954198	522520	152350
Prema periodičnim vremenima....	954006	520096	152369
	♁	♀	☿
Prema Kepleru.....	100000	72400	38806
Prema Bulialdusu.....	100000	72398	38585
Prema periodičnim vremenima....	100000	72333	38710

Što se tiče Merkura i Venere, ne može postojati sumnja u vezi s njihovim rastojanjima od Sunca, jer su ona određena elongacijama

tih planeta od Sunca, a svi sporovi u vezi sa rastojanjima gornjih planeta od Sunca otklonjeni su pomoću pomračenja Jupiterovih satelita. Jer, prema tim pomračenjima određen je položaj senke koju baca Jupiter, a odatle dobijamo heliocentričnu dužinu Jupitera. A kada zajedno uporedimo heliocentrične i geocentrične dužine, odredićemo i Jupiterovo rastojanje.

FENOMEN V

Osnovne planete poluprečnicima koji su povučeni prema Zemlji opisuju površine koje nisu sasvim proporcionalne sa vremenima, dok su one površine, opisane poluprečnicima prema Suncu, proporcionalne sa vremenima opisivanja.

U odnosu na Zemlju njihovo je kretanje nekad direktno, nekad su nepokretne, a nekad čak i retrogradne. Međutim, u odnosu na Sunce, njihovo je kretanje uvek direktno i nastavljaju da se kreću skoro ravnomerno, tj., malo brže u perihelu, a malo sporije u afelu, tako da održavaju jednakost pri opisivanju površina. Ova propozicija poznata je među astronomima, a posebno je dokaziva za Jupiter pomoću pomračenja njegovih satelita, pomoću kojih su, kao što smo rekli, određene heliocentrične dužine te planete i njenog rastojanja od Sunca.

FENOMEN VI

Mesec poluprečnicima povučenim prema Zemljinom centru opisuje površinu proporcionalnu s vremenom opisivanja.

Ovo smo zaključili iz vidljivog kretanja Meseca u poređenju sa njegovim vidljivim prečnikom, iako je istina da kretanje Meseca malo ometa delovanje Sunca. Ipak, u postavljanju ovog Fenomena zanemario sam te male i neznatne greške.

PROPOZICIJE

PROPOZICIJA I. TEOREMA I

Sile, kojima se Jupiterovi sateliti neprekidno odbijaju od pravolinijskog kretanja i kojima su zadržani u svojim sopstvenim orbitama, teže ka Jupiterovom centru i obrnuto su proporcionalne sa kvadratima rastojanja mesta od tog centra.

Prvi deo ove propozicije sledi iz Fenomena I i Prop. II ili III, Knjige I, a poslednji deo iz Fenomena I i Kor. 6, Prop. IV iste Knjige.

Isto možemo podrazumevati i za Saturnove satelite, prema Fenomenu II.

PROPOZICIJA II. TEOREMA II

Sile, kojima se gornje planete neprekidno odbijaju od pravolinijskog kretanja i kojima su zadržane u svojim sopstvenim orbitama, teže ka Suncu i obrnuto su proporcionalne sa kvadratima rastojanja tih planeta od Sunčevog centra.

Prvi deo Propozicije jasan je iz Fenomena V i Prop. II, Knjige I, a poslednji deo iz Fenomena IV i Kor. 6, Prop. IV, iste Knjige. Ipak, taj deo Propozicije je sa većom preciznošću dokaziv pomoću mirovanja tačaka afela, jer veoma malo odstupanje od obrnute proporcionalnosti kvadrata rastojanja (prema Kor. 1, Prop. XLV, Knjige I) proizvešće kretanje apsida dovoljno primetno u svakoj revoluciji ponaosob, dok će pri mnogim revolucijama ono biti izuzetno veliko.

PROPOZICIJA III. TEOREMA III

Sile, kojima je Mesec zadržan u svojoj orbiti, teže ka Zemlji i obrnuto su proporcionalne sa kvadratom rastojanja njegovog mesta od centra Zemlje.

Prvi deo Propozicije jasan je iz Fenomena VI i Prop. II ili III, Knjige I, a poslednji iz veoma sporog kretanja Mesečevog apogeja, koje se može zanemariti jer u svakoj revoluciji ponaosob iznosi oko 30° 31′ *in consequentia*. Prema Kor. 1, Prop. XLV, Knjige I, ako se rastojanje Meseca od Zemljinog centra odnosi prema poluprečniku Zemlje kao D prema 1, onda će sila, iz koje će takvo kretanje nastati, biti obrnuto proporcionalna sa $D^{2\frac{4}{243}}$, tj., obrnuto proporcionalna sa stepenom iz D, čiji je indeks $2\frac{4}{243}$, tj., u odnosu rastojanja koji je nešto veći od 2 i koji je za $59\frac{3}{4}$ puta bliži kvadratnom, nego kubnom odnosu. Ipak, bez obzira na to što ovo kretanje proizlazi usled delovanja Sunca (kao što ćemo kasnije pokazati), ono je ovde zanemareno. Delovanje Sunca koje privlači Mesec od Zemlje

približno je proporcionalno sa rastojanjem Meseca od Zemlje i zbog toga se (u skladu s onim što smo pokazali u Kor. 2, Prop. XLV, Knjige I) odnosi prema centripetalnoj sili Meseca približno kao 2 prema 357,45, tj., kao 1 prema $178\frac{29}{40}$. Ako zanemarimo takvu neznatnu silu Sunca, onda će preostala sila, kojom se Mesec zadržava u svojoj orbiti, biti obrnuto proporcionalna sa D^2. To će potpunije biti utvrđeno ako uporedimo tu silu sa silom gravitacije, kao što je urađeno u narednoj Propoziciji.

Kor. Ako srednju centripetalnu silu, kojom se Mesec zadržava u svojoj orbiti, prvo uvećamo u odnosu $177\frac{29}{40}$ prema $178\frac{29}{40}$, a potom u odnosu kvadrata poluprečnika Zemlje prema kvadratu srednjeg rastojanja centra Meseca do centra Zemlje, onda ćemo dobiti centripetalnu silu Meseca na površini Zemlje i pretpostavićemo da se ta sila, pri približavanju do površine Zemlje, neprekidno uvećava obrnuto proporcionalno sa kvadratom visine.

PROPOZICIJA IV. TEOREMA IV

Mesec teži ka Zemlji, a silom gravitacije neprekidno se odbija od svog pravolinijskog kretanja i zadržava se u svojoj orbiti.

Srednje rastojanje Meseca od Zemlje u sizigijama iznosi, prema Ptolomeju i većini astronoma, 59 poluprečnika Zemlje; 60, prema Vendelinu (Vendelin) i Hajgensu; $60\frac{1}{3}$ prema Koperniku; $60\frac{2}{5}$, prema Stritu (Street); $56\frac{1}{2}$ prema Braheu (Brahe). Međutim, Brahe je, kao i svi oni koji su sledili njegove tablice prelamanja, uzeo da prelamanja Sunca i Meseca (što je potpuno protivno prirodi svetlosti) prevazilaze prelamanja fiksnih zvezda, i to za četiri ili pet minuta *bliže horizontu*, kako bi time uvećao Mesečevu *horizontalnu* paralaksu za isto toliko minuta, tj., za dvanaestinu ili petnaestinu ukupne paralakse. Ako ispravimo ovu grešku, onda će rastojanje iznositi oko $60\frac{1}{2}$ poluprečnika Zemlje, tj., približno kao što su i drugi odredili. Pretpostavimo da je srednje rastojanje 60 prečnika u sizigijama i da je jedna revolucija Meseca, u odnosu na fiksne zvezde, dovršena za $27^d\ 7^h\ 43'$, kao što su astronomi odredili, a da obim Zemlje iznosi 123249600 *pariskih* stopa, kao što su Francuzi pronašli merenjem. Ako zamislimo da je Mesec, koji je lišen kretanja, pušten tako da pada prema Zemlji pod dejstvom celokupne te sile kojom je (prema Kor. Prop. III), zadržan u svojoj orbiti, onda će on tokom padanja u jednoj minuti vremena opisati

prostor od $15\frac{1}{12}$ *pariskih* stopa. To možemo zaključiti iz računa zasnovanog na Prop. XXXVI, Knjige I, tj., Kor. 9, Prop. IV, iste Knjige. Jer, sinus versus tog luka, koji Mesec tokom jedne minute vremena svojim srednjim kretanjem opisuje na rastojanju od 60 poluprečnika Zemlje, iznosi približno $15\frac{1}{12}$ *pariskih* stopa ili preciznije, 15 stopa, 1 inč i $1\frac{4}{9}$ linija. Pošto se ta sila, pri približavanju ka Zemlji, uvećava u obrnutom odnosu kvadrata rastojanja, ona će biti 60×60 puta veća na površini Zemlje, nego na Mesecu, a telo koje pada pod dejstvom takve sile u našim oblastima tokom jedne minute opisalo bi $60 \times 60 \times 15\frac{1}{12}$ *pariskih* stopa, a tokom jedne sekunde $15\frac{1}{12}$ *pariskih* stopa, ili preciznije 15 stopa, 1 inč i $1\frac{4}{9}$ linija. Pomoću te sile saznajemo da tela zaista padaju ka Zemlji, jer dužina klatna, koje osciluje u sekundama širinom *pariskih* stopa, iznosiće 3 *pariske* stope i $8\frac{1}{2}$ linija, kao što je Hajgens uočio. Odnos prostora koji teško telo opisuje padanjem tokom jedne sekunde vremena prema polovini dužine tog klatna jednak je kvadratu odnosa obima kruga prema njegovom prečniku (kao što je, takođe, Hajgens pokazao) i zbog toga iznosi 15 *pariskih* stopa, 1 inč i $1\frac{7}{9}$ linija. Prema tome, sila, kojom je Mesec zadržan u svojoj orbiti, na samoj površini Zemlje postaje jednaka sa silom gravitacije koju posmatramo u teškim telima. Stoga je (prema Pravilu I i II) sila kojom je Mesec zadržan u svojoj orbiti ista ona sila koju uobičajeno nazivamo gravitacijom, jer, ako je gravitacija različita od te sile, onda bi tela padala prema Zemlji sa zajedničkim impulsom obe sile i sa dvostrukom brzinom, pa bi tokom jedne sekunde vremena opisala $30\frac{1}{6}$ *pariskih* stopa, što potpuno protivreči iskustvu.

Ovaj račun zasnovan je na hipotezi da se Zemlja ne pomera, jer ako bi i Zemlja i Mesec kružili oko Sunca, a istovremeno oko zajedničkog centra gravitacije, onda bi međusobno rastojanje između centra Zemlje i centra Meseca iznosilo $60\frac{1}{2}$ poluprečnika Zemlje, kao što se može pronaći iz računa zasnovanog na Prop. LX, Knjige I.

SHOLIJA

Dokaz ove propozicije može se podrobnije objasniti na sledeći način. Ako pretpostavimo da nekoliko meseca kruži oko Zemlje, kao u sistemu Jupitera ili Saturna, onda će periodična vremena tih meseca (prema argumentu indukcije), slediti isti zakon koji je Kepler otkrio za planete i zbog toga će njihove centripetalne sile biti obrnuto proporcionalne sa kvadratima rastojanja od centra Zemlje,

shodno Prop. I, ove knjige. Sada, ako su najniži od tih meseca veoma mali i ako su toliko blizu Zemlje da dodiruju vrhove najviših planina, onda će centripetalna sila, koja ih zadržava u orbitama, biti približno proporcionalna sa težinama bilo kog *zemaljskog* tela koje se može pronaći na vrhovima tih planina, kao što je poznato iz prethodnog računa. Prema tome, ako taj isti mali mesec nema centrifugalnu silu koja ga nosi kroz orbitu, pa je onemogućen da se kreće po njoj, pašće na Zemlju istom brzinom kojom teška tela zapravo padaju sa vrhova tih planina, jer su u oba slučaja jednake sile usled kojih oni padaju. Ako je sila, pomoću koje najniži mesec pada, različita od gravitacije, i ako taj mesec teži ka Zemlji, kao što to čine zemaljska tela na vrhovima planina, onda će padati dvostrukom brzinom, pošto na njega deluju obe sile zajedno. Pošto su obe sile, tj., gravitacija teških tela i centripetalna sila meseca, koje teže ka centru Zemlje, međusobno slične i jednake, one će (prema Pravilu I i II) imati isti uzrok. I zbog toga je sila, koja zadržava Mesec u njegovoj orbiti, ista ona sila koju uobičajeno nazivamo gravitacijom; u suprotnom, taj mali mesec na vrhu planine ili neće imati gravitaciju ili će padati dvostruko brže od teških tela.

PROPOZICIJA V. TEOREMA V

Planete koje kruže oko Jupitera teže ka Jupiteru, one koje kruže oko Saturna teže ka Saturnu, a one koji kruže oko Sunca teže ka Suncu, dok ih njihove sile gravitacije odbijaju od pravolinijskog kretanja i zadržavaju ih u krivolinijskim orbitama.

Revolucije satelita oko Jupitera i Saturna, kao i revolucije Merkura, Venere i ostalih planeta oko Sunca, pojave su iste vrste kao i revolucija Meseca oko Zemlje i zbog toga, prema Pravilu II, moraju imati istu vrstu uzroka, posebno posle onoga što je dokazano, da se sile, od kojih zavise te revolucije i koje teže ka centrima Jupitera, Saturna ili Sunca, kao i one sile, koje deluju pri udaljavanju od Jupitera, Saturna ili Sunca, umanjuju u istom odnosu i prema istom zakonu kao i sila gravitacije pri udaljavanju od Zemlje.

Kor. 1. Prema tome, sila gravitacije postoji na svim planetama, jer, Venera, Merkur i ostale planete nesumnjivo su tela iste vrste kao i Jupiter i Saturn. Pošto je svako privlačenje uzajamno (prema Zakonu III), Jupiter će težiti prema svojim satelitima, Saturn prema svojim, Zemlja prema Mesecu, a Sunce prema svim osnovnim planetama.

Kor. 2. Sila gravitacije koja teži ka bilo kojoj planeti obrnuto je proporcionalna sa kvadratom rastojanja mesta od centra planete.

Kor. 3. Sve planete uzajamno teže jedna prema drugoj (prema Kor. 1 i 2). Na taj način, Jupiter i Saturn, kada su blizu konjunkcije, svojim uzajamnim privlačenjima osetno utiču na međusobna kretanja. Tako i Sunce utiče na kretanje Meseca, a Sunce i Mesec na naše more, kao što ćemo kasnije objasniti.

SHOLIJA

Sila koja zadržava nebeska tela u njihovim orbitama do sada je nazivana centripetalnom silom. Ipak, sada je jasno da ona ne može biti ništa drugo osim sile gravitacije, koju ćemo od sada nazvati gravitacijom. Jer, uzrok te centripetalne sile, koja zadržava Mesec u njegovoj orbiti, mora se primeniti na sve planete (prema Pravilu I, II i IV).

PROPOZICIJA VI. TEOREMA VI

Sva tela teže ka svakoj pojedinačnoj planeti, a težine tela, na svakoj *istoj* planeti i na jednakom rastojanju od centra planete, proporcionalne su sa količinama materije tih pojedinačnih planeta.

Do sada su mnogi uočili da teška tela bilo koje vrste (uzeta je u obzir i nejednakost usporenja usled malog stepena otpora vazduha) padaju prema Zemlji sa jednakih visina u jednakim vremenima, a ta jednakost vremena može se ustanoviti sa najvećom preciznošću uz pomoć klatna. To sam testirao pomoću zlata, srebra, olova, stakla, peska, obične soli, drveta, vode i pšenice. Napravio sam dve drvene kutije, okrugle i jednake. Jednu sam napunio drvetom i okačio sam jednaku težinu zlata (što sam preciznije mogao) u centar oscilacije. Kutije, koje su visile na jednakim nitima od 11 stopa, činile su par klatna savršeno jednakih u težini i obliku i na njih je jednako delovao otpor vazduha. Kada sam ih postavio jedno pored drugog, uočio sam da su se kretali napred i nazad tokom dugog perioda vremena sa jednakim vibracijama. Prema tome, količina materije u zlatu (prema Kor. 1 i 6, Prop. XXIV, Knjige II), odnosila se prema količini materije u drvetu kao delovanje pokretačke sile

(*vis motrix*) na zlatu prema delovanju iste sile na drvetu, tj., kao težina jednog prema težini drugog. A slično se dešava i sa drugim telima. Ovim eksperimentima sa telima iste težine jasno mogu otkriti razliku količine materije koja je manja od hiljaditog dela ukupne težine, ukoliko takva postoji. Međutim, bez svake sumnje, priroda gravitacije je na planetama ista kao na Zemlji. Ako zamislimo da su naša zemaljska tela podignuta na orbitu Meseca i da su tamo zajedno sa Mesecom lišeni kretanja i pušteni da padaju prema Zemlji, onda je, iz onoga što smo ranije dokazali, sigurno da će u jednakim vremenima opisivati jednake prostore sa Mesecom, jer će se njihova količina materije odnositi prema količini materije Meseca kao njihova težina prema težini Meseca. Pošto Jupiterovi sateliti izvode revolucije u vremenima koja se nalaze u polukubnom odnosu njihovih rastojanja od centra Jupitera, onda će njihove ubrzavajuće sile gravitacije prema Jupiteru biti obrnuto proporcionalne sa kvadratima njihovih rastojanja od Jupiterovog centra, tj., biće jednake na jednakim rastojanjima. Prema tome, ti sateliti će, ako pretpostavimo da padaju prema Jupiteru sa jednakih visina, opisati jednake prostore u jednakim vremenima, na sličan način kao što to čine teška tela na Zemlji. Prema istom argumentu, ako pretpostavimo da planete koje kruže oko Sunca padaju na jednakim rastojanjima od Sunca, one će pri tom padanju prema Suncu opisati jednake prostore u jednakim vremenima. Ipak, sile koje jednako ubrzavaju nejednaka tela moraju biti proporcionalne sa tim telima, tj., težina planeta prema Suncu mora biti proporcionalna sa njihovim količinama materije. Dalje, iz izuzetno pravilnog kretanja satelita (prema Kor. 3, Prop. LXV, Knjige I), dobijamo da su težine Jupitera i njegovih satelita prema Suncu proporcionalne sa pojedinačnim količinama njihove materije. Ako su neka od tih tela jače privučena prema Suncu u odnosu na njihovu količinu materije, onda će to nejednako privlačenje utícati na kretanje satelita (prema Kor. 2, Prop. LXV, Knjige I). Ako na jednakim rastojanjima od Sunca, bilo koji satelit, u odnosu na količinu svoje materije, teži prema Suncu, silom koja je jača od Jupiterove, shodno njegovoj količini materije, u bilo kom datom odnosu, recimo kao d prema e, onda će rastojanje između centra Sunca i orbite satelita uvek biti veće od rastojanja između centra Sunca i centra Jupitera u odnosu približno jednakim sa $\sqrt{d}$ prema $\sqrt{e}$, baš kao što sam i pronašao pomoću izvesnih proračuna. A ako sateliti teže prema Suncu silom koja je manja od odnosa d prema e, onda će rastojanje

centra orbite satelita do Sunca biti manje od rastojanja centra Jupitera do Sunca u odnosu $\sqrt{d}$ prema $\sqrt{e}$. Prema tome, na jednakim rastojanjima od Sunca, ubrzavajuća sila gravitacije bilo kog satelita prema Suncu veća je ili manja od ubrzavajuće sile gravitacije Jupitera prema Suncu za $\frac{1}{1000}$ od ukupne gravitacije, a rastojanje centra orbite satelita od Sunca biće veće ili manje od rastojanja Jupitera od Sunca za $\frac{1}{2000}$ od ukupnog rastojanja, tj., na $\frac{1}{5}$ rastojanja najdaljeg satelita od centra Jupitera, a pritom će ekscentričnost orbite biti veoma primetna. Međutim, orbite satelita koncentrične su sa Jupiterom, pa su zbog toga Jupiterove ubrzavajuće sile gravitacije kao i svih njegovih satelita prema Suncu, međusobno jednake. Prema istom argumentu, težine Saturna i svih njegovih satelita prema Suncu i na jednakim rastojanjima od Sunca, proporcionalne su sa njihovim pojedinačnim količinama materije, a težine Meseca i Zemlje prema Suncu ili su jednake sa nulom ili su precizno proporcionalne sa njihovim masama. A da su oni takvi, sledi iz Kor. 1 i 3, Prop. V.

Dalje, težine svih delova svake planete prema bilo kojoj drugoj planeti međusobno su proporcionalni sa njihovim pojedinačnim masama, jer, ako neki delovi teže više, a neki manje od količine njihove materije, onda će planete, s obzirom na to koji delovi preovladavaju, težiti više ili manje u odnosu na ukupnu količinu materije. Pritom nije bitno da li su ti delovi unutrašnji ili spoljašnji, jer, zamislimo, na primer, da su zemaljska tela podignuta na orbitu Meseca i da su tamo upoređena sa njegovom masom – onda, ako se težina tih tela odnosi prema težini spoljašnjih delova Meseca kao količina materije u prvom prema količini materije u drugom i ako su prema unutrašnjim delovima u većoj ili manjoj proporciji, težine tih tela prema ukupnoj težini Meseca biće u većoj ili manjoj proporciji, što je protivno onome što smo gore pokazali.

Kor. 1. Prema tome, težine tela ne zavise od njihovih oblika i sastava, jer, ako bi težini promenili oblik, one bi bile veće ili manje s obzirom na raznolikost oblika u jednakim materijama, što je potpuno suprotno iskustvu.

Kor. 2. Uopšte, sva tela oko Zemlje teže ka Zemlji, a na jednakim rastojanjima od centra Zemlje, težine svih tela proporcionalne su sa njihovim količinama materije. To je svojstvo svih tela sa kojima možemo vršiti eksperimente, a zbog toga (prema Pravilu II) možemo ih primeniti na sva tela uošte. Ako je eter, ili bilo koje drugo telo, potpuno lišen gravitacije ili teži manje u proporciji sa njegovom

količinom materije, onda bi se, pošto nema razlike (prema Aristotelu, Dekartu i drugima) između tog i ostalih tela osim u samom obliku materije, postepenim promenama iz jednog oblika u drugi na kraju mogao promeniti u telo koje ima iste uslove kao i ona koja teže proporcionalno sa svojim količinama materije; s druge strane, najteža tela će postepenim promenama oblika postepeno gubiti svoju gravitaciju. Prema tome, težine će zavisiti od oblika tela, a shodno tim oblicima mogu se i promeniti, što je suprotno onome što je dokazano u prethodnom Korolaru.

Kor. 3. Nisu svi prostori jednako ispunjeni, jer, ako bi svi prostori bili jednako ispunjeni, onda specifična gravitacija tečnosti koja ispunjava oblast našeg vazduha usled izuzetne gustine materije neće popustiti specifičnoj gravitaciji žive, zlata ili bilo kog drugog najgušćeg tela i zbog toga ni zlato ni bilo koje drugo telo ne bi moglo da pada u vazduhu, jer tela ne padaju u tečnostima osim ako su veće specifične težine. I ako se količina materije u datom prostoru može umanjiti, bilo kakvim razređivanjem, šta bi onda sprečilo umanjenje do beskonačnosti?

Kor. 4. Ako su sve čvrste čestice svih tela jednake gustine i pošto se ne mogu razrediti ako nemaju pore, onda prazan prostor ili vakuum moraju postojati.

Pod telima sa istom gustinom podrazumevam ona tela čije su sile inercija proporcionalne sa njihovim zapreminama.

Kor. 5. Sila gravitacije drugačije je prirode od magnetne sile, jer magnetno privlačenje nije proporcionalno sa privlačenjem materije. Neka tela su više privučena magnetom, neka manje, a većina nije uopšte. Magnetna sila u jednom istom telu može se uvećati ili umanjiti i ponekad je mnogo jača, u odnosu na količinu materije, od sile gravitacije. Pri udaljavanju od magneta umanjuje se ne u dvostrukoj već skoro u trostrukoj proporciji rastojanja, koliko ja mogu suditi prema nekoliko grubih posmatranja.

PROPOZICIJA VII. TEOREMA VII

Postoji sila gravitacije koja teži ka svim telima i koja je proporcionalna sa količinama materije svakog od tih tela pojedinačno.

Ranije smo dokazali da sve planete uzajamno teže jedna prema drugoj, kao i to da je sila gravitacije prema svakoj od njih pojedinačno obrnuto proporcionalna sa kvadratima rastojanja mesta od

centra planete. Odatle sledi (prema Prop. LXIX, Knjige I i njenih korolara) da je gravitacija koja teži prema svim planetama proporcionalna sa količinom materije koju one sadrže.

Dalje, pošto svi delovi bilo koje planete A teže prema bilo kojoj drugoj planeti B i pošto se gravitacija svakog dela odnosi prema gravitaciji celine kao što se materija tog dela odnosi prema materiji celine, zatim, pošto prema Zakonu II svakoj akciji odgovara jednaka reakcija, onda će planeta B, s druge strane, težiti prema svim delovima planete A, a njena gravitacija prema bilo kom delu odnosiće se ka gravitaciji prema celini kao materija tog dela prema materiji celine. Q.E.D.

Kor. 1. Prema tome, sila gravitacije prema celokupnoj planeti nastaje i sačinjena je iz sila gravitacija prema svim njenim delovima. Magnetna i električna privlačenja pružaju nam sledeći primer: sva privlačenja prema celini nastaju iz privlačenja prema pojedinim delovima. U slučaju gravitacije ovo ćemo lakše razumeti, ako zamislimo da se veća planeta sastoji iz mnogo manjih koje su zajedno sjedinjene u jednoj lopti. Odatle sledi da sila celine mora nastati iz sila njenih sastavnih delova. Ako se prigovori da sva tela, shodno ovom zakonu, moraju međusobno težiti jedno prema drugom i onda kada takva gravitacija nigde ne postoji, odgovaram na sledeći način: pošto se gravitacija ka ovim telima odnosi prema gravitaciji kao celini kao što se ta tela odnose prema celoj Zemlji, onda gravitacija prema njima mora biti mnogo manja od one koja je dostupna našim čulima.

Kor. 2. Sila gravitacije prema nekoliko jednakih čestica bilo kog tela obrnuto je proporcionalna sa kvadratom rastojanja mesta od čestica (prema Kor. 3, Prop. LXXIV, Knjige I).

PROPOZICIJA VIII. TEOREMA VIII

Ako je u dvema sferama, koje uzajamno teže jedna prema drugoj, materija u ravnima sa svake strane i na jednakoj udaljenosti od centra slična, onda će težina bilo koje od ovih sfera prema drugoj biti obrnuto proporcionalna sa kvadratom rastojanja između njihovih centara.

Pošto sam pronašao da sila gravitacije prema celoj planeti nastaje iz sila gravitacije prema njenim delovima i sastoji se iz njih i da je prema svakom od tih delova bila obrnuto proporcionalna sa

kvadratima rastojanja od tog dela, još uvek sam sumnjao u to da li je ta obrnuta proporcionalnost kvadrata rastojanja precizna ili je samo približno tačna za ukupnu silu koja se sastoji iz toliko delimičnih sila. Jer, može da se desi da je ta proporcija, koja je dovoljno precizna za veća rastojanja, pogrešna u blizini površina planeta gde su rastojanja između čestica nejednaka, a njihovi položaji različiti. Ipak, pomoću Prop. LXXV i LXXVI, Knjige I i njenih korolara, konačno sam ubeđen u istinitost Propozicije koja je pred nama.

Kor. 1. Na osnovu toga možemo pronaći i međusobno uporediti težine tela prema različitim planetama, jer, prema Kor. 2, Prop. IV, Knjige I, težine tela koja kruže oko planeta direktno su proporcionalne sa prečnicima krugova, a obrnuto sa kvadratima periodičnih vremena, a njihove težine na površinama planeta, ili na bilo kom rastojanju od njihovih centara, veće su ili manje u obrnutom odnosu kvadrata rastojanja (prema ovoj propoziciji). Iz periodičnih vremena Venere koja kruži oko Sunca za $224^{d}\ 16\frac{3}{4}^{h}$, najudaljenijeg satelita Jupitera za $16^{d}\ 16\frac{8}{15}^{h}$; Hajgensovog satelita oko Saturna za $15^{d}\ 22\frac{2}{3}^{h}$; i Meseca oko Zemlje za $27^{d}\ 7^{h}\ 43'$, uporedenih sa srednjim rastojanjem Venere od Sunca, i sa najvećim heliocentričnim elongacijama najudaljenijeg Jupiterovog satelita od njegovog centra, koja iznosi 8' 16", Hajgensovog satelita od centra Saturna 3' 4" i Meseca od Zemlje 10' 33" – pronašao sam izračunavanjem da se težine jednakih tela na jednakim rastojanjima od centra Sunca, Jupitera, Saturna i Zemlje prema Suncu, Jupiteru, Saturnu i Zemlji međusobno odnose kao 1, $\frac{1}{1067}$ i $\frac{1}{169282}$. Pošto su usled uvećanja ili umanjenja rastojanja, umanjene ili uvećane težine u odnosu kvadrata rastojanja, onda će se težine jednakih tela prema Suncu, Jupiteru, Saturnu i Zemlji na rastojanjima 10000, 997, 791 i 109 od njihovih centara, tj., veoma blizu površina, međusobno odnositi kao 10000, 943, 529 i 435. U daljem tekstu ću pokazati kolike su težine tela na površini Meseca.

Kor. 2. Na sličan način otkrićemo količinu materije na svakoj planeti, jer, njihove količine materije proporcionalne su sa silama gravitacije na jednakim rastojanjima od njihovih centara; tj. na Suncu, Jupiteru, Saturnu i Zemlji odnose se kao 1, $\frac{1}{1067}$ i $\frac{1}{169282}$. Ako uzmemo da je paralaksa Sunca veća ili manja od 10" 30"', onda se količina materije na Zemlji mora uvećati ili umanjiti u odnosu kubne paralakse.

Kor. 3. Odatle ćemo, takođe, pronaći gustine planeta, jer su, (pema Prop. LXXII, Knjige I) težine jednakih i sličnih tela prema sličnim sferama, koja se nalaze na površinama tih sfera, proporcionalne sa prečnicima sfera i zbog toga će gustine različitih sfera biti proporcionalne sa onim težinama podeljenim na prečnike sfera. Međutim, istinski prečnici Sunca, Jupitera, Saturna i Zemlje međusobno se odnose kao 10000, 997, 791 i 109, dok se težine prema njima odnose kao 10000, 943, 529 i 435, i zbog toga će se njihove gustine odnositi kao 100, $94\frac{1}{2}$, 67 i 400. Gustina Zemlje, koju dobijamo pomoću ovog računa, ne zavisi od paralakse Sunca, već je određena paralaksom Meseca i zbog toga je ovde precizno definisana. Prema tome, Sunce je malo gušće od Jupitera, Jupiter od Saturna, a Zemlja je četiri puta gušća od Sunca, jer Sunce se, usled svoje velike vreline, održava u svojevrsnom razređenom stanju. Mesec je gušći od Zemlje, kao što će kasnije biti pokazano.

Kor. 4. Što su manje planete, *caeteris paribus*, to je veća njihova gustina i na taj način se sila gravitacije na površinama planeta približava jednakosti. Na sličan način, one su, *caeteris paribus*, veće gustine što su bliže Suncu. Jupiter je gušći od Saturna, a Zemlja od Jupitera i planete bi trebalo da budu smeštene na različitim rastojanjima od Sunca kako bi, u zavisnosti od stepena njihove gustine, mogle da primaju vrelinu Sunca u većoj ili manjoj meri. Naša voda bi se pretvorila u led, ako bi se Zemlja premestila na takvoj udaljenosti na kojoj je Saturnova orbita, a u oblasti Merkurove orbite ubrzo bi isparila. Jer sunčeva je svetlost, s kojom je proporcionalna vrelina, sedam puta gušća u Merkurovoj orbiti nego u Zemljinoj i pomoću termometra sam pronašao da će sedmostruka vrelina našeg letnjeg sunca učiniti da voda provri. Nema sumnje da je materija Merkura prilagođena toploti, pa je zbog toga gušća od materije na našoj Zemlji, jer, prirodni procesi iziskuju veću toplotu za gušću materiju.

PROPOZICIJA IX. TEOREMA IX

Sila gravitacije, koja deluje prema dole sa površina planeta, umanjuje se približno proporcionalno sa rastojanjem od njihovih centara.

Ako materija planete ima ravnomernu gustinu, onda je ova Propozicija precizna i tačna (prema Prop. LXXIII, Knjige I). Prema tome, greška ne može biti veća od one koja bi mogla nastati iz nejednakosti gustina.

PROPOZICIJA X. TEOREMA X

Kretanja planeta u nebeskim prostranstvima mogu se nastaviti tokom izuzetno dugog vremenskog perioda.

U Sholiji Prop. XL, Knjige II pokazao sam da će lopta sa zamrznutom vodom, koja se slobodno kreće u našem vazduhu u vremenu tokom kojeg bi opisala dužinu svog poluprečnika, izgubiti $\frac{1}{4386}$ dela svog kretanja usled otpora vazduha. Ista proporcija važi za skoro sve lopte, bez obzira na to koliko su velike i kojom se brzinom kreću. Međutim, da je Zemljina lopta veće gustine nego kada bi se cela sastojala iz vode, zaključio sam na sledeći način. Ako bi se cela ta lopta sastojala samo iz vode, onda bi sve ono što ima manju gustinu od vode isplivalo i plutalo na površini usled manje specifične gravitacije. Iz tog razloga, ako bi Zemljina lopta, koja je sa svih strana pokrivena vodom, imala manju gustinu od vode, ona bi negde isplivala, a voda koja s nje spada, skupila bi se na suprotnoj strani. U takvim uslovima nalazi se naša Zemlja, koja je većim delom okružena vodom. Ukoliko ne bi imala veću gustinu od vode, Zemlja bi isplivala iz mora, a s obzirom na stepen lakoće, ona bi se više ili manje izdigla sa površine, dok bi se voda slila na suprotnoj strani. Na osnovu istog argumenta, Sunčeve pege, koje plutaju na svetloj Sunčevoj površini, lakše su od te materije i bez obzira na to kako su planete formirane, dok su još uvek bile tečne mase, sva teža materija težila je prema centru. Prema tome, pošto je zajednička materija naše Zemlje na njenoj površini otprilike dva puta teža od vode, dok je malo niže, u rudnicima, otprilike tri, četiri, čak i pet puta teža, onda je moguće da je ukupna količina materije na Zemlji približno pet ili šest puta veća nego kada bi se sva sastojala iz vode, posebno, pošto je, kao što sam pokazao ranije, Zemlja otprilike četiri puta gušća od Jupitera. Zbog toga, ako je Jupiter malo gušći od vode, onda bi, u razmaku od trideset dana tokom kojih planeta opisuje dužinu od 459 svojih poluprečnika, izgubio skoro deseti deo svog kretanja u sredini koja je iste gustine kao naš vazduh. Međutim, pošto se otpor sredine umanjuje proporcionalno sa njenom težinom ili gustinom, onda će voda, koja je $13\frac{3}{5}$ puta lakša od žive, pružati otpor koji je isto toliko puta manji, a vazduh, koji je 860 puta lakši od vode, pružaće otpor koji je isto toliko puta manji. Prema tome, u nebeskim prostranstvima gde je težina sredine u kojoj se kreću planete neizmerno umanjena, otpor će skoro nestati.

U Sholiji Prop. XXII, Knjige II pokazano je da je na visini od 200 milja iznad Zemlje vazduh ređi nego na površini Zemlje i to u odnosu od 30 prema 0,0000000000003998, ili približno kao 75000000000000 prema 1. Odatle sledi da Jupiter, koji kruži u sredini koja je iste gustine kao i taj razređen vazduh, neće usled otpora sredine izgubiti milioniti deo svog kretanja za milion godina. U prostorima koji su bliži Zemlji, otpor nastaje samo usled vazduha, isparenja i pare. Ako ih pažljivo iscrpimo pomoću vazdušne pumpe iz cilindrične šupljine, onda će unutar nje teška tela padati sa najvećom slobodom i bez ikakvog primetnog otpora i ako pustimo da zajedno padaju zlato i najlakše paperje, oni će padati istom brzinom, a pri padanju kroz prostor od četiri, šest ili osam stopa, istovremeno će stići do dna, baš kao što i pokazuju eksperimenti. Prema tome, ako su nebeske oblasti savršeno lišene vazduha i isparavanja, onda će planete i komete, koje ne nailaze ni na kakav primetan otpor, nastaviti da se kreću kroz te oblasti tokom izuzetno dugačkog vremenskog perioda.

HIPOTEZA I

Centar sistema sveta je nepokretan.

Ovo je priznato od strane svih, iako neki tvrde da se Zemlja nalazi u tom centru, a neki – Sunce. Sada ćemo videti šta bi odatle moglo da sledi.

PROPOZICIJA XI. TEOREMA XI

Zajednički centar gravitacije Zemlje, Sunca i svih planeta je nepokretan.

Prema Kor. 4. Zakona taj centar je ili u stanju mirovanja ili se kreće ravnomerno pravolinijski. Međutim, ako bi se taj centar pomerio, takođe bi se pomerio i centar sveta, što je protivno Hipotezi.

PROPOZICIJA XII. TEOREMA XII

Na Sunce deluje neprekidno kretanje, ali se ono nikad ne udaljava mnogo od zajedničkog centra gravitacije svih planeta.

Pošto se (prema Kor. 2, Prop. VIII) količina materije Sunca odnosi prema količini materije Jupitera kao 1067 prema 1 i pošto

je rastojanje Jupitera od Sunca prema poluprečniku Sunca u proporciji koja je malo veća, onda će zajednički centar gravitacije Jupitera i Sunca biti u tački koja se nalazi malo iznad površine Sunca. Na osnovu istog argumenta, pošto se količina materije Sunca odnosi prema količini materije Saturna kao 3021 prema 1 i pošto je rastojanje Saturna od Sunca prema poluprečniku Sunca u proporciji koja je malo veća, onda će zajednički centar gravitacije Saturna i Sunca biti u tački koja se nalazi malo iznad površine Sunca. Ako nastavimo da provodimo proračune iz ovih principa, pronaći ćemo da rastojanje zajedničkog centra gravitacije od centra Sunca jedva iznosi jedan prečnik Sunca, ako su Zemlja i sve planete smeštene na jednoj strani Sunca. U svim drugim slučajevima, rastojanje tih centara uvek je manje i zbog toga, pošto je taj centar gravitacije neprekidno u stanju mirovanja, onda se Sunce, s obzirom na različite položaje planeta, mora neprekidno pomerati u svim pravcima, dok se pritom nikad neće mnogo udaljiti od tog centra.

Kor. Uzećemo da je zajednički centar gravitacije Zemlje, Sunca i svih planeta zajednički centar sveta. Pošto Zemlja, Sunce i sve planete međusobno teže jedni ka drugima i pošto se zbog toga, s obzirom na njihove sile gravitacije, neprekidno kreću, kao što to iziskuju zakoni kretanja, jasno je da se njihovi nepokretni centri ne mogu uzeti za nepokretni centar sveta. Ako bi u tom centru bilo smešteno neko telo, prema kom bi sva druga tela najviše težila (shodno uobičajenom mišljenju), tu privilegiju bi trebalo dopustiti Suncu. Ipak, pošto se Sunce kreće, onda bi trebalo odabrati takvu fiksnu tačku od koje se centar Sunca najmanje udaljava i od koje bi se još manje udaljavao ako bi Sunce bilo gušće i veće, zbog toga manje podesno za kretanje.

PROPOZICIJA XIII. TEOREMA XIII

Planete se kreću po elipsama i imaju zajedničku žižu u centru Sunca, a povučenim poluprečnicima do tog centra opisuju površine koje su proporcionalne sa vremenima opisivanja.

O tim kretanjima rečeno je više u razmatranjima o fenomenima. Sada kada znamo principe od kojih oni zavise, iz njih ćemo izvesti kretanja nebeskih tela *a priori*. Pošto su težine planeta prema Suncu obrnuto proporcionalne sa kvadratima njihovih rastojanja od centra Sunca i ako je Sunce u stanju mirovanja, a ostale

planete ne deluju međusobno jedna na drugu, onda će njihove orbite biti elipse, a zajednička žiža će se nalaziti u centru Sunca i opisivaće površine koje su proporcionalne sa vremenima opisivanja (prema Prop. I i IX, i Kor. I, Knjige I). Međusobna delovanja planeta su toliko mala da mogu biti zanemarena, a prema Prop. LXVI, Knjige I, ona manje deluju na kretanja planeta oko Sunca koje se kreće, nego na ona kretanja koja se izvode oko Sunca koje je u stanju mirovanja.

Istina je da se Jupiterovo delovanje na Saturn ne može zanemariti, jer sila gravitacije prema Jupiteru odnosi se prema sili gravitacije prema Suncu (na jednakim rastojanjima, Kor. 2, Prop. VIII), kao 1 prema 1067 i zbog toga, u konjunkciji Jupitera i Saturna, kada se rastojanje Saturna od Jupitera odnosi prema rastojanju Saturna od Sunca skoro kao 4 prema 9, gravitacija Saturna ka Jupiteru odnosiće se prema gravitaciji Saturna ka Suncu kao 81 prema 16×1067, ili kao 1 prema otprilike 211. Odatle nastaje perturbacija Saturnove orbite pri svakoj konjunkciji te planete sa Jupiterom i koja je toliko primetna da su astronomi njome bili zbunjeni. Pošto su planete u ovim konjunkcijama različito smeštene, njihova ekscentričnost je ponekad uvećana, a ponekad umanjena, afel je ponekad nošen napred, a ponekad nazad, dok se srednje kretanje naizmenično usporava i ubrzava. Ipak, ukupna greška u kretanju te planete oko Sunca, koja proizlazi iz takve sile, može se skoro izbegnuti (osim za srednje kretanje), ako smestimo najnižu žižu njene orbite u zajednički centar gravitacije Jupitera i Sunca (prema Prop. LXVII, Knjige I), i zbog toga ta greška kada je najveća jedva prelazi dva minuta, a najveća greška u srednjem kretanju jedva prelazi dva minuta godišnje. Međutim, u konjunkciji Jupitera i Saturna, ubrzavajuće sile gravitacije Sunca ka Saturnu, zatim Jupitera ka Saturnu i Jupitera ka Suncu odnose se približno kao 16, 81 i $\frac{16 \times 81 \times 3021}{25}$, ili kao 156609 i zbog toga se razlika sile gravitacije Sunca ka Saturnu i Jupitera ka Saturnu odnosi prema sili gravitacije Jupitera ka Suncu kao 65 prema 156609, ili kao 1 prema 2409. Ta razlika proporcionalna je sa najvećom Saturnovom silom kojom utiče na kretanje Jupitera i zbog toga je perturbacija Jupiterove orbite mnogo manja od Saturnove. Perturbacije ostalih orbita još su manje, osim orbite Zemlje na koju primetno utiče Mesec. Zajednički centar gravitacije Zemlje i Meseca kreće se po elipsi oko Sunca i njihova žiža je u njegovom centru, a pomoću poluprečnikâ povučenih prema Suncu opisuju površine koje su proporcionalne

sa vremenima opisivanja. Ipak, Zemlja tokom srednjeg vremena, mesečnim kretanjem kruži oko tog zajedničkog centra.

PROPOZICIJA XIV. TEOREMA XIV

Afeli i čvorovi orbita planeta su fiksni.

Afeli su nepokretni prema Prop. XI, Knjige I, a prema Prop. I iste Knjige, nepokretne su i ravni orbita. Ako su ravni fiksne, onda i čvorovi moraju biti fiksni. Istina je da neke nejednakosti mogu nastati iz međusobnog delovanja između planeta i kometa tokom njihovih revolucija, ali bi one bile toliko male da ih ovde možemo zaobići.

Kor. 1. Fiksne zvezde su nepokretne, s obzirom na to da zadržavaju isti položaj u odnosu na afele i čvorove planeta.

Kor. 2. Pošto te zvezde nisu podložne primetnim paralaksama koje proizlaze iz godišnjeg kretanja Zemlje i pošto se nalaze na izuzetno velikoj udaljenosti, onda njihove sile ne mogu porizvesti nijednu osetnu posledicu na naš sistem. Da i ne pominjemo da su fiksne zvezde slobodno rasute svugde po nebu, pa njihova suprotna privlačenja uništavaju njihove međusobne akcije (prema Prop. LXX, Knjige I).

SHOLIJA

Pošto su planete u blizini Sunca (Merkur, Venera, Zemlja i Mars) toliko male da samo malom silom mogu međusobno da deluju jedna na drugu, onda njihovi afeli i čvorovi moraju biti fiksni, osim ako na njih utiče dejstvo Jupitera i Saturna, kao i drugih viših tela. Odatle možemo zaključiti, pomoću teorije o gravitaciji, da se njihovi afeli kreću pomalo *in consequentia* u odnosu na fiksne zvezde i to u polukubnom odnosu njihovih pojedinačnih rastojanja od Sunca. Na taj način, ako se afel Marsa tokom sto godina kreće 33' 20" *in consequentia* u odnosu na fiksne zvezde, onda će se afeli Zemlje, Venere i Merkura tokom sto godina kretati napred za 17' 40", 10' 53" i 4' 16", tim redom. Ipak, ta kretanja su toliko neznatna da ih možemo zanemariti u ovoj propoziciji.

PROPOZICIJA XV. PROBLEM I

Pronaći osnovne prečnike orbita planeta.

Njih je potrebno uzeti tako da su prečnici na kub proporcionalni sa kvadratima periodičnih vremena (prema Prop. XV, Knjige I), zatim ih pojedinačno uvećati u odnosu zbira mase materije Sunca i svake planete prema prvoj od dve geometrijske sredine između tog zbira i količine materije Sunca (prema Prop. LX, Knjige I).

PROPOZICIJA XVI. PROBLEM II

Pronaći ekscentričnosti i afele planeta.

Ovaj problem je rešen pomoću Prop. XVIII, Knjige I.

PROPOZICIJA XVII. TEOREMA XV

Dnevna kretanja planeta su ravnomerna, a libracija Meseca nastaje iz njegovog dnevnog kretanja.

Ova propozicija može se dokazati pomoću prvog Zakona kretanja i Kor. 22, Prop. LXVI, Knjige I. U odnosu na fiksne zvezde, Jupiter se obrće za 91^h 56', Mars za 24^h 39', Venera za oko 23^h, Zemlja za 23^h 56', Sunce za $25\frac{1}{2}$ dana, a Mesec za 27^d 7^h 43'. Sve ovo proizlazi iz Fenomena. Sunčeva pega vraća se u isti položaj na sunčevom disku za $27\frac{1}{2}$ dana, u odnosu na Zemlju i zbog toga se, u odnosu na fiksne zvezde, Sunce obrće za oko $25\frac{1}{2}$ dana. Pošto je lunarni dan, koji nastaje iz njegove ravnomerne revolucije oko svoje ose, jednak sa naših mesec dana, tj., jednak je sa vremenom njegove periodične revolucije po svojoj orbiti, onda će ista strana Meseca uvek približno biti okrenuta prema gornjoj žiži njegove orbite i stoga će, shodno položaju žiže, pomalo odstupati prema jednoj ili drugoj strani na donjoj žiži u odnosu na Zemlju. Upravo je to libracija po dužini, a libracija po širini proizlazi iz Mesečeve širine i inklinacije njegove ose na ravan ekliptike. Takvu teoriju libracije Meseca podrobnije je objasnio, na osnovu mojih pisama, gospodin N. Merkator (Mercator) u svojoj *Astronomiji* koja je objavljena početkom 1676. godine. Činilo se da najudaljeniji Saturnov satelit kruži oko svoje ose kretanjem koje je slično kretanju Meseca i da je neprekidno okrenut prema Saturnu jednom svojom stranom, jer, tokom svake njegove revolucije oko Saturna, kad priđe istočnom delu svoje orbite, postaje jedva vidljiv, a često potpuno

nestaje, što se može desiti usled nekih tačaka na onom delu njegovog tela koji je tada okrenut prema Zemlji, kao što je Kazini uočio. Na taj način, čini se da najudaljeniji Jupiterov satelit kruži oko svoje ose sa sličnim kretanjem, jer na onom delu koji je okrenut suprotno od Jupitera on ima tačke koje uvek izgledaju kao da se nalaze na Jupiterovoj površini kad god satelit prođe između Jupitera i našeg oka.

PROPOZICIJA XVIII. TEOREMA XVI

Ose planeta manje su od prečnika povučenih normalno na te ose.

Jednaka gravitacija delova na svim stranama daće sferni oblik planetama, ukoliko su otklonjene njihove dnevne revolucije po krugu. Pri tim kružnim kretanjima delovi koji se udaljavaju od ose nastoje da se podignu oko ekvatora. Prema tome, ako je materija u tečnom stanju, ona bi svojim podizanjem prema ekvatoru uvećala prečnik, a svojim spuštanjem prema polovima, umanjila bi osu. Tako je pronađeno da je Jupiterov prečnik (saglasno sa posmatranjima astronoma) kraći između polova, nego između istoka i zapada. Na osnovu istog argumenta, ako naša Zemlja nije viša oko ekvatora, već oko polova, onda bi mora oticala sa polova i podizala bi se prema ekvatoru i sve bi potopila.

PROPOZICIJA XIX. PROBLEM III

Pronaći odnos ose planete prema prečniku koji je normalan na tu osu.

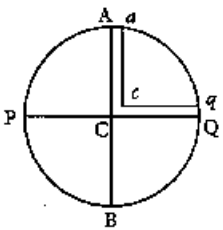
Naš zemljak, gospodin Norvud (Norwood), izmerivši rastojanje od 905751 *londonskih* stopa između Londona i Jorka i uočivši da je razlika širina 2° 28', zaključio je 1635. godine da mera jednog stepena iznosi 367196 *londonskih* stopa, tj., 57300 *pariskih* šestostopnih hvata. Gospodin Pikar (Pikart) je pri merenju luka od jednog stepena i luka meridijana u 22' 55" između Amjena i Malvoazina, pronašao da luk od jednog stepena iznosi 57060 pariskih šestostopnih hvata. Gospodin Kazini je izmerio rastojanje na meridijanu od grada Kolijur u Rusijonu do opservatorije u Parizu, a njegov sin je na to dodao rastojanje od opservatorije do tvrđave u Dankirku. Ukupno rastojanje iznosilo je $486156\frac{1}{2}$ šestostopnih hvata, a razlika širina Kolijura i Dankirka iznosila je 8° 31' $11\frac{5}{6}$".

Odatle sledi da luk od jednog stepena iznosi 57061 šestostopnih hvata. Iz tih merenja možemo zaključiti da obim Zemlje iznosi 123249600, a njen poluprečnik 19615800 *pariskih* šestostopnih hvata, pod pretpostavkom da Zemlja ima sferni oblik.

U širini Pariza teško telo pri padanju tokom jedne sekunde opisuje 15 *pariskih* stopa, 1 inč i $1\frac{7}{8}$ linija, kao što je ranije rečeno, tj., $2173\frac{7}{9}$ linija. Težina tela umanjena je težinom okolnog vazduha. Ako pretpostavimo da tako izgubljena težina iznosi $\frac{1}{11000}$ deo od ukupne težine, onda će teško telo pri padanju u vakuumu opisati visinu od 2174 linija tokom jedne sekunde vremena.

Telo tokom svakog zvezdanog dana od 23^h 56' 4" ravnomerno kruži po krugu na rastojanju od 19615800 stopa od centra i u jednoj sekundi vremena opisuje luk od 1433,46 stopa, pritom sinus versus iznosi 0,05236561 stopa ili 7,54064 linija. Prema tome, sila, pomoću koje telo pada u širini Pariza, odnosi se prema centrifugalnoj sili tela na ekvatoru, koja nastaje usled dnevnog kretanja Zemlje, kao 2174 prema 7,54064.

Centrifugalna sila tela na ekvatoru odnosi se prema centrifugalnoj sili, pomoću koje se tela direktno udaljavaju od Zemlje u širini Pariza na 48° 50' 10" kao kvadrat poluprečnika prema kvadratu kosinusa širine, tj., kao 7,54064 prema 3,267. Ako dodamo ovu silu onoj sili kojom tela padaju usled svoje težine u širini Pariza, onda će telo, koje u širini Pariza pada pomoću svoje ukupne i neumanjene sile gravitacije, u vremenu od jedne sekunde opisati 2177,267 linija ili 15 *pariskih* stopa, 1 inč i 5,267 linija. A ukupna sila gravitacije na toj širini odnosiće se prema centrifugalnoj sili tela na Zemljinom ekvatoru kao 2177,267 prema 7,54064 ili kao 289 prema 1.



Ako APBQ predstavlja oblik Zemlje, koji više nije sferan, već je stvoren rotacijom elipse oko manje ose PQ i ako ACQ*qca* predstavlja kanal ispunjen vodom, koji se prostire od pola Q*q* prema centru C*c*, a zatim do ekvatora A*a*; onda će se težina vode u kraku kanala AC*ca* odnositi prema težini vode u drugom kraku QC*cq* kao 289 prema 288, jer centrifugalna sila, koja nastaje iz kružnog kretanja, podržava i uklanja jedan od 289 delova težine (u jednom kraku), a 288 preostalih delova podržava težina u drugom kraku. Međutim (prema Kor. 2, Prop. XCI, Knjige I), ako je sva materija Zemlje ravnomerna i bez ikakvog kretanja i ako se

njena osa PQ odnosi prema prečniku AB kao 100 prema 101, onda sam pomoću računa pronašao da će se sila gravitacije u mestu Q ka Zemlji odnositi prema sili gravitacije u istom mestu Q ka sferi opisanoj oko centra C sa poluprečnikom PC ili QC, kao 126 prema 125. Na osnovu istog argumenta, sila gravitacije u mestu A ka sferoidu stvorenom rotacijom elipse APBQ oko ose AB odnosiće se prema sili gravitacije u istom tom mestu A ka sferi opisanoj oko centra C sa poluprečnikom AC, kao 125 prema 126. Sila gravitacije u mestu A ka Zemlji jeste geometrijska sredina između sila gravitacije prema sferoidu i toj sferi jer sfera je, pošto joj je prečnik PQ umanjen u odnosu 101 prema 100, promenjena u oblik Zemlje, a taj oblik je pretvoren u navedeni sferoid, ako je trećina prečnika, koji je normalan u odnosu na dva prečnika AB i PQ, umanjena u tom istom odnosu. I sila gravitacije je, u oba slučaja, umanjena približno u istoj proporciji. Prema tome, sila gravitacije u A ka sferi opisanoj oko centra C sa poluprečnikom AC odnosi se prema sili gravitacije u A ka Zemlji kao 126 prema $125\frac{1}{2}$. Sila gravitacije u Q ka sferi opisanoj oko centra C sa poluprečnikom QC odnosi se prema sili gravitacije u mestu A ka sferi opisanoj oko centra C sa poluprečnikom AC, kao što se međusobno odnose njihovi prečnici, tj. kao 100 prema 101 (prema Prop. LXXII, Knjige I). Zbog toga, ako sastavimo ta tri odnosa u jedan – odnose 126 prema 125, 126 prema $125\frac{1}{2}$ i 100 prema 101 – onda će se sila gravitacije u mestu Q ka Zemlji odnositi prema sili gravitacije u mestu A ka Zemlji kao $126 \times 126 \times 100$ prema $125 \times 125\frac{1}{2} \times 101$ ili kao 501 prema 500.

Pošto je (prema Kor. 3, Prop. XCI, Knjige I) sila gravitacije u bilo kom kraku kanala AC*ca* ili QC*cq* proporcionalna sa rastojanjem mesta od centra Zemlje i ukoliko zamislimo da su ti kraci podeljeni poprečnim, paralelnim i istostraničnim površinama na delove koji su proporcionalni sa celinama, onda će se težine bilo kog broja delova u jednom kraku AC*ca* odnositi prema težinama istog broja delova u drugom kraku kao njihove veličine i ubrzavajuće sile njihovih gravitacija zajedno, tj., kao 101 prema 100 i 500 prema 501, ili kao 505 prema 501. Prema tome, ako se centrifugalna sila svakog dela u kraku AC*ca*, koja nastaje iz dnevnog kretanja, odnosi prema težini istog dela kao 4 prema 505 i ako od težine, koja je jednaka sa 505 delova, ta centrifugalna sila oduzme 4 dela, onda će težina ostati ista u oba kraka i zbog toga će tečnost biti u ravnotežnom stanju. Ipak, centrifugalna sila svakog dela odnosi se prema težini istog tog dela kao 1 prema 289, tj., centrifugalna sila koja bi

trebalo da iznosi $\frac{4}{505}$, iznosi samo $\frac{1}{289}$. Stoga tvrdim, prema zakonu proporcije, ako centrifugalna sila $\frac{4}{505}$ čini da visina vode u kraku AC*ca* prevazilazi visinu vode u kraku QC*cq* za jednu stotinu dela od svoje ukupne visine, onda će centrifugalna sila $\frac{1}{289}$ učiniti da višak visine u kraku AC*ca* iznosi samo $\frac{1}{289}$ od visine vode u drugom kraku QC*cq*. Prema tome, prečnik Zemlje na ekvatoru odnosi se prema njenom prečniku koji prolazi od jednog pola do drugog kao 230 prema 229. Pošto, sudeći prema Pikarovim merenjima, poluprečnik Zemlje iznosi 19615800 *pariskih* stopa ili 3923,16 milja (računati da jedna milja iznosi 5000 stopa), onda će Zemlja biti viša na ekvatoru nego na polovima za 85472 stopa ili 17,16 milja. Zemljina visina će na ekvatoru iznositi oko 19658600 stopa, a na polovima 19573000 stopa.

Ako gustina i periodično vreme dnevne revolucije ostanu isti i ako je planeta veća ili manja od Zemlje, onda će odnos centrifugalne sile i sile gravitacije takođe ostati isti, baš kao i odnos prečnika između polova i prečnika na ekvatoru. Međutim, ako je dnevno kretanje ubrzano ili usporeno u bilo kojoj proporciji, onda će centrifugalna sila biti uvećana ili umanjena u proporciji koja je približno jednaka kvadratu prethodne proporcije i stoga će se i razlika prečnika uvećati ili umanjiti u takvoj proporciji kao i centrifugalna sila. Ukoliko je gustina planete uvećana ili umanjena u bilo kojoj proporciji, onda će sila gravitacije koja teži ka njoj takođe biti uvećana ili umanjena u toj istoj proporciji, a razlika prečnika će se, suprotno tome, umanjiti u proporciji u kojoj je sila gravitacije uvećana, a uvećaće se u proporciji u kojoj je sila gravitacije umanjena. Pošto se Zemlja, u odnosu na fiksne zvezde, obrće za $23^h\,56'$, a Jupiter za $9^h\,56'$ i pošto se kvadrati njihovih periodičnih vremena odnose kao 29 prema 5, a njihove gustine kao 400 prema $94\frac{1}{2}$, onda će se razlika Jupiterovih prečnika 29, 400, 1 odnositi prema njegovom najmanjem prečniku kao $\frac{29}{5} \times \frac{400}{94\frac{1}{2}} \times \frac{1}{229}$ prema 1 ili približno kao 1 prema $9\frac{1}{2}$. Prema tome, Jupiterov prečnik od istoka do zapada odnosi se prema prečniku od pola do pola približno kao $10\frac{1}{3}$ prema $9\frac{1}{3}$. Pošto njegov najveći prečnik iznosi 37", onda će njegov najmanji prečnik koji se nalazi između polova iznositi 33" 25"'. Ako tome dodamo oko 3", zbog nepravilnog prelamanja svetlosti, onda će vidljivi prečnici ove planete iznositi 40" i 36" 25"', koji se međusobno odnose približno kao $11\frac{1}{6}$ prema $10\frac{1}{6}$. Sve ovo važi u slučaju kada Jupiter ima ravnomernu gustinu. Međutim, ako je gustina prema ravni ekvatora veća nego prema polovima,

onda se njegovi prečnici mogu međusobno odnositi kao 12 prema 11, ili 13 prema 12, ili, možda, kao 14 prema 13.

Kazini je, 1691. godine, uočio da je Jupiterov prečnik koji ide od istoka prema zapadu veći za oko jednu petnaestinu od drugog prečnika. Gospodin Paund (Pound) je 1719. godine svojim teleskopom od 123 stope i izvrsnim mikrometrom izmerio Jupiterove prečnike i pronašao sledeće:

Vremena			Najveći prečnik	Najmanji prečnik	Međusobni odnos prečnika
	Dan	Sat	Deo	Deo	
Januar	28	6	13,40	12,28	12 prema 11
Mart	6	7	13,12	12,20	$13\frac{3}{4}$ prema $12\frac{3}{4}$
Mart	9	7	13,12	12,08	$12\frac{2}{3}$ prema $11\frac{2}{3}$
April	9	9	12,32	11,48	$14\frac{1}{2}$ prema $13\frac{1}{2}$

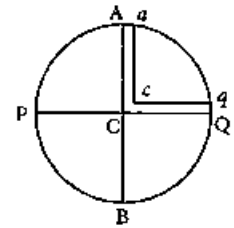
Na taj način, teorija je saglasna sa fenomenima, jer Sunčevi zraci jače zagrevaju ekvatore planeta, pa planete na ekvatorima imaju malo veću gustinu nego na polovima.

Dalje, zbog umanjenja gravitacije usled dnevne rotacije Zemlje, ona je viša na ekvatorima nego na polovima (pod pretpostavkom da je materija ravnomerno gusta), a to proizlazi iz eksperimenata sa klatnima o kojima će biti reči u narednoj Propoziciji.

PROPOZICIJA XX. PROBLEM IV

Pronaći i međusobno uporediti težine tela u različitim oblastima Zemlje.

Pošto su težine nejednakih krakova vodenog kanala ACQ*qca* jednake i pošto se težine delova, koje su proporcionalne sa kracima i koje se nalaze u njima, međusobno odnose kao težine samih krakova, pa su zbog toga međusobno jednake, onda će težine jednakih delova, koji su jednako smešteni u kracima, biti obrnuto proporcionalne sa tim kracima, tj., obrnuto proporcionalne sa 230 prema 229. Slučaj je isti za sva homogena i jednaka tela koja su jednako smeštena u kracima kanala. Njihove težine obrnuto su proporcionalne sa kracima, tj., obrnuto su proporcionalne sa rastojanjima tela od centra Zemlje. Prema tome, ako je telo smešteno na najudaljenijim delovima kanala, ili na površini Zemlje, onda će njihove međusobne težine biti obrnuto proporcionalne sa njihovim rastojanjima do centra. Na osnovu istog argumenta, težine na svim drugim mestima koja se nalaze bilo gde na površini Zemlje obrnuto su proporcionalne sa rastojanjima tih mesta od centra i zbog toga su, pod pretpostavkom da je Zemlja u obliku sferoida, date u proporciji.



Odatle nastaje teorema prema kojoj je uvećanje težine pri prolasku od ekvatora prema polovima približno proporcionalno sa sinus versusom dvostruke širine, ili, što je isto, sa kvadratom pravog sinusa širine. A približno u istoj proporciji uvećava se i površina jednog stepena širine u meridijanu. Pošto širina Pariza iznosi 48° 50', širina mesta pod ekvatorom 00° 00', a širina pod polovima 90°, zatim, ako uzmemo da je poluprečnik 10000, onda sinus versusi dvostrukog tog luka iznose 11334,00000 i 20000 i pošto se sila gravitacije na polovima odnosi prema sili gravitacije na ekvatoru kao 230 prema 229, a višak sile gravitacije na polovima prema sili gravitacije na ekvatoru kao 1 prema 229, onda će se višak sile gravitacije u širini Pariza odnositi prema sili gravitacije na ekvatoru kao $1 \times \frac{11334}{20000}$ prema 229, ili kao 5667 prema 2290000. Zbog toga će se ukupne sile gravitacije na tim mestima međusobno odnositi kao 2295667 prema 2290000. Pošto su dužine klatna koja osciluju u jednakim vremenima proporcionalne sa silama gravitacije i pošto u širini Pariza dužina klatna koje osciluje u sekundi iznosi 3 *pariske* stope i $8\frac{1}{2}$ linija, tačnije $8\frac{5}{9}$ linija zbog težine vazduha, onda će dužina klatna koje osciluje u istom vremenu pod ekvatorom biti kraća za 1,087 linija. Sličnim proračunom načinjena je sledeća tabela.

Širina mesta	Dužina klatna		Mera jednog stepena u meridijanu
Stepen	Stopa	Linija	Šestostopni hvat
0	3	7,468	56637
5	3	7,482	56642
10	3	7,526	56659
15	3	7,596	56687
20	3	7,692	56724
25	3	7,812	56769
30	3	7,948	56823
35	3	8,099	56882
40	3	8,261	56945
1	3	8,294	56958
2	3	8,327	56971
3	3	8,361	56984
4	3	8,394	56997
45	3	8,428	57010
6	3	8,461	57022
7	3	8,494	57035
8	3	8,528	57048
9	3	8,561	57061
50	3	8,594	57074
55	3	8,756	57137
60	3	8,907	57196
65	3	9,044	57250
70	3	9,162	57295
75	3	9,258	57332
80	3	9,329	57360
85	3	9,372	57377
90	3	9,387	57382

Iz ove tabele sledi da je nejednakost stepena toliko mala da se oblik Zemlje, u geografskom smislu, može smatrati sfernim, posebno ako je Zemlja malo gušća prema ravni ekvatora nego prema polovima.

Nekoliko astronoma, koji su poslati u udaljene krajeve kako bi činili astronomska posmatranja, pronašli su da se mehanički časovnici pomeraju sporije u blizini ekvatora nego u našem podneblju. Prvi je to primetio gospodin Riše (Richer) 1672. godine na ostrvu Kajena. On je tokom avgusta te godine posmatrao prelaze fiksnih zvezda preko meridijana i uočio je da njegov časovnik zaostaje za srednjim kretanjem Sunca u meri od 2' 28" dnevno. Zatim je napravio jednostavno klatno koje je oscilovalo u sekundama koje su merene izuzetnim časovnikom i posmatrao je dužinu tog jednostavnog klatna i ponavljao je merenja svake nedelje tokom narednih deset meseci. Pri povratku u Francusku, uporedio je

dužinu tog klatna sa dužinom klatna u Parizu (koja je iznosila 3 *pariske* stope i $8\frac{3}{5}$ linija) i uočio je da je ona kraća za $1\frac{1}{4}$ linije.

Kasnije je dr Halej (Halley), 1677. godine na ostrvu Sv. Jelene, uočio da njegov časovnik ide sporije na tom ostrvu nego u Londonu, ali nije označio razlike. Ipak, skratio je šipku svog časovnika za više od $\frac{1}{8}$ inča ili $1\frac{1}{2}$ linije, a da bi to postigao, stavio je drveni prsten između navrtnja i kugle, jer dužina šrafa na nižem kraju šipke nije bila dovoljna.

Onda su, 1682. godine, Varin (Varin) i De Hajs (des Hayes) otkrili da dužina jednostavnog klatna, koje osciluje u sekundama u Kraljevskoj opservatoriji u Parizu, iznosi 3 stope i $8\frac{5}{9}$ linija. Istim metodom su na ostrvu Gore pronašli da dužina izohronalnog klatna iznosi 3 stope i $6\frac{5}{9}$ linija (koja se, dakle, od prethodne razlikuje za dve linije). A tokom iste godine, na ostrvima Gvadelup i Martinik, pronašli su da je dužina izohronalnog klatna iznosila 3 stope i $6\frac{1}{2}$ linija.

Posle toga je, u julu 1697. godine, gospodin Kuple (Couplet) u Kraljevskoj opservatoriji u Parizu podesio svoj mehanički časovnik tako da je njegovo kretanje prilično dugo bilo saglasno sa srednjim kretanjem Sunca. Tokom novembra je, po dolasku u Lisabon, uvideo da se njegov časovnik kreće sporije nego ranije i to za 2' 13" na 24 časa. U martu je, stigavši u Paraibu, ustanovio da se njegov časovnik kreće sporije nego u Parizu i to za 4' 12" na 24 časa i utvrdio je da je klatno koje osciluje u sekundama u Lisabonu za $2\frac{1}{2}$, a u Paraibu za $3\frac{2}{3}$ linije kraće nego u Parizu. Bilo bi bolje da je uzeo u obzir razlike kao što su $1\frac{1}{3}$ i $2\frac{5}{9}$, jer te razlike odgovaraju razlikama vremena oscilacija tokom 2' 13" i 4' 12". Na taj način, njegova posmatranja su toliko gruba da se ne možemo pouzdati u njih.

U narednim godinama, 1699. i 1700, De Hajs je opet posetio Ameriku i na ostrvima Kajena i Granada ustanovio je da dužina klatna koje osciluje u sekundama nije bila mnogo manja od 3 stope i $6\frac{1}{2}$ linija; zatim, na ostrvu Sv. Kristofera ona je iznosila 3 stope i $6\frac{3}{4}$ linija; na ostrvu Sv. Dominga 3 stope i 7 linija.

Gospodin Foej (Feuille) je, 1704. godine, u Portobelu u Americi otkrio da je dužina klatna koje osciluje u sekundama iznosila 3 *pariske* stope i samo $5\frac{7}{12}$ linija, tj., skoro za 3 linije kraće nego u Parizu. Ipak, posmatranje je bilo pogrešno, jer je kasnije na ostrvu Martinik utvrdio da je dužina izohronalnog klatna iznosila 3 *pariske* stope i $5\frac{10}{12}$ linija.

Širina Paraiba je 6° 38' južno; širina Portobela je 9° 33' severno; širine ostrva Kajena, Gore, Gvadelup, Martinik, Granada, Sv. Kristofer i Sv. Domingo iznosile su 4° 55', 14° 40', 15° 00', 14° 44', 12° 06', 17° 19' i 19° 48', severno. A viškovi dužina klatna u Parizu u odnosu na dužine izohronalnih klatna izmerenih na tim dužinama nisu mnogo veći od onih koji su prikazani u prethodnoj tabeli na osnovu izračunavanja. Prema tome, Zemlja na ekvatoru je malo viša od onoga što je dobijeno tim računom i u centru je gušća nego u rudnicima koji se nalaze blizu površine, osim ako toplota u tropskoj oblasti nije malo produžila dužine klatna.

Gospodin Pikar je uočio da je gvozdena šipka, koja je zimi na mrazu imala dužinu od 1 stope, pri zagrevanju vatrom produžena za 1 liniju. Kasnije je De la Hire otkrio da se dužina gvozdene šipke, čija je dužina u zimskom dobu iznosila 6 stopa, uvećava za 2 linije kada se izloži letnjem suncu. U prethodnom slučaju toplota je veća nego u poslednjem. Ipak, u poslednjem slučaju toplota je veća od one na spoljašnjim delovima čovekovog tela, jer metali koji su izloženi letnjem suncu postižu značajan stepen toplote. Međutim, šipka mehaničkog sata nije nikad izložena toploti letnjeg sunca, niti može ikad postići toplotu jednaku sa onom na spoljašnjim delovima čovekovog tela i iako će dužina šipke mehaničkog sata od 3 stope zaista biti malo duža leti nego zimi, ipak će razlika jedva iznositi $\frac{1}{4}$ linije. Prema tome, ukupna razlika dužina izohronalnih klatna u različitim podnebljima ne može se pripisati različitoj toploti i ne može se pripisati greškama francuskih astronoma. Iako ne postoji savršena saglasnost unutar njihovih posmatranja, greške su toliko male da se mogu zanemariti, a svi oni se slažu u tome da su izohronalna klatna kraća na ekvatoru nego u Kraljevskoj opservatoriji u Parizu, pri čemu ta razlika nije manja od $1\frac{1}{4}$ linija niti je veća od $2\frac{2}{3}$ linija. Prema gospodinu Rišeu, ta razlika iznosila je $1\frac{1}{4}$ linija na ostrvu Kajena. Tu je razliku ispravio De Hajs, pa je ona iznosila $1\frac{1}{2}$ ili $1\frac{3}{4}$ linija. Prema manje preciznim posmatranjima drugih astronoma, ta razlika je iznosila otprilike dve linije. To neslaganje može nastati delimično usled grešaka pri posmatranjima, delimično usled različitosti unutrašnjih delova Zemlje i visina planina, a delimično usled različite toplote vazduha.

Smatram da je u Engleskoj gvozdena šipka dužine od 3 stope zimi kraća za šestinu dela linije, nego leti. Ako oduzmemo veličinu koja nastaje usled velike toplote na ekvatoru od razlike koju je

Riše uočio i koja je iznosila $1\frac{1}{4}$ linija, preostaće $1\frac{1}{12}$ linija, što se prilično slaže sa $1\frac{87}{1000}$ linija dobijenih pomoću teorije. Riše je svake nedelje u narednih deset meseci ponavljao svoja posmatranja na ostrvu Kajena i upoređivao dužine klatna koje je tamo pribeležio na gvozdenoj šipci sa dužinama posmatranim u Francuskoj. Takva marljivost i pažljivost falila je ostalim posmatračima. Ukoliko bismo se oslonili na njihova posmatranja, Zemlja bi bila viša na ekvatoru, a ne na polovima i to za oko 17 milja, kao što je i dobijeno u navedenoj teoriji.

PROPOZICIJA XXI. TEOREMA XVII

Tačke ravnodnevice se povlače, a osa Zemlje, pri nutaciji tokom svake godišnje revolucije, dvaput osciluje prema ekliptici i isto toliko puta se vraća pređašnjem položaju.

Ova propozicija sledi iz Kor. 20, Prop. LXVI, Knjige I. Ipak, takvo kretanje mora biti izuzetno malo i, svakako, jedva primetno.

PROPOZICIJA XXII. TEOREMA XVIII

Sva kretanja Meseca, kao i sve nejednakosti tih kretanja, nastaju iz principa koje smo postavili.

Iz Prop. LXV, Knjige I sledi da veće planete, dok kruže oko Sunca, mogu nositi manje planete koje kruže oko njih, kao i da se te manje planete moraju kretati po elipsama čije se žiže nalaze u centrima većih planeta. Ipak, na njihova kretanja će na nekoliko načina uticati delovanje Sunca, pa će biti izložena takvim nejednakostima koja su ista sa onima koja su uočena na Mesecu. Tako se, (prema Kor. 2, 3, 4 i 5, Prop. LXVI, Knjige I), Mesec kreće brže, a poluprečnicima povučenim prema Zemlji opisuje površinu koja je veća od one koja je proporcionalna sa vremenom i njegovom brzinom. Zatim, njegova orbita je manje zakrivljena i zbog svega toga se više približava Zemlji u sizigijama, nego u kvadraturama, osim u slučaju kada te efekte ometaju promene ekscentričnosti. Prema Kor. 9, Prop. LXVI, Knjige I, ekscentričnost je najveća kada je apogej Meseca u sizigijama, a najmanja kada je apogej u kvadraturama i na osnovu toga sledi da je, u sizigijama a ne u kvadraturama, perigej Meseca brži i nama bliži, dok je apogej Meseca sporiji i udaljeniji od nas. Zatim, apogej se kreće napred, a čvorovi

nazad, i to ne pravilnim već nejednakim kretanjem. Prema Kor. 7 i 8, Prop. LXVI, Knjige I, apogej se napred kreće brže u svojim sizigijama, a nazad sporije u kvadraturama i zbog tog viška progresa nad regresom, godišnje napreduje *in consequentia*. Suprotno tome, čvorovi su (prema Kor. 11, Prop. LXVI, Knjige I) sporiji u sizigijama, a brži krećući se nazad u kvadraturama. Zatim, najveća širina Meseca je (prema Kor. 10, Prop. LXVI, Knjige I) veća u kvadraturama Meseca nego u sizigijama. I, prema Kor. 6, Prop. LXVI, Knjige I, srednje kretanje Meseca je sporije u perihelu Zemlje nego u afelu. Upravo su to osnovne nejednakosti Meseca koje su zabeležili astronomi.

Pored toga, postoje i druge nejednakosti koje nisu uočene od strane prethodnih astronoma, a koje na takav način utiču na kretanje Meseca koji do današnjeg dana nismo uspeli da svedemo pod neko određeno pravilo. Jer, brzine ili časovna kretanja apogeja i čvorova Meseca i njihove jednačine, zatim razlika između najveće ekscentričnosti u sizigijama i najmanje ekscentričnosti u kvadraturama, kao i nejednakost koju nazivamo varijacijom, tokom godina su (prema Kor. 14, Prop. LXVI, Knjige I) uvećane ili umanjene u trostrukoj proporciji vidljivog prečnika Sunca. Pored toga, (prema Kor. 1 i 2, Leme 10, i Kor. 16, Prop. LXVI, Knjige I), varijacija je uvećana ili umanjena približno proporcionalno sa kvadratom vremena između kvadratura. Međutim, ta se nejednakost u astronomskim proračunima obično odnosila na jednačinu centra Meseca koja se koristila umesto nje.

PROPOZICIJA XXIII. PROBLEM V

Izvesti nejednaka kretanja Jupiterovih i Saturnovih satelita iz kretanja Meseca.

Iz kretanja Meseca (prema Kor. 16, Prop. LXVI, Knjige I) izvodimo odgovarajuća kretanja Jupiterovih satelita na sledeći način. Srednje kretanje čvorova najudaljenijeg Jupiterovog satelita prema srednjem kretanju čvorova Meseca nalazi se u odnosu koji je jednak proizvodu kvadrata odnosa periodičnih vremena kretanja Zemlje oko Sunca prema periodičnim vremenima kretanja Jupitera oko Sunca i odnosa periodičnog vremena kretanja satelita oko Jupitera prema periodičnom vremenu kretanja Meseca oko Zemlje. Zbog toga su ti čvorovi u periodu od sto godina nošeni 8° 24' *in antecedentia*. Srednja kretanja čvorova unutrašnjih satelita odnose se prema srednjem kretanju čvorova najudaljenijeg satelita kao njihova periodična vremena prema periodičnom vremenu prethodno pomenutog, a odatle su i poznata. A kretanje apside svakog satelita *in consequentia* odnosi se prema kretanju njihovih čvorova *in antecedentia* kao kretanje apogeja Meseca prema kretanju njegovih čvorova, prema navedenom Korolaru, a odatle je i poznato. Međutim, kretanja tako pronađenih apsida moraju se umanjiti u odnosu od 5 prema 9, ili otprilike 1 prema 2, s obzirom na uzrok čije poreklo trenutno neću objašnjavati. Najveće jednačine čvorova i apside svih satelita odnose se prema odgovarajućim najvećim jednačinama čvorova i apogeja Meseca kao kretanja čvorova i apsida satelita u vremenu jedne revolucije u prethodnim jednačinama prema kretanjima čvorova i apogeja Meseca u vremenu jedne revolucije u poslednjim jednačinama. Varijacija satelita, viđena sa Jupitera, odnosi se prema varijaciji Meseca kao ukupno kretanje njihovih čvorova s obzirom na odgovarajuća vremena tokom kojih se satelit i Mesec, posle udaljavanja, ponovo obrću oko Sunca (prema navedenom Korolaru). Zbog toga na najudaljenijem satelitu varijacija ne prelazi 5" 12"'.

PROPOZICIJA XXIV. TEOREMA XIX

Plima i oseka mora nastaje iz delovanja Sunca i Meseca.

Prema Kor. 19 i 20, Prop. LXVI, Knjige I, sledi da se voda u morima dvaput podiže i dvaput spušta svakog dana, bilo lunarnog ili solarnog, kao i da najveća visina vode u otvorenim i dubokim morima mora slediti u intervalu manjem od 6 časova posle prolaska luminara kroz meridijan mesta, kao što se i dešava u svim onim istočnim predelima Atlantika i Etiopskih mora između Francuske i Rta dobre nade, kao i na obalama Čilea i Perua na Tihom okeanu. Na svim tim obalama plima se dešava u drugom, trećem ili četvrtom času, osim na onim mestima u kojima je kretanje, koje se širi iz dubokog okeana, usporeno do petog, šestog ili sedmog časa (a čak i posle toga), usled plitkosti kanala kroz koje prolazi. Časove računam iz prolaska svakog luminara kroz meridijan mesta, kako ispod tako i iznad horizonta, a časove lunarnog dana računam kao dvadeset četvrti deo vremena tokom kog Mesec, svojim vidljivim dnevnim kretanjem, ponovo stigne do meridijana onog mesta s kog je pošao prethodnog dana. Sila Sunca ili Meseca

pri podizanju mora najveća je u konjunkciji luminara sa meridijanom mesta. Ipak, sila koja deluje na more nastavlja se i malo posle tog delovanja, pa je kasnije uvećana novom, premda manjom silom. To čini da se more podiže sve više i više, sve dok nova sila ne postane previše slaba. Tada more dostiže najveću visinu i to tokom, možda, jednog ili dva časa, dok će tamo gde je more pliće, najveću visinu dostići kroz tri ili više časova.

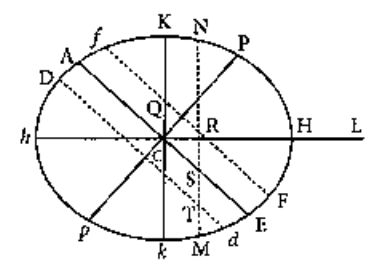
Dva luminara pobuđuju dva kretanja koja se ne čine različitim. Ipak, između njih će nastati jedno kombinovano kretanje koje se sastoji iz oba. U konjunkciji ili opoziciji luminara, njihove sile se sjedinjuju pa proizvode najveću plimu i oseku. U kvadraturama Sunca, one će podići vodu tamo gde je Mesec spušta, a spustiće je tamo gde je Mesec podiže, a iz razlike njihovih sila usledиće najmanja plima od svih. Pošto je (kao što nam iskustvo govori), sila Meseca jača od sile Sunca, onda će najveća visina vode biti približno u trećem lunarnom času. Izvan sizigija i kvadratura, najveću visinu, koju voda mora dostići jednom jedinstvenom silom Meseca u trećem lunarnom času i u trećem solarnom času jednom jedinstvenom silom Sunca, pri sjedinjenu obe sile dostići će u nekom srednjem vremenu koje je bliže trećem lunarnom času. Prema tome, pri prelasku Meseca iz sizigija prema kvadraturama, kada treći solarni čas prethodi trećem lunarnom, najveća visina vode će, takođe, prethoditi trećem lunarnom času s najvećim intervalom ne mnogo posle oktanta Meseca. Sličnim intervalima, najveća visina vode usledиće posle trećeg lunarnog časa pri prelasku Meseca iz kvadratura prema sizigijama. Sve ovo dešava se na otvorenom moru, dok u ušćima reka najveća visina nastupa kasnije.

Međutim, dejstvo luminara zavisi od njihove udaljenosti od Zemlje. Kada su na najmanjem rastojanju, njihovo dejstvo je najveće, a kada su udaljeniji, njihovo dejstvo je manje i to u trostrukoj proporciji njihovih vidljivih prečnika. Prema tome, Sunce ima najveće dejstvo tokom zime kada je u svom perigeju, pa su plime u sizigijama unekoliko veće, a one u kvadraturama unekoliko manje, nego u letnjem periodu i svakog meseca Mesec, dok je u perigeju, podiže veće plime nego u razmaku od 15 dana pre ili posle, kada je u svom apogeju. Odatle proizlazi da dve najveće plime ne slede jedna za drugom u dvema neposrednim narednim sizigijama.

Dejstvo bilo kog luminara, takođe, zavisi od deklinacije ili rastojanja od ekvatora, jer ako je luminar smešten na polu, ono će konstantno privlačiti sve delove voda bez bilo kakvog uvećanja ili

umanjenja svog dejstva i neće uzrokovati nikakvo naizmenično kretanje. Prema tome, pri prolasku luminara od ekvatora prema bilo kom polu, njihova sila će postepeno slabiti i zbog toga će proizvesti manje plime u solsticijalnim, nego u ravnodnevičkim sizigijama. Ipak, u solsticijalnim kvadraturama podignuće veće plime nego u kvadraturama oko ravnodnevica, jer sila Meseca, koji se tad nalazi na ekvatoru, u najvišem stepenu prevazilazi silu Sunca. Prema tome, najveće plime su u onim sizigijama, a najmanje u onim kvadraturama, koje se događaju oko vremena obe ravnodnevice, a najveća plima u sizigijama uvek sledi nakon najmanje plime u kvadraturama, kao što nam je poznato iz iskustva. Ipak, pošto je Sunce na manjem rastojanju od Zemlje tokom zime nego tokom leta, onda najveće i najmanje plime češće prethode prolećnoj ravnodnevici nego što slede posle nje i češće se dešavaju posle jesenje ravnodnevice nego što joj prethode.

Dejstva luminara zavise od širine mesta. Ako ApEP predstavlja Zemlju koja je pokrivena dubokim vodama, C njen centar, P i *p* njene polove, AE ekvator, P bilo koje mesto bez ekvatora, F*f* paralelu sa tim mestom, D*d* odgovarajuću paralelu na drugoj strani ekvatora, L mesto Meseca tri časa ranije, H mesto Zemlje direktno ispod Meseca, *h* mesto suprotno tome, K i *k* mesta na rastojanju od 90°; CH i C*h* najveće visine mora od centra Zemlje, CK i C*k* najmanje visine, zatim, ako je sa osama H*h* i K*k* opisana elipsa i ako je revolucijom te elipse oko duže ose H*h* oblikovan sferoid HPK*hpk*, onda će taj sferoid približno predstavljati oblik mora, dok će CF, C*f*, CD i C*d* predstavljati visine mora u mestima F*f* i D*d*. Potom, ako u navedenoj revoluciji elipse bilo koja tačka N opisuje krug NM koji seče paralele F*f* i D*d* u bilo kojim mestima R, S i T, a ekvator AE u S, onda će CN predstavljati visinu mora u svim tim mestima R, S i T koja se nalaze na tom krugu. Zbog toga će, tokom dnevne revolucije bilo kog mesta F, najveća plima biti u tom mestu F u trećem času nakon konjunkcije Meseca i meridijana iznad horizonta. Posle toga sledi najveća oseka u Q u trećem času nakon zalaska Meseca, zatim, najveća plima u trećem času nakon konjunkcije Meseca i meridijana ispod horizonta i, konačno, najveća oseka u Q u trećem času nakon izlaska Meseca,



pri čemu će kasnija plima u *f* biti manja od prethodne u F. Ukupno more podeljeno je na dve hemisferne plime od kojih je jedna u hemisferi KH*k* na severnoj strani, a druga na suprotnoj hemisferi K*hk*, koje zbog toga možemo nazvati severnom i južnom plimom. Pošto su uvek međusobno suprotne, ove plime naizmenično dolaze do meridijana svih mesta u intervalu od 12 lunarnih časova. Pošto su severne zemlje više pogođene severnim, a južne južnim plimama, odatle nastaju visine vode koje su naizmenično veće ili manje u svim mestima bez ekvatora, a u kojim svetlost izlazi i zalazi. Međutim, najveća visina je postignuta onda kada se Mesec spušta sa vrha mesta posle oko tri časa nakon konjunkcije Meseca i meridijana iznad horizonta, a kada Mesec promeni svoju deklinaciju ka drugoj strani ekvatora, onda će se ona najveća visina vode promeniti u najmanju. Najveća razlika između visina nastaće otprilike u vremenima solsticija, posebno ako je uzlazni čvor Meseca na početku znaka Ovna. Iskustvom je utvrđeno da jutarnja plima zimi prevazilazi večernju i da večernja plima leti prevazilazi jutarnju, i to za visinu od jedne stope u Plimutu, a u Bristolu za visinu od 15 inča, prema posmatranjima Kolpresa (Colepress) i Šturmija (Sturmy).

Međutim, kretanja koja smo opisali trpe svojevrsne promene iz sile reciprociteta, kojom voda, jednom kad je pomerena, nastavlja da se kreće svojom silom inercije. Zbog toga će, dok delovanje svetlosti prestaje, plime trajati tokom nekog vremena. Sila održavanja takvog kretanja umanjuje razliku naizmeničnih visina voda i čini većim one visine koje neposredno slede posle sizigija, a manjim one koje slede posle kvadratura. Odatle sledi da se naizmenične plime u Plimutu i Bristolu međusobno ne razlikuju mnogo, već samo za visinu od jedne stope ili 15 inča, kao i da najveće plime u tim lukama nisu prve, već treće posle sizigija. Pored toga, sva kretanja su usporena pri njihovom prolasku kroz plitke kanale, pa je najveća plima u pojedinim moreuzima i ušćima reka, četvrta ili peta posle sizigija.

Zatim, može se desiti da se plima širi okeanom preko različitih kanala do iste luke, kao i da kroz jedan kanal može proći brže nego kroz ostale. U tom slučaju, ista plima, koja je podeljena na dve ili više uzastopnih, može sačiniti nova kretanja različitih vrsta. Pretpostavimo da dve jednake plime teku prema istoj luci iz različitih mesta, od kojih jedna prethodi drugoj za 6 časova i pretpostavimo da se prva plima dešava u trećem času po prolasku Meseca kroz meridijan luke. Ako je Mesec pri tom svom prolasku kroz meridijan na ekvatoru, onda će se naizmenično na svakih 6 časova podignuti jednake plime koje će pratiti isti toliki broj oseka, a koje će se tako međusobno uravnotežiti da će u tom danu voda stagnirati i ostati mirna. Ako Mesec silazi sa ekvatora, onda će plime u okeanu biti naizmenično veće i manje, kao što je rečeno ranije, a odatle sledi da će dve veće i dve manje plime naizmenično prilaziti luci. Međutim, dve veće plime daju najveću visinu vode u njihovom međusobnom srednjem vremenu. Većim i manjim plimama voda se podiže do srednje visine tokom njihovog međusobnog srednjeg vremena, a u srednjem vremenu između dve manje plime voda će se podići do najmanje visine. Zbog toga će, u periodu od 24 časa, voda dostići, ne dvaput kao što je uobičajeno, već samo jednom svoju najveću visinu i samo jednom svoju najmanju visinu, a ako Mesec prilazi podignutim polovima, najveća visina nastaće u šestom ili tridesetom času posle prolaska Meseca kroz meridijan, a ukoliko Mesec promeni svoju deklinaciju, onda će se ta plima promeniti u oseku. Primer nam je predočio dr Halej na osnovu posmatranja koja je dobio od moreplovaca u Tonkinškoj luci Batšam na širini od 20° 50' severno. U toj luci je, u danu koji sledi nakon prelaska Meseca preko ekvatora, voda stagnirala, a kada se Mesec spušta prema severu, plima i oseka se dešavaju, ne dvaput kao u drugim lukama, već samo jednom dnevno, pri čemu je najveća plima tokom zalaska Meseca, a najveća oseka tokom izlaska. Plima i oseka uvećavaju se sa deklinacijom Meseca do sedmog ili osmog dana, zatim, nakon sedam ili osam dana sledi umanjenje koje je u istom stepenu s ranijim uvećanjem, a prestaje kada Mesec promeni svoju deklinaciju prelazeći preko ekvatora prema jugu. Neposredno posle toga plima je promenjena u oseku i odatle sledi da se oseka dešava pri zalasku, a plima pri izlasku Meseca sve dok Mesec, prolazeći preko ekvatora, ne promeni opet svoju deklinaciju. Postoje dva pristupa ovoj luci i okolnim kanalima, od kojih je jedan od Kineskog mora, između kopna i ostrva Luzon, a drugi od Indijskog mora, između kopna i ostrva Borneo. Bez obzira na to da li se zaista po dve plime i oseke šire preko navedenih kanala, jedna sa Indijskog mora u periodu od 12 časova, a druga sa Kineskog mora u periodu od 6 časova (koje se zbog toga dešavaju u trećem i devetom lunarnom času) i koje složene zajedno proizvode ta kretanja i bilo da postoje neke druge okolnosti u

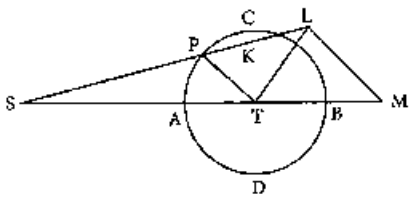
tim morima – ostavljam da se odredi pomoću posmatranja okolnih obala.

Objasnio sam uzroke kretanja Meseca i mora, a sada je podesno da tome dodam nešto što se tiče količine tih kretanja.

PROPOZICIJA XXV. PROBLEM VI

Pronaći sile kojima Sunce utiče na kretanja Meseca.

Neka S predstavlja Sunce, T Zemlju, P Mesec, a CADB orbitu Meseca. Uzmimo da je dužina SK jednaka sa ST na dužini SP i neka se SL odnosi prema SK kao SK na kvadrat prema SP na kvadrat. Zatim ćemo povući LM paralelno sa PT i ako pretpostavimo da ST ili SK predstavljaju ubrzavajuću silu gravitacije Zemlje prema Suncu, onda će SL predstavljati ubrzavajuću silu gravitacije Meseca prema Suncu. Međutim, ta sila je složena iz dve sile SM i LM, od kojih sila LM i onaj deo od SM koji je predstavljen pomoću TM, utiču na kretanje Meseca, kao što smo pokazali u Prop. LXVI, Knjige I i njenim korolarima. Imajući u vidu da se Zemlja i Mesec obrću oko zajedničkog centra gravitacije, onda će i na kretanje Zemlje oko tog centra uticati slične sile. Ipak, možemo smatrati da se zbir obe sile i kretanja odnosi na Mesec i predstaviti taj zbir sila linijama TM i ML koje su njima slične. Sila ML, u svojoj srednjoj vrednosti, prema centripetalnoj sili, kojom se Mesec može zadržati u svojoj orbiti dok kruži oko Zemlje koja miruje, na rastojanju PT, nalazi se u odnosu koji je jednak kvadratu odnosa periodičnog vremena Meseca oko Zemlje prema periodičnom vremenu Zemlje oko Sunca (prema Kor. 17, Prp. LXVI, Knjige I) tj., kvadratu odnosa $27^d\ 7^h\ 43'$ prema $365^d\ 6^h\ 9'$ ili kao 1000 prema 178725, tj., kao 1 prema $178\frac{29}{40}$. Međutim, u četvrtoj Propoziciji ove knjige pronašli smo da srednje rastojanje između Zemlje i Meseca, ukoliko se obrću oko zajedničkog centra gravitacije, približno iznosi $60\frac{1}{2}$ srednjih poluprečnika Zemlje. Sila, kojom bi Mesec mogao nastaviti kruženje u svojoj orbiti oko Zemlje koja miruje na rastojanju PT od $60\frac{1}{2}$ poluprečnika Zemlje, odnosi se prema sili, kojom bi Mesec mogao kružiti u istom vremenu na rastojanju od 60 poluprečnika, kao $60\frac{1}{2}$ prema 60, a ta sila se prema sili gravitacije od-

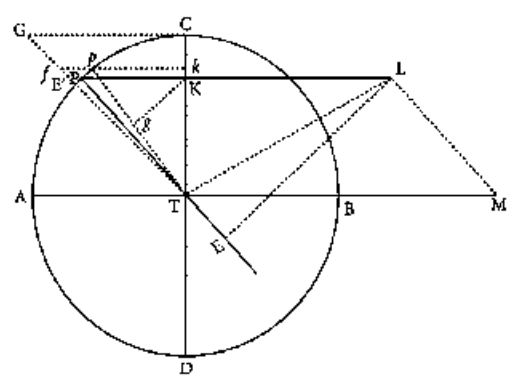


nosi približno kao 1 prema 60 × 60. Prema tome, srednja sila ML se prema sili gravitacije na površini Zemlje odnosi kao $1 \times 60\frac{1}{2}$ prema $60 \times 60 \times 60 \times 178\frac{29}{40}$, tj., kao 1 prema 638092,6. Iz proporcije linija TM i ML poznata je i sila TM i upravo su to sile kojima Sunce utiče na kretanja Meseca. Q.E.I.

PROPOZICIJA XXVI. PROBLEM VII

Pronaći časovno uvećanje površine koju Mesec opisuje po kružnoj orbiti pomoću poluprečnika povučenim ka Zemlji.

Ranije smo pokazali da je površina koju Mesec opisuje poluprečnikom povučenim ka Zemlji proporcionalna s vremenom, osim u meri u kojoj delovanje Sunca utiče na kretanje Meseca. Ovde predlažem da se istraži nejednakost momenta ili časovnog uvećanja one površine ili kretanja na koje deluje Sunce. Da bismo pojednostavili jednačinu, pretpostavićemo da je orbita Meseca kružna i zanemarićemo sve nejednakosti osim one koju trenutno razmatramo. Usled izuzetne udaljenosti Sunca, pretpostavićemo da su linije SP i ST paralelne. Na taj način, sila LM uvek će biti svedena na svoju srednju vrednost TP, a sila TM na svoju srednju vrednost 3PK. Te sile (prema Kor. 2, Zakona kretanja) sačinjavaju silu TL, a ta sila je, ako spustimo normalu LE na poluprečnik TP, razložena na sile TE i EL, od kojih sila TE, koja konstantno deluje u pravcu poluprečnika TP, niti ubrzava niti usporava opisivanje površine TPC tim poluprečnikom TP, dok sila EL, koja deluje na poluprečnik TP u normalnom pravcu, ubrzava ili usporava opisivanje površine u proporciji u kojoj ubrzava ili usporava Mesec. To ubrzanje Meseca, pri prelasku iz kvadrature C ka konjunkciji A, u svakom momentu vremena proporcionalno je sa ubrzavajućom silom EL, tj., sa $\frac{3PK \times TK}{TP}$. Neka je vreme predstavljeno srednjim kretanjem Meseca TP, ili, što je isto, uglom CTP, a čak i lukom CP. Pod pravim uglovima na



CT podignućemo dužinu CG jednaku sa CT i ako pretpostavimo da je četvrtina obima kruga AC podeljena na beskonačni broj jednakih delova P*p*, onda ti delovi mogu predstavljati isti beskonačni broj jednakih delova vremena. Spustimo *pk* normalno na CT i ako povučemo TG tako da seče KP i *kp* produženih do F i *f*, onda će FK biti jednako sa TK, a K*k* će se prema PK odnositi kao P*p* prema T*p*, tj., biće u datoj proporciji i zbog toga će FK × K*k* biti proporcionalno sa $\frac{3PK \times TK}{TP}$, tj., sa EL. Slaganjem dobijamo da je ukupna površina GCKF proporcionalna sa zbirom svih sila EL koje deluju na Mesec u ukupnom vremenu CP, a zbog toga je proporcionalna sa brzinom koja je stvorena tim zbirom, tj., sa ubrzanjem opisivanja površine CTP, ili sa uvećanjem momenta. Sila, kojom Mesec u svom periodičnom vremenu CADB od $27^{d}\ 7^{h}\ 43'$ može nastaviti da se okreće oko Zemlje koja miruje na rastojanju TP, uzrokovaće da telo koje pada u vremenu CT opisuje dužinu $\frac{1}{2}$CT i da istovremeno zadobije brzinu koja je jednaka sa onom kojom se Mesec kreće po svojoj orbiti (prema Kor. 9, Prop. IV, Knjige I). Međutim, pošto je normala K*d*, povučena na TP, u oktantima jednaka sa trećinom od EL i sa polovinom od TP, ili ML, onda će sila EL u oktantima, gde je najjača, prevazići silu ML u odnosu od 3 prema 2 i zbog toga će se prema onoj sili kojom Mesec u svom periodičnom vremenu može da se okreće oko Zemlje koja miruje odnositi kao 100 prema $\frac{2}{3}$ × 17872$\frac{1}{2}$, tj., kao 100 prema 11915, a u vremenu CT stvoriće brzinu koja je jednaka sa $\frac{100}{11915}$ delova brzine Meseca. Ipak, u vremenu CPA, stvoriće veću brzinu i to u odnosu od CA prema CT ili TP. Neka je najjača sila EL u oktantima predstavljena površinom FK × K*k*, ili pravougaonikom $\frac{1}{2}$TP × P*p* koji je jednak s tom površinom – onda će se brzina koju ta najjača sila može da proizvede u bilo kom vremenu CP odnositi prema brzini koju bilo koja druga slabija sila EL može proizvesti u istom vremenu kao pravougaonik $\frac{1}{2}$TP × CP prema površini KCGF. Ipak, brzine stvorene u ukupnom vremenu CPA međusobno će se odnositi kao pravougaonik $\frac{1}{2}$TP × CA prema trouglu TCG, ili kao četvrtina obima kruga CA prema poluprečniku TP i stoga će brzina stvorena u ukupnom vremenu CPA iznositi $\frac{100}{11915}$ delova brzine Meseca. Ovoj brzini Meseca, koja je proporcionalna sa srednjim momentom površine (pod pretpostavkom da je srednji moment izražen brojem 11915), dodaćemo ili oduzeti polovinu druge brzine i onda će zbir 11915 + 50, ili 11965, predstavljati najveći moment površine u sizigijumu A, a razlika 11915 – 50, ili 11865, najmanji

moment u kvadraturama. Prema tome, površine koje su u istim vremenima opisane u sizigijama i kvadraturama međusobno se odnose kao 11965 prema 11865. Stoga, ako najmanjem momentu 11865 dodamo moment koji će se prema 100, tj., razlici dva prethodna momenta, odnositi kao trapezoid FKCG prema trouglu TCG, ili, što je isto, kao kvadrat sinusa PK prema kvadratu poluprečnika TP (tj. kao P*d* prema TP), onda će zbir predstavljati moment površine kada je Mesec u bilo kom središnjem mestu P.

Međutim, sve ovo zasniva se na hipotezi da su Sunce i Zemlja u stanju mirovanja i da je sinodička revolucija Meseca završena za $27^{d}\ 7^{h}\ 43'$. Ipak, pošto je sinodički period Meseca zapravo $29^{d}\ 12^{h}\ 44'$, onda se uvećanje momenata mora povećati proporcionalno s vremenom, tj., kao 1080853 prema 1000000. Na osnovu toga, ukupno uvećanje koje je iznosilo $\frac{100}{11915}$ delova srednjeg momenta, sada će iznositi $\frac{100}{11023}$ delova i zbog toga će se moment površine u kvadraturama Meseca odnositi prema momentu u sizigijumu kao 11023 – 50 prema 11023 + 50, ili kao 10973 prema 11073, a prema onom momentu kada je Mesec u bilo kom središnjem mestu P, odnosiće se kao 10973 prema 10973 + P*d*, pod pretpostavkom da je TP = 100.

Prema tome, površina koju Mesec, poluprečnikom povučenim ka Zemlji, opisuje u nekoliko malih i jednakih delova vremena, približno je proporcionalna sa zbirom A broja 219,46 i sinus versusa dvostrukog rastojanja Meseca od najbliže kvadrature, pod pretpostavkom da je poluprečnik kruga jednak jedinici. Sve to se dešava kada je varijacija u oktantima u svojoj srednjoj vrednosti. Ipak, ako je varijacija veća ili manja, onda se i sinus versus mora uvećati ili umanjiti u toj proporciji.

PROPOZICIJA XXVII. PROBLEM VIII

Iz časovnog kretanja Meseca pronaći njegovo rastojanje do Zemlje.

Površina koju Mesec, poluprečnikom povučenim ka Zemlji, opisuje u svakom momentu vremena proporcionalna je sa proizvodom časovnog kretanja Meseca i kvadratom rastojanja Meseca od Zemlje. Zbog toga je rastojanje Meseca od Zemlje direktno proporcionalno sa kvadratnim korenom iz te površine, a obrnuto proporcionalno sa kvadratnim korenom iz časovnog kretanja.

Kor. 1. Na takav način dobijen je vidljivi prečnik Meseca, jer je on obrnuto proporcionalan sa rastojanjem Meseca od Zemlje.

Neka astronomi isprobaju koliko se precizno ovo pravilo slaže sa fenomenom.

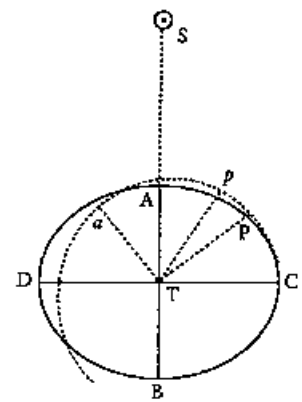
Kor. 2. Na takav način se, takođe, iz fenomena može preciznije definisati orbita Meseca nego što je to do sada bio slučaj.

PROPOZICIJA XXVIII. PROBLEM IX

Pronaći prečnike orbite po kojima će se Mesec kretati bez ekscentriciteta.

Zakrivljenje orbite koju telo opisuje, ako je privučeno linijama normalnim na orbitu, direktno je proporcionalno sa silom privlačenja, a obrnuto sa kvadratom brzine. Procenjujem da se zakrivljenja linija međusobno nalaze u odnosu sinusa ili tangenti njihovih dodirnih uglova prema jednakim polurečnicima, pod pretpostavkom da su ti poluprečnici beskonačno umanjeni. Međutim, privlačenje Meseca prema Zemlji u sizigijama jednako je višku njegove gravitacije prema Zemlji u odnosu na silu Sunca 2PK (videti sliku Prop. XXV), kojom sila ubrzavajuće gravitacije Meseca prema Suncu ili prevazilazi ili ne dostiže ubrzavajuću gravitaciju Zemlje prema Suncu. U kvadraturama je privlačenje jednako zbiru gravitacije Meseca prema Zemlji, i sili Sunca KT, kojom je Mesec privučen prema Zemlji. Ako umesto $\frac{AT + CT}{2}$ stavimo N, onda će ta privlačenja biti približno proporcionalna sa $\frac{178725}{AT^2} - \frac{2000}{CT \times N}$ i sa $\frac{178725}{CT^2} + \frac{1000}{AT \times N}$, ili sa $178725N \times CT^2 - 2000AT^2 \times CT$ i sa $178725N \times AT^2 + 1000CT^2 \times AT$. Ako je ubrzavajuća gravitacija Meseca prema Zemlji predstavljena brojem 178725, onda će srednja sila ML, koja je u kvadraturama PT ili TK i koja povlači Mesec ka Zemlji, iznositi 1000, a srednja sila TM u sizigijama iznosiće 3000 i ako od nje oduzmemo srednju silu ML, preostaće sila koja iznosi 2000 i kojom se Mesec u sizigijama povlači ka Zemlji, a koju smo ranije iznačili sa 2PK. Odnos brzine Meseca u sizigijama A i B prema brzini u kvadraturama C i D jednak je proizvodu odnosa CT prema AT i momenta površine, koju Mesec poluprečnikom povučenim ka Zemlji opisuje u sizigijama, prema momentu te površine opisane u kvadraturama, tj., jednak je odnosu 11073CT prema 10973AT. Ako podelimo odnos ovih veličina sa kvadratom prethodnog odnosa, onda će se zakrivljenje orbite Meseca u sizigijama odnositi prema zakrivljenju u kvadraturama kao $120406729 \times 178725AT^2 \times CT^2 \times N - 120406729 \times 2000AT^4 \times CT$ prema $122611329 \times 178725AT^2 \times CT^2 \times N + 122611329 \times 1000CT^4 \times AT$, tj., kao $2151969AT \times CT \times N - 24081AT^3$ prema $2191371AT \times CT \times N + 12261CT^3$.

Pošto je oblik Mesečeve orbite nepoznat, pretpostavićemo da je orbita elipsa DBCA i da je u njenom centru smeštena Zemlja, kao i da se najveća osa DC nalazi između kvadratura, a najmanja između sizigija. Pošto ravan ove elipse kruži oko Zemlje ugaonim kretanjem, a pošto bi orbita, čiju zakrivljenost sada istražujemo, trebalo da se opiše u ravni bez takvog kretanja, onda ćemo uzeti u obzir onu figuru koju Mesec opisuje u nepokretnoj ravni dok kruži po toj elipsi, tj., figuru C*pa*. Nekoliko tačaka *p* te figure pronađene su uzimajući bilo koju tačku P na elipsi koja može predstavljati položaj Meseca. Povući ćemo T*p* jednako sa TP na takav način da ugao PT*p* može biti jednak sa vidljivim kretanjem Sunca u vremenu poslednje kvadrature u C, ili, što je isto, tako da se ugao CT*p* može odnositi prema uglu CTP kao vreme sinodičke revolucije Meseca prema vremenu njegove periodične revolucije, tj., kao $29^d\ 12^h\ 44'$ prema $27^d\ 7^h\ 43'$. Prema tome, ako uzmemo da se ugao CT*a* nalazi u tom odnosu prema pravom uglu CTA i ako je T*a* jednake dužine sa TA, onda ćemo dobiti da je *a* donja, a C gornja apsida orbite *Cpa*. Međutim, izračunavanjem sam pronašao da se razlika između zakrivljenja ove orbite *Cpa* na vrhu *a* i zakrivljenja kruga opisanog oko centra T sa intervalom TA, prema razlici između zakrivljenja elipse u vrhu A i zakrivljenja istog tog kruga, nalazi u odnosu koji je jednak kvadratu odnosa ugla CTP prema uglu CT*p*, zatim, da se zakrivljenje elipse u A prema zakrivljenju tog kruga nalazi u odnosu koji je jednak kvadratu odnosa TA prema TC, kao i da se zakrivljenje tog kruga prema zakrivljenju kruga opisanog oko centra T sa intervalom TC odnosi kao TC prema TA. Dalje, zakrivljenje ovog poslednjeg kruga se prema zakrivljenju elipse u C nalazi u odnosu koji je jednak kvadratu odnosa TA prema TC, kao i da se razlika između zakrivljenja elipse u vrhu C i zakrivljenja ovog poslednjeg kruga prema razlici između zakrivljenja figure C*pa* na vrhu C i zakrivljenja tog istog poslednjeg kruga nalaze u odnosu koji je jednak kvadratu odnosa ugla CT*p* prema uglu CTP. Svi ovi odnosi lako se mogu izvesti iz sinusa dodirnih uglova i iz



razlike tih uglova. Međutim, međusobno upoređujući te odnose pronaći ćemo da se zakrivljenje figure C*pa* u *a* odnosi prema njenom zakrivljenju u C kao $AT^3 - \frac{16824}{100000} CT^2 \times AT$ prema $CT^3 + \frac{16824}{100000} AT^2 \times CT$, gde broj $\frac{16824}{100000}$ predstavlja odnos razlike kvadrata uglova CTP i CT*p* prema kvadratu manjeg ugla CTP, ili, što je isto, odnos razlike kvadrata vremena $27^d\ 7^h\ 43'$ i $29^d\ 12^h\ 44'$ prema kvadratu vremena $27^d\ 7^h\ 43'$.

Prema tome, pošto *a* predstavlja sizigijum Meseca, a C njegovu kvadraturu, onda pronađeni odnos mora biti isti onom odnosu zakrivljenja Mesečeve orbite u sizigijama prema njegovom zakrivljenju u kvadraturama, koji je ranije pronađen. Da bismo pronašli odnos CT prema AT pomnožićemo krajnje i srednje članove proporcije koji kada se primene na AT × CT postaju $2062{,}79CT^4 - 2151969N \times CT^3 + 368676N \times AT \times CT^2 + 36342AT^2 \times CT^2 - 362047N \times AT^2 \times CT + 2191371N \times AT^3 + 4051{,}4AT^4 = 0$. Ako umesto poluzbira N članova AT i CT stavimo 1, a *x* umesto njihove polurazlike, onda će CT biti = 1 + *x*, a AT = 1 − *x*. Kada zamenimo te vrednosti u prethodnim jednačinama i njihovim rešenjima, dobićemo da je *x* = 0,00719, a odatle sledi da je poluprečnik CT = 1,00719, a poluprečnik AT = 0,99281, čiji su brojevi približno proporcionalni sa $70\frac{1}{24}$ i $69\frac{1}{24}$. Dakle, rastojanje Meseca od Zemlje u sizigijama odnosi se prema rastojanju u kvadraturama (ne razmatrajući pritom ekscentricitet) kao $69\frac{1}{24}$ prema $70\frac{1}{24}$, ili, zaokruženo, kao 69 prema 70.

PROPOZICIJA XXIX. PROBLEM X

Pronaći varijaciju Meseca.

Ova nejednakost delimično proizlazi od eliptičnog oblika Mesečeve orbite, a delimično od nejednakosti momenata površine koju Mesec opisuje povučenim poluprečnicima prema Zemlji. Ako Mesec P kruži po elipsi DBCA oko Zemlje koja se nalazi u stanju mirovanja u centru elipse, zatim ako poluprečnikom TP povučenim prema Zemlji opisuje površinu koja je proporcionalna sa vremenom opisivanja; i ako se najveći poluprečnik CT elipse odnosi prema najmanjem TA kao 70 prema 69, onda će se tangenta ugla CTP odnositi prema tangenti ugla srednjeg kretanja, izračunatog iz kvadrature C, kao poluprečnik TA elipse prema njenom poluprečniku TC, ili kao 69 prema 70. Ipak, opisivanje površine CTP, pri napredovanju Meseca iz kvadrature prema sizigijumu, moraće

da se ubrza na takav način da se moment površine u Mesečevom sizigijumu može odnositi prema njegovom momentu u kvadraturi kao 11073 prema 10973, kao i da višak momenta u bilo kom središnjem mestu P u odnosu na moment u kvadraturi može biti proporcionalan sa kvadratom sinusa ugla CTP, a to možemo dovoljno precizno dobiti ako umanjimo tangentu ugla CTP za odnos kvadratnog korena iz broja 10973 prema kvadratnom korenu iz broja 11073, tj., za odnos broja 68,6877 prema broju 69. Tada će se tangenta ugla CTP odnositi prema tangenti srednjeg kretanja kao 68,6877 prema 70, a ugao CTP u oktantima, gde srednje kretanje iznosi 45°, biće jednak sa 44° 27' 28". Kada taj iznos oduzmemo od 45°, tj., od ugla srednjeg kretanja, dobićemo najveću varijaciju 32' 32". A to bi se i desilo kada bi Mesec, pri prelasku iz kvadrature prema sizigijumu, opisao ugao CTA od samo 90°. Usled kretanja Zemlje, prema kojoj se Sunce vidljivo premešta *in consequentia*, Mesec će, pre nego što sustigne Sunce, opisati ugao CT*a* koji je veći od pravog ugla u odnosu vremena sinodičke revolucije Meseca prema vremenu njegove periodične revolucije, tj., u odnosu $29^d\ 12^h\ 44'$ prema $27^d\ 7^h\ 43'$. Odatle sledi da se svi uglovi oko centra T uvećavaju u istoj toj proporciji, a najveća varijacija, koja je inače iznosila 32' 32", kada se uveća u toj proporciji iznosiće 35' 10".

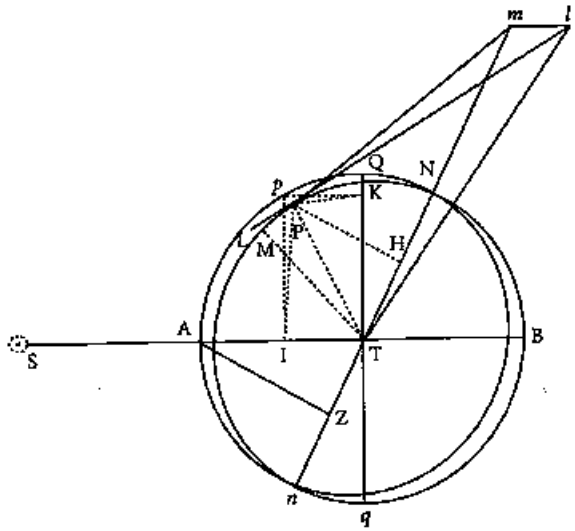
To je njegova veličina na srednjem rastojanju Sunca od Zemlje, zanemarujući razlike koje mogu nastati usled zakrivljenja *orbis magnusa* i jačeg delovanja Sunca na Mesec kada je on srpast i mlad nego kada je izbočen i pun. Na drugim rastojanjima Sunca od Zemlje, najveća varijacija se nalazi u odnosu koji se sastoji iz kvadrata odnosa vremena sinodičke revolucije Meseca (čije je godišnje vreme poznato) direktno i odnosa rastojanja Sunca od Zemlje na kub, obrnuto. Prema tome, u apogeju Sunca, najveća varijacija iznosi 33' 14", a u perigeju 37' 11", ako se ekscentricitet Sunca odnosi prema poprečnom polupečniku *orbis magnusa* kao $16\frac{15}{16}$ prema 1000.

Do sada smo istražili varijaciju u orbiti koja nije ekscentrična i u kojoj je Mesec u svojim oktantima uvek na srednjem rastojanju od Zemlje. Ako je Mesec, usled ekscentriciteta, više ili manje udaljen od Zemlje nego kada se nalazi na toj orbiti, onda varijacija može biti nešto veća ili nešto manja nego što iznosi u ovom pravilu. Ipak, ostavljam astronomima da na osnovu fenomena odrede taj višak ili manjak.

PROPOZICIJA XXX. PROBLEM XI

Pronaći časovna kretanja čvorova Meseca po kružnoj orbiti.

Neka S predstavlja Sunce, T Zemlju, P Mesec, NP*n* orbitu Meseca, N*pn* ortografsku projekciju orbite na ravan ekliptike, N i *n* čvorove, *n*TN*m* liniju čvorova beskonačno produženu, PI i PK normale na linijama ST i Q*q*, P*p* normalu na ravan ekliptike, A i B Mesečeve sizigije u ravni ekliptike, AZ normalu koja pada na N*n* liniju čvorova, Q i *q* kvadrature Meseca u ravni ekliptike, a *p*K normalu na liniji Q*q* koja se nalazi između kvadratura. Sila Sunca koja utiče na kretanje Meseca je dvostruka (prema Prop. XXV), od kojih je jedna proporcionalna sa linijom LA, a druga sa



linijom MT (u shemi te propozicije). Mesec je prvom silom povučen prema Zemlji, a potonjom prema Suncu, u pravcu paralelnom sa pravom linijom ST koja spaja Zemlju i Sunce. Prva sila LM deluje u pravcu ravni Mesečeve orbite i zbog toga ne utiče na njegov položaj, pa se zbog toga može zanemariti, a druga sila MT, koja utiče na ravan Mesečeve orbite, ista je sa silom 3PK ili 3IT. Ta sila se (prema Prop. XXV) odnosi prema onoj sili, kojom Mesec u svom periodičnom vremenu može ravnomerno kružiti oko Zemlje koja je u stanju mirovanja, kao 3IT prema poluprečniku kruga pomnoženim sa brojem 178,725, ili kao IT prema poluprečniku kruga pomnoženim sa 59,575. U ovom računu, kao i u onima što slede,

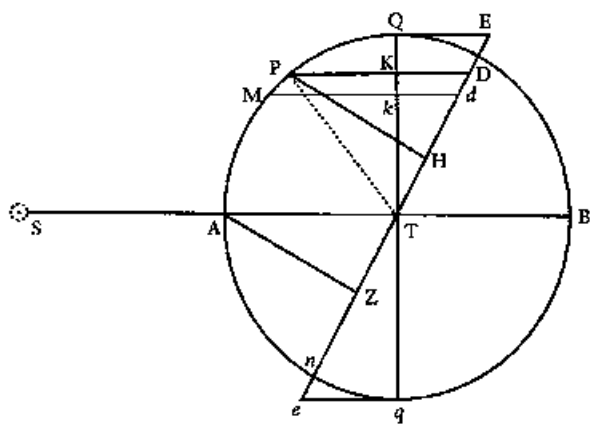
podrazumevao sam da su sve linije povučene od Meseca prema Suncu paralelne sa linijom koja spaja Zemlju i Sunce, jer svaka inklinacija u onoj meri koliko umanjuje sva dejstva u jednom slučaju, u drugom će ih u skoro istoj meri uvećati. Mi sada istražujemo srednja kretanja čvorova, zanemarujući pritom takve trivijalnosti koje samo služe tome da dodatno zakomplikuju račun.

Pretpostavimo da PM predstavlja luk koji Mesec opisuje u najmanjem momentu vremena, a ML malu liniju, čiju će polovinu opisati Mesec tokom istog vremena sa impulsom navedene sile 3IT, a zatim ćemo spojiti PL i MP i produžićemo ih do *m* i *l* gde seku ravan ekliptike, a na T*m* ćemo pustiti normalu PH. Pošto je prava linija ML paralelna sa ravni ekliptike pa stoga nikad ne može sresti pravu liniju *ml* koja leži u toj ravni, pri čemu obe te prave linije leže u jednoj zajedničkoj ravni LMP*ml*, onda će one biti paralelne i zbog toga će trouglovi LMP i *lm*P biti slični. I pošto se MP*m* nalazi u ravni orbite po kojoj se Mesec kretao u mestu P, onda će tačka *m* pasti na liniju N*n* koja prolazi kroz čvorove N i *n* te orbite. Ukoliko sila, kojom je stvorena polovina linije LM u celini i momentalno deluje na tačku P, onda će stvoriti celu liniju i uzrokovaće da se Mesec kreće po luku čija je tetiva LP, tj., premestiće Mesec iz ravni MP*m*T u ravan LP*l*T i zbog toga će ugaono kretanje čvorova stvorenih tom silom biti jednako sa uglom *m*T*l*. Pošto se *ml* prema *m*P odnosi kao ML prema MP i pošto je MP poznata iz datog vremena, onda će *ml* biti proporcionalna sa pravougaonikom ML × *m*P, tj., sa pravougaonikom IT × *m*P. I ako je T*ml* prav ugao, onda će ugao *m*T*l* biti proporcionalan sa $\frac{ml}{\mathrm{T}m}$, a zbog toga i sa $\frac{\mathrm{IT} \times \mathrm{P}m}{\mathrm{T}m}$, tj., sa $\frac{\mathrm{IT} \times \mathrm{PH}}{\mathrm{TP}}$, pošto su T*m* i *m*P, kao i TP i PH proporcionalni i prema tome, pošto je TP poznato, sa IT × PH. Međutim, ako su uglovi T*ml* ili STN oštri, onda će ugao *m*T*l* biti još manji u odnosu sinusa ugla STN prema poluprečniku, ili u odnosu AZ prema AT. Odatle sledi da je brzina čvorova proporcionalna sa IT × PH × AZ, ili sa proizvodom sinusa uglova TPI, PTN i STN.

Ako su ti uglovi pravi, kao što se dešava kada su čvorovi u kvadraturama, a Mesec u sizigijumu, onda će mala linija *ml* biti premeštena na beskonačnu udaljenost, a ugao *m*T*l* postaće jednak sa uglom *m*P*l*. U tom slučaju ugao *m*P*l* odnosi se prema uglu PTM, kojeg u istom vremenu i sa svojim vidljivim kretanjem opisuje Mesec oko Zemlje, kao 1 prema 59,575. Jer, ugao *m*P*l* jednak je sa uglom LPM, tj., sa uglom Mesečevog odstupanja sa pravolinijske putanje, kojeg bi stvorila navedena sila Sunca 3IT u datom vremenu,

ukoliko bi tada gravitacija Meseca prestala. Ugao PTM je jednak sa uglom Mesečevog odstupanja sa pravolinijske putanje, koji bi stvorila u istom vremenu sila kojom je Mesec zadržan u svojoj orbiti, ukoliko bi tada sila Sunca 3IT prestala. Te sile se međusobno odnose (kao što smo ranije pokazali) kao 1 prema 59,575. Prema tome, pošto časovno kretanje Meseca (u odnosu na fiksne zvezde) iznosi 32' 56" 27"' $12\frac{1}{2}^{IV}$, onda će časovno kretanje čvorova u ovom slučaju iznositi 33" 10"' 33^{IV} 12^{V}. Ipak, u svim drugim slučajevima, časovno kretanje odnosiće se prema 33" 10"' 33^{IV} 12^{V} kao proizvod sinusa uglova TPI, PTN i STN (tj., rastojanja Meseca od kvadrature, Meseca od čvorova, i čvorova od Sunca) prema kubnom poluprečniku. I koliko često je sinus ugla promenjen iz pozitivnog u negativni i iz negativnog u pozitivni, toliko često se regresivno kretanje mora promeniti u progresivno, a progresivno u regresivno. Odatle sledi da je kretanje čvorova progresivno onoliko često koliko se Mesec nalazi između bilo koje kvadrature i čvora koji je bliži toj kvadraturi. U drugim slučajevima njihovo kretanje je retrogradno i usled viška regresivnog kretanja u odnosu na progresivno, čvorovi se mesečno premeštaju *in antecedentia*.

Kor. 1. Ako iz krajnjih tačaka P i M, najmanjeg luka PM, na liniji Q*q*, koja spaja kvadrature, spustimo normale PK i M*k* koje ćemo produžiti sve dok ne preseku liniju čvorova N*n* u D i *d*, onda će časovno kretanje čvorova biti proporcionalno sa površinom MPD*d* i kvadratom linije AZ, zajedno. Neka su PK, PH i AZ tri navedena sinusa, tj., PK sinus rastojanja Meseca od kvadrature, PH sinus rastojanja Meseca od čvorova, a AZ sinus rastojanja čvorova od Sunca, onda će brzina čvorova biti proporcionalna sa proizvo-



dom PK × PH × AZ. Ipak, pošto se PT prema PM odnosi kao PM prema K*k* i pošto su zbog toga PT i PTA poznati, onda će K*k* biti proporcionalno sa PK. Takođe, pošto se AT prema PD odnosi kao AZ prema PH, onda će PH biti proporcionalno sa pravougaonikom PD × Z, a kada složimo te proporcije, dobićemo da je PK × PH proporcionalno sa proizvodom K*k* × PD × AZ, a PK × PH × AZ sa K*k* × PD × AZ^2, tj., sa proizvodom površine PD*d*M i AZ^2. Q.E.D.

Kor. 2. U bilo kom datom položaju čvorova, njihovo časovno kretanje odnosi se prema časovnom kretanju u Mesečevim sizigijama, tj. sa 16" 35"' 16^{IV} 36^{V}, kao kvadrat sinusa rastojanja čvorova od sizigija prema kvadratu poluprečnika, ili kao AZ^2 prema AT^2. Jer, ako Mesec s ravnomernim kretanjem opisuje polukrug Q*Aq*, onda će zbir svih površina PD*d*M, pri Mesečevom prolasku iz Q ka M, sačiniti površinu QM*d*E, koja je ograničena tangentom QE kruga; a u vremenu tokom kog Mesec stiže do tačke *n*, taj zbir će sačiniti ukupnu površinu EQA*n* koja je opisana linijom PD. Međutim, kada Mesec nastavi da se kreće od *n* prema *q*, onda će linija PD pasti izvan kruga i opisaće površinu *nqe*, koja je oganičena tangentom *qe* kruga. Pošto su se čvorovi ranije kretali progresivno, a sada regresivno, ta površina se mora oduzeti od prethodne i pošto je ona jednaka sa površinom QEN, onda će preostati polukrug NQA*n*. Prema tome, dok Mesec opisuje polukrug, zbir svih površina PD*d*M predstavljaće površinu tog polukruga, a dok Mesec opisuje potpuni krug, zbir tih površina predstavljaće površinu celog kruga. Međutim, kada je Mesec u sizigijama, površina PD*d*M jednaka je sa proizvodom pravougaonika luka PM i poluprečnika PT, a u vremenu tokom kog Mesec opisuje potpuni krug, zbir svih površina, od kojih je svaka jednaka sa tom površinom, jednak je površini pravougaonika čije su stranice ukupan obim i poluprečnik kruga i pošto je taj pravougaonik dvostruke površine kruga, on će biti jednak dvostrukoj vrednosti prethodnog zbira. Prema tome, ako bi se čvorovi kretali ravnomerno takvom brzinom koju su zadobili u Mesečevim sizigijama, oni bi opisali prostor koji je dvostruko veći od onog koji bi uistinu opisali i zbog toga je srednje kretanje, kojim bi, ako bi se kretali ravnomerno, opisali isti prostor sa onim koji bi uistinu opisali nejednakim kretanjem, jednako sa polovinom onog kretanja koji imaju u Mesečevim sizigijama. Zbog toga, ako su čvorovi u kvadraturama, njihovo najveće časovno kretanje iznosi 33" 10"' 33^{IV} 12^{V}, dok će u tom slučaju njihovo srednje časovno kretanje iznositi 16" 35"' 16^{IV} 36^{V}. Pošto je

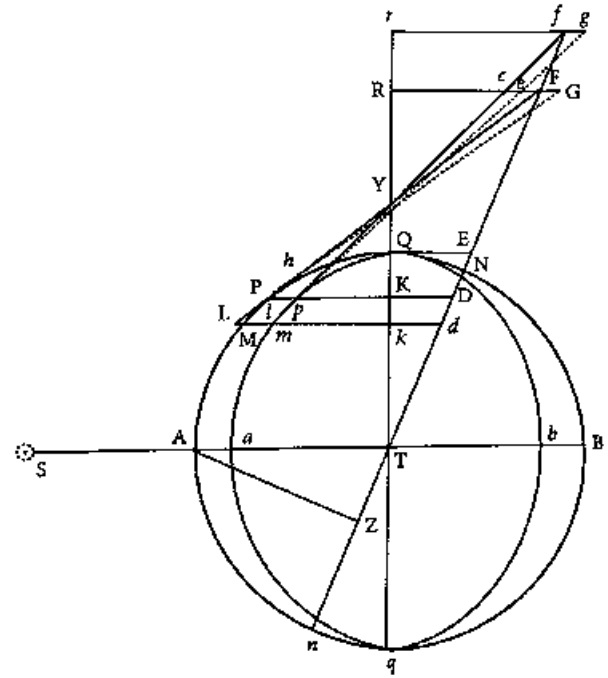
časovno kretanje čvorova svugde proporcionalno sa AZ^2 i površinom PD*d*M zajedno i pošto je u Mesečevim sizigijama časovno kretanje čvorova proporcionalno sa AZ^3 i površinom PD*d*M zajedno, tj., sa AZ^2, jer je poznata površina PD*d*M opisana u sizigijama, onda će srednje kretanje takođe biti proporcionalno sa AZ^2, a kada su čvorovi van kvadratura, to kretanje će se prema 16' 35'' 16''' 36'' odnositi kao AZ^2 prema AT^2.

PROPOZICIJA XXXI. PROBLEM XII

Pronaći časovno kretanje čvorova Meseca po eliptičnoj orbiti.

Neka Q*pmaq* predstavlja elipsu opisanu sa većom osom Q*q* i manjom *ab*, neka je QA*q*B opisan krug, T Zemlja koja se nalazi u njihovom zajedničkom centru, S Sunce, *p* Mesec koji se kreće po toj elipsi, *pm* luk koji on opisuje u najmanjem momentu vremena, N i *n* čvorovi koji su spojeni linijom N*n*, *p*K i *mk* normale na osi Q*q*, koje su produžene sa obe strane tako da seku krug u P i M i liniju čvorova u D i *d*. Ako Mesec poluprečnikom povučenim ka Zemlji opisuje površinu koja je proporcionalna sa vremenom opisivanja, onda će časovno kretanje čvora po elipsi biti proporcionalno sa površinom *p*D*dm* i AZ^2 zajedno.

Neka PF dodiruje krug u P i neka je produžena tako da seče TN u F, zatim, neka *pf* dodiruje elipsu u *p* i neka je produžena tako da seče TN u *f*, a neka se obe tangente poklapaju na osi TQ u Y. Dalje, neka ML predstavlja prostor koji bi Mesec, sa impulsom gore pomenutih sila 3IT ili 3PK, opisao sa poprečnim kretanjem i koji u međuvremenu dok se kreće po krugu opisuje luk PM, zatim, neka *ml* označava prostor koji bi Mesec koji kruži po elipsi u istom vremenu opisao sa impulsom navedenih sila 3IT ili 3PK i neka su LP i *lp* produženi tako da seku ravan ekliptike u G i *g* i neka su FG i *fg* spojeni, a kada je FG produžena, ona može seći *pf*, *pg* i TGL u *c*, *e* i R, a kada je *fg* produžena, ona može seći TQ u *r*. Pošto se sile 3IT i 3PK u krugu odnose prema silama 3IT i 3*p*K u elipsi kao PK prema *p*K, ili kao AT prema *a*T, onda će se prostor ML koji je stvoren prvom silom odnositi prema prostoru *ml* koji je stvoren drugom silom kao PK prema *p*K, tj., kao FR prema *c*R, usled sličnih figura PYK*p* i FYR*c*. Međutim, usled sličnih trouglova PLM i PGF, ML se prema FG odnosi kao PL prema PG, tj., kao *pl* prema *pe*, usled paralela L*k*, PK i GR, tj., kao *lm* prema *ce*, usled sličnih trouglova



plm i *cpe* i obrnuto kao što se LM odnosi prema *lm* ili PR prema *c*R, tako se i FG odnosi prema *ce*. Prema tome, ako se *fg* odnosilo prema *ce* kao *fy* prema *c*Y, tj., kao *fr* prema *c*R, (kao *fr* prema FR i FR prema *c*R zajedno ili kao *f*T prema FT i FG prema *ce* zajedno) i pošto odnos FG prema *ce*, koji se potire s obe strane, ostavlja odnos *fg* prema FG i *f*T prema FT, onda će se *fg* prema FG odnositi kao *f*T prema FT. Prema tome, uglovi koje FG i *fg* prave na Zemlji biće međusobno jednaki. Ipak, ti uglovi (prema onome što smo pokazali u prethodnoj Propoziciji), predstavljaju kretanja čvorova dok Mesec opisuje luk PM po krugu, a luk *pm* po elipsi i zbog toga će kretanja čvorova po krugu i po elipsi biti međusobno jednaka. Tvrdim da bi tako i bilo, ako se *fg* odnosilo prema *ce* kao *fy* prema *c*Y, tj., ako je *fg* bilo jednako sa $\frac{ce \times fY}{cY}$. Ipak, usled sličnih trouglova *fgp* i *cep*, *fg* se prema *ce* odnosi kao *fg* prema *cp* i zbog toga je *fg* jednako sa $\frac{ce \times fp}{cp}$. Odatle sledi da se ugao koji pravi *fg* uistinu odnosi prema uglu koji pravi FG (kretanje čvorova po elipsi prema njihovom kretanju po krugu), kao *fg* ili $\frac{ce \times fp}{cp}$ prema sili *fg* ili $\frac{ce \times fY}{cY}$, tj., kao *fp* × *c*Y prema *f*Y × *cp*, ili kao *fp* prema *f*Y, i kao *c*Y prema *cp*, tj., kao F*h* prema FY i kao FY prema FP, ako *ph*, koja je paralelna sa TN, seče FP u *h*, ili kao F*h* prema FP ili D*p* prema DP i zbog

toga kao površina D*pmd* prema površini DPM*d*. Pošto su (prema Kor. 1, Prop. XXX) ta druga površina i AZ^2 zajedno proporcionalni sa časovnim kretanjem čvorova po krugu, onda će prva površina zajedno sa AZ^2 biti proporcionalna sa časovnim kretanjem čvorova po elipsi. Q.E.D.

Kor. Prema tome, pošto u bilo kom datom položaju čvorova i u vremenu tokom kog Mesec prolazi iz kvadratura do bilo kog mesta *m*, zbir svih površina *pDdm* sačinjava površinu *mp*Q*Ed* koja je ograničena tangentom elipse QE i pošto zbir svih onih površina u jednoj celokupnoj revoluciji sačinjava površinu celokupne elipse, onda će se srednje kretanje čvorova po elipsi odnositi prema strednjem kretanju čvorova po krugu kao elipsa prema krugu, tj., kao T*a* prema TA, ili kao 69 prema 70. I pošto se (prema Kor. 2, Prop. XXX) srednje časovno kretanje čvorova po krugu odnosi prema $16^{\prime\prime}\ 35^{\prime\prime\prime}\ 16^{IV}\ 36^{V}$ kao AZ^2 prema AT^2 i ako uzmemo da se ugao $16^{\prime\prime}\ 21^{\prime\prime\prime}\ 3^{IV}\ 30^{V}$ odnosi prema uglu $16^{\prime\prime}\ 35^{\prime\prime\prime}\ 16^{IV}\ 36^{V}$ kao 69 prema 70, onda će se srednje časovno kretanje čvorova po elipsi odnositi prema $16^{\prime\prime}\ 21^{\prime\prime\prime}\ 31^{IV}\ 30^{V}$ kao AZ^2 prema AT^2, tj., biće proporcionalno sa odnosom kvadrata sinusa rastojanja čvorova od Sunca prema kvadratu poluprečnika.

Međutim, Mesec poluprečnikom povučenim ka Zemlji opisuje površinu većom brzinom u sizigijama nego u kvadraturama i zbog toga je vreme u sizigijama skraćeno, a u kvadraturama produženo. Kretanje je zajedno sa vremenom na sličan način uvećano ili umanjeno. Moment površine u kvadraturi Meseca odnosio se prema njegovom momentu u sizigijama kao 10973 prema 11073 i zbog toga se srednji moment u oktantima odnosio prema višku u sizigijama i manjku u kvadraturama kao poluzbir tih brojeva 11023 prema njihovoj polurazlici 50. Pošto je vreme Meseca u nekoliko malih i jednakih delova njegove orbite obrnuto proporcionalno sa njegovom brzinom, onda će se srednje vreme u oktantima odnositi prema višku vremena u kvadraturama i manjku vremena u sizigijama, koji nastaju iz navedenog uzroka, približno kao 11023 prema 50. Izračunavanjem od kvadratura do sizigija, pronašao sam da je višak momenata površine, u nekoliko mesta iznad najmanjeg momenta u kvadraturama, približno proporcionalan sa kvadratom sinusa Mesečevog rastojanja od kvadratura i zbog toga je razlika između momenta u bilo kom mestu i srednjeg momenta u oktantima proporcionalna sa razlikom između kvadrata sinusa Mesečevog rastojanja od kvadratura i kvadratom sinusa od

45 stepeni, tj. polovina kvadrata poluprečnika. Uvećanje vremena u nekoliko mesta između oktanta i kvadratura, kao i njihovo umanjenje između oktanta i sizigija nalaze se u istoj toj proporciji. Ipak, kretanje čvorova je, dok Mesec opisuje nekoliko malih i jednakih delova svoje orbite, ubrzano ili usporeno proporcionalno sa kvadratom vremena, jer, to kretanje je, dok Mesec opisuje PM (*caeteris paribus*) proporcionalno sa ML, a ML je proporcionalno sa kvadratom vremena. Kretanje čvorova u sizigijama, u vremenu tokom kog Mesec opisuje date male delove svoje orbite, umanjeno je u dvostrukom odnosu broja 11073 prema broju 11023, a to umanjenje se prema preostalom kretanju odnosi kao 100 prema 10973, a prema ukupnom kretanju približno kao 100 prema 11073. Međutim, umanjenje u mestima između oktanta i sizigija, kao i uvećanje u mestima između oktanta i kvadratura, odnosi se prema navedenom umanjenju približno kao ukupno kretanje u tim mestima prema ukupnom kretanju u sizigijama i kao razlika između kvadrata sinusa Mesečevog rastojanja od kvadratura i polovina kvadrata poluprečnika prema polovini kvadrata poluprečnika, zajedno. Ako su čvorovi u kvadraturama i ako uzmemo da su dva mesta, jedno s jedne strane, a drugo s druge, na jednakom rastojanju od oktanta, a druga dva na jednakom rastojanju, jedno od sizigija, a drugo od kvadratura i ako od umanjenja kretanja u ona dva mesta između sizigijuma i oktanta oduzmemo uvećanje kretanja u dva preostala mesta, između oktanta i kvadrature, onda će preostalo umanjenje biti jednako sa umanjenjem u sizigijumu, što lako možemo dobiti izračunavanjem. Prema tome, srednje umanjenje, koje moramo oduzeti od srednjeg kretanja čvorova, jednako je jednoj četvrtini umanjenja u sizigijumu. Ukupno časovno kretanje čvorova u sizigijama (kada bi Mesec poluprečnikom povučenim ka Zemlji trebalo da opiše površinu koja je proporcionalna sa vremenom) iznosilo je $32^{\prime\prime}\ 42^{\prime\prime\prime}\ 7^{IV}$. Pokazali smo da se umanjenje kretanja čvorova, u vremenu dok Mesec, koji se sad kreće većom brzinom, opisuje isti prostor, odnosilo prema tom kretanju kao 100 prema 11073 i zbog toga to umanjenje iznosi $17^{\prime\prime\prime}\ 43^{IV}\ 11^{V}$. Kada četvrtinu od te veličine, tj. $4^{\prime\prime\prime}\ 25^{IV}\ 48^{V}$, oduzmemo od srednjeg časovnog kretanja, tj. od $16^{\prime\prime}\ 21^{\prime\prime\prime}\ 3^{IV}\ 30^{V}$, ostaće nam $16^{\prime\prime}\ 16^{\prime\prime\prime}\ 37^{IV}\ 42^{V}$, što predstavlja ispravljeno srednje časovno kretanje.

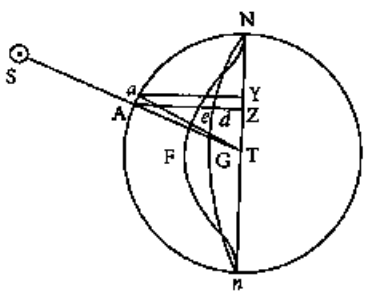
Ako su čvorovi van kvadratura i ako uzmemo dva mesta, jedno s jedne strane, a drugo s druge, koja su na jednakom rastojanju od sizigija, onda će se zbir kretanja čvorova, kada se Mesec nalazi

u tim mestima, odnositi prema zbiru njihovih kretanja, kada je Mesec na istim mestima a čvorovi u kvadraturama, kao AZ^2 prema AT^2. Umanjenja kretanja, koja nastaju iz upravo objašnjenih uzroka, međusobno će biti proporcionalna sa samim tim kretanjima i zbog toga će se preostala kretanja međusobno odnositi kao AZ^2 prema AT^2; a srednja kretanja će biti proporcionalna sa preostalim kretanjima. Prema tome, u bilo kom datom položaju čvorova, njihovo ispravljeno srednje časovno kretanje odnosiće se prema 16" 16"' 37^{IV} 42^{V} kao AZ^2 prema AT^2 tj., kao kvadrat sinusa rastojanja čvorova od sizigija prema kvadratu poluprečnika.

PROPOZICIJA XXXII. PROBLEM XIII

Pronaći srednje kretanje čvorova Meseca.

Srednje godišnje kretanje jeste zbir svih srednjih časovnih kretanja u periodu od godinu dana. Pretpostavimo da se čvor nalazi u N i da je posle svakog proteklog časa vraćen u svoj prvobitni položaj, tako da se, uprkos svom kretanju, može konstantno zadržati u istom položaju u odnosu na fiksne zvezde. U međuvremenu će se, usled kretanja Zemlje, Sunce udaljavati od čvorova sve dok ne dovrši svoj vidljivi godišnji tok ravnomernim kretanjem. Ako A*a* predstavlja najmanji dati luk koji prava linija TS, koja je uvek povučena ka Suncu i koja svojim presecanjem sa krugom NA*n*, opisuje u najmanjem datom momentu vremena onda će srednje časovno kretanje (prema onome što smo gore pokazali) biti proporcionalno sa AZ^2; tj., sa proizvodom pravougaonika AZ i ZY, (pošto su AZ i ZY proporcionalni) tj., sa površinom AZY*a*. Zbir svih srednjih časovnih kretanja od početka biće proporcionalan sa zbirom svih površina *a*YZA, tj. sa površinom NAZ. Najveća površina AZY*a* jednaka je pravougaoniku čije su stranice luk A*a* i poluprečnik kruga i zbog toga će se zbir svih tih pravougaonika u celokupnom krugu odnositi prema sličnom zbiru svih najvećih pravougaonika kao površina celokupnog kruga prema površini pravougaonika čije su stranice ukupni obim i poluprečnik kruga, tj. kao 1 prema 2. Međutim, časovno kretanje koje odgovara tom najvećem pravougaoniku iznosilo je 16" 16"' 37^{IV} 42^{V}, a to kretanje je, tokom potpune zvezdane godine od 365^{d} 6^{h} 9', iznosilo 39° 38' 7" 50"'; a polovina od te veličine, 19° 49' 3" 55"', predstavlja srednje kretanje čvorova koje odgovara celokupnom krugu. Kretanje čvorova, u vremenu dok se Sunce kreće od N ka A, odnosi se prema 19° 49' 3" 55"' kao površina NAZ prema celokupnom krugu.



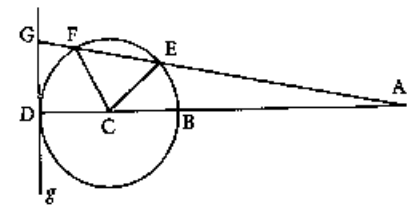
Sve to će se desiti ako se čvorovi posle svakog proteklog časa vraćaju u svoj prvobitni položaj, pa će se Sunce, posle potpune revolucije, na kraju godine ponovo naći u istom onom čvoru iz kojeg je pošlo na početku godine. Međutim, usled kretanja čvorova u srednjem vremenu, Sunce će se ranije vratiti ka čvoru; i sada nam preostaje da izračunamo to skraćenje vremena. Pošto Sunce tokom jedne godine prelazi 360 stepeni, dok za to vreme čvor svojom najvećom brzinom prelazi 39° 39' 7" 50"' ili 39,6355 stepeni i pošto se srednje kretanje čvora u bilo kom mestu N odnosi prema srednjem kretanju u kvadraturama kao AZ^2 prema AT^2 onda će se kretanje Sunca odnositi prema kretanju čvora u N kao $360AT^2$ prema $39{,}6355AZ^2$, tj., kao $9{,}0827646AT^2$ prema AZ^2. Ako pretpostavimo da je obim NA*n* celokupnog kruga podeljen na male i jednake delove, kao što je A*a*, onda će odnos vremena tokom kojeg će Sunce opisati mali luk A*a*, ako krug miruje, prema vremenu tokom kojeg će opisati isti taj luk, ako pretpostavimo da krug zajedno sa čvorovima kruži oko centra T, biti obrnuto proporcionalan sa odnosom $9{,}0827646AT^2$ prema $9{,}0827646AT^2 + AZ^3$. Jer, vreme je obrnuto proporcionalno sa brzinom kojom je taj mali luk opisan, a ta brzina jeste zbir brzina i Sunca i čvora. Prema tome, ako sektor NTA predstavlja vreme tokom kojeg će Sunce, bez kretanja čvorova, opisati luk NA i ako beskonačno mali deo AT*a* sektora predstavlja mali moment vremena tokom kojeg će opisati najmanji luk A*n* i ako spustimo *a*Y normalno na N*n*, a na AZ uzmemo *d*Z takve dužine da se proizvod pravougaonika *d*Z i ZY može odnositi prema najmanjem delu AT*a* sektora kao AZ^2 prema $9{,}0827646AT^2 + AZ^2$, tj., tako da se *d*Z može odnositi prema $\frac{1}{2}$ AZ kao AT^2 prema $9{,}0827646AT^2 + AZ^2$, onda će proizvod stranica pravougaonika *d*Z i ZY predstavljati umanjenje vremena opisivanja luka A*a* koje nastaje iz kretanja čvora. Ako je kriva N*d*G*n* mesto gde se tačka *d* uvek može pronaći, onda će krivolinijska površina N*d*Z predstavljati ukupno umanjenje vremena opisivanja luka NA i zbog toga će višak sektora NAT u odnosu na površinu N*d*Z predstavljati ukupno vreme. Pošto je kretanje čvora proporcionalno sa vreme-

nom, onda se i površina A*a*YZ mora umanjiti u istoj proporciji, a to se može uraditi ako uzmemo na AZ liniju *e*Z takve dužine da se može odnositi prema dužini od AZ kao AZ^2 prema $9{,}0827646AT^2 + AZ^2$, i tada će se proizvod stranica pravougaonika *e*Z i ZY odnositi prema površini AZY*a* kao umanjenje vremena tokom kojeg je opisan luk A*a* prema ukupnom vremenu tokom kojeg bi taj luk bio opisan da su čvorovi bili u stanju mirovanja, a zbog toga taj pravougaonik odgovara umanjenju kretanja čvora. Ako je kriva N*e*F*n* mesto tačke *e*, onda će ukupna površina N*a*Z, koja je zbir svih umanjenja tih kretanja, odgovarati njihovom ukupnom umanjenju u vremenu tokom kojeg je opisan luk AN, a preostala površina NA*e* odgovaraće preostalom kretanju, koje predstavlja istinsko kretanje čvora u vremenu tokom kojeg je celokupni luk NA opisan zajedničkim kretanjem i Sunca i čvora. Površina polukruga odnosi se prema površini figure N*e*F*n*, koja je pronađena metodom beskonačnog niza, približno kao 793 prema 60. Ipak, kretanje koje odgovara ili koje je proporcionalno sa celokupnim krugom iznosilo je 19° 49' 3" 55"' i zbog toga kretanje koje odgovara dvostrukoj površini N*e*F*n* iznosi 1° 29' 58" 2"', koje kada se oduzme od prethodnog kretanja daje 18° 19' 5" 53"', što predstavlja ukupno kretanje čvora u odnosu na fiksne zvezde u intervalu između dve njegove konjunkcije sa Suncem, a kada se to kretanje oduzme od godišnjeg kretanja Sunca koje iznosi 360°, daje 341° 40' 54" 7"', što predstavlja kretanje Sunca u intervalu između tih istih konjunkcija. To kretanje se prema godišnjem kretanju koje iznosi 360° odnosi kao upravo pronađeno kretanje čvora koje iznosi 18° 19' 5" 53"' prema njegovom godišnjem kretanju, koje će zbog toga iznositi 19° 18' 1" 23"', a to predstavlja srednje kretanje čvorova u zvezdanoj godini. Prema astronomskim tablicama ono iznosi 19° 21' 21" 50"'. Razlika je manja od $\frac{1}{300}$ ukupnog kretanja i čini se da nastaje iz ekscentriciteta Mesečeve orbite i njegove inklinacije na ravan ekliptike. Usled ekscentriciteta ove orbite, kretanje čvorova je previše ubrzano; s druge strane, inklinacijom orbite, kretanje čvorova unekoliko je usporeno i svedeno na njihovu stvarnu brzinu.

PROPOZICIJA XXXIII. PROBLEM XIV

Pronaći istinsko kretanje čvorova Meseca.

Tokom vremena koje je proporcionalno sa površinom NTA–N*d*Z (na pratećoj slici), to kretanje je proporcionalno sa površinom NA*e*,



te je stoga poznato. Međutim, pošto je račun izuzetno komplikovan, bilo bi uputnije koristiti narednu postavku Problema. Oko centra C sa bilo kojim poluprečnikom CD opisaćemo krug BEFD; produžićemo DC ka A tako da se AB može odnositi prema AC kao srednje kretanje prema polovini srednjeg istinskog kretanja kada su čvorovi u svojim kvadraturama (naime, kao 19° 18' 1" 23"' prema 19° 49' 3" 55"', tj., BC prema AC kao razlika tih kretanja 0° 31' 2" 32"' prema tom poslednjem kretanju 19° 49' 3" 55"', tj., kao 1 prema $38\frac{3}{10}$). Potom ćemo kroz tačku D povući neodređenu liniju G*g* koja dodiruje krug u D; zatim, uzećemo da su uglovi BCE ili BCF, jednaki sa dvostrukim rastojanjem Sunca od mesta čvora (kao što je pronađeno pomoću srednjeg kretanja) i povući ćemo AE ili AF tako da seku normalu DG u G. Uzećemo još jedan ugao koji će se prema ukupnom kretanju čvora u intervalu između njegovih sizigija (tj., prema 9° 11' 3") odnositi kao tangenta DG prema ukupnom obimu kruga BED. Kada taj poslednji ugao (koji može biti recimo ugao DAG) dodamo srednjem kretanju čvorova, pri njihovom prelasku od kvadratura ka sizigijama, i kada ga oduzmemo od njihovog srednjeg kretanja pri prelasku od sizigija ka kvadraturama, dobićemo njihovo istinsko kretanje. Jer, istinsko kretanje, koje je na takav način pronađeno, približno će odgovarati istinskom kretanju koje dobijamo pretpostavkom da su vremena proporcionalna sa površinom NTA–N*d*Z, a kretanje čvora sa površinom NA*e*, kao što će pronaći svako ko to želi da istraži i izračuna, što upravo predstavlja polumesečnu jednačinu kretanja čvorova. Ipak, postoji i mesečna jednačina, koja nije uopšte nužna za pronalaženje latitude Meseca, jer varijacija inklinacije Mesečeve orbite prema ravni ekliptike podložna je dvostrukoj nejednakosti, od kojih je jedna polumesečna, a druga mesečna. Mesečna nejednakost ove varijacije i mesečna jednačina čvorova tako se međusobno ublažavaju i ispravljaju da se mogu zanemariti pri izračunavanju latitude Meseca.

Kor. Iz ove, kao i iz prethodne Propozicije sledi da su čvorovi u stanju mirovanja u sizigijama, kao i da se u kvadraturama kreću regresivno sa časovnim kretanjem koje iznosi 16" 19"' 26^{IV}. Takođe,

sledi da jednačina kretanja čvorova u oktantima iznosi 1° 30'. Sve se to potpuno slaže sa nebeskim fenomenima.

SHOLIJA

Profesor astronomije sa koledža Grešam Džon Makin (J. Machin) i dr Henri Pemberton (H. Pemberton), nezavisno jedan od drugog, pronašli su kretanja čvorova različitim metodama. Te metode spominjane su na nekom drugom mestu. Njihovi radovi sadržali su po dve propozicije koje se u potpunosti međusobno slažu. Ipak, pošto sam prvo pročitao rad gospodina Makina, taj rad ću i predstaviti u ovome što sledi.

„O KRETANJU MESEČEVIH ČVOROVA

PROPOZICIJA I

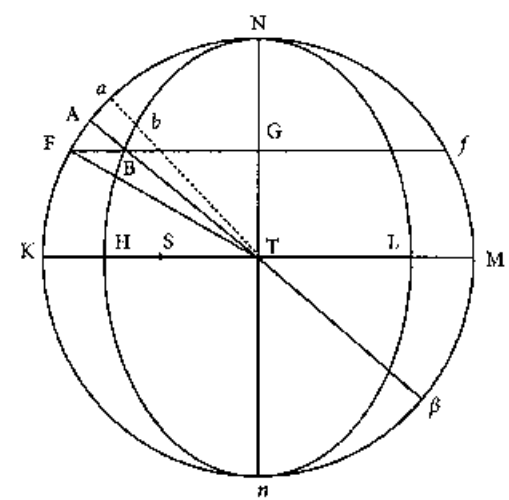
Srednje kretanje Sunca od čvora određeno je pomoću geometrijske sredine srednjeg kretanja Sunca i onog srednjeg kretanja kojim se Sunce najvećom brzinom udaljava od čvora u kvadraturama.

Neka je T mesto Zemlje, N*n* linija Mesečevih čvorova u bilo kom datom vremenu, KTM njena normala, TA prava linija koja kruži oko centra istom ugaonom brzinom kojom se Sunce i čvor međusobno udaljavaju, i to na takav način da ugao između nepokretne prave linije N*n* i linije TA koja kruži može uvek biti jednak sa rastojanjem između mesta Sunca i čvora. Sada, ako je bilo koja prava linija TK podeljena na delove TS i SK, zatim, ako uzmemo da se ti delovi međusobno odnose kao srednje časovno kretanje Sunca prema srednjem časovnom kretanju čvora u kvadraturama, i ako uzmemo da je prava linija TH geometrijska sredina dela TS i celine TK, onda će ta prava linija biti proporcionalna sa srednjim kretanjem Sunca od čvora.

Neka je opisan krug NK*n*M iz centra T i sa poluprečnikom TK i neka je oko istog toga centra sa poluosama TH i TN opisana elipsa NH*n*L. Ako u vremenu tokom kog se Sunce udaljava od čvora preko luka N*a* povučemo pravu liniju T*ba*, onda će sektor NT*a* predstavljati zbir kretanja Sunca i čvora u tom istom vremenu. Prema tome, neka izuzetno mali luk *a*A bude onaj kojeg će prava

linija T*ba*, koja kruži u skladu sa gorepomenutim zakonom, ravnomerno opisati u datom delu vremena, i onda će izuzetno mali sektor TA*a* biti proporcionalan sa zbirom brzina kojima su Sunce i čvor nošeni na dva različita načina tokom tog vremena. Sunčeva brzina je skoro ravnomerna i njena nejednakost je toliko mala da jedva proizvodi i najmanju nejednakost u srednjem kretanju čvorova. Drugi deo ovog zbira, naime, srednja veličina brzine čvora, uvećana je pri udaljavanju od sizigija u dvostrukom odnosu sinusa njegovog rastojanja od Sunca (prema Kor. Prop. XXXI, ove knjige) i pošto je ona najveća u kvadraturama sa Suncem u K, odnosiće se prema brzini Sunca kao SK prema TS, tj., kao pravougaonik KHM prema TH^2 (ili razlika kvadrata TK i kvadrata TH). Međutim, elipsa NBH deli sektor AT*a*, koji predstavlja zbir te dve brzine, na dva dela AB*ba* i BT*b* koji su proporcionalni sa brzinama.

Produžićemo BT do kruga β, a iz tačke B na veću osu spustićemo normalu BG, koja kada se produži sa obe strane može da seče krug u tačkama F i *f*. Pošto se prostor AB*ba* odnosi prema sektoru TB*b* kao pravougaonik ABβ prema BT^2 (a taj pravougaonik je jednak sa razlikom između kvadrata TA i kvadrata TB, jer je prava linija Aβ jednako podeljena u T, a nejednako u B) i kada je, zbog toga, prostor AB*ba* najveći u K, onda će taj odnos biti jednak sa odnosom pravougaonika KHM prema HT^2. Ipak, ranije je pokazano da je najveća srednja brzina čvora u tom istom odnosu prema brzini Sunca i zbog toga je u kvadraturama sektor AT*a* podeljen na delove koji su proporcionalni sa brzinama. Pošto se pravouga-



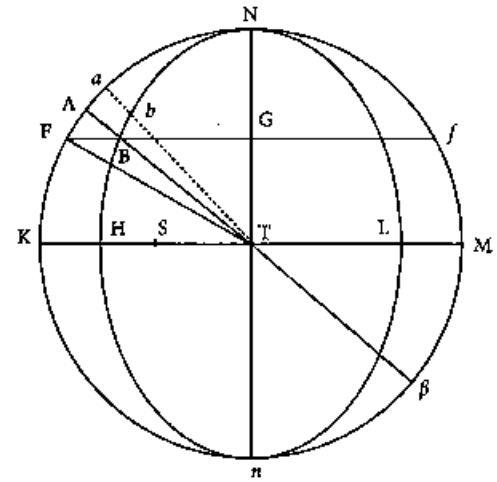
onik KHM odnosi prema HT^2 kao FB*f* prema BG^2 i pošto je pravougaonik ABβ jednak sa pravougaonikom FB*f*, onda će se mala površina AB*ba*, tamo gde je najveća, odnositi prema preostalom sektoru TB*b* kao pravougaonik ABβ prema BG^2. Odnos ovih malih površina uvek je bio jednak odnosu pravougaonika ABβ prema BT^2 i zbog toga će mala površina AB*ba* u mestu A biti manja od odgovarajuće male površine u kvadraturama u dvostrukom odnosu BG prema BT, tj., u dvostrukom odnosu sinusa rastojanja Sunca od čvora. Prema tome, zbir svih malih površina AB*ba*, tj., prostor ABN, biće proporcionalan sa kretanjem čvora u vremenu tokom kog se Sunce kreće po luku NA pošto je napustilo čvor. Preostali prostor, naime, eliptični sektor NTB, biće proporcionalan sa srednjim kretanjem Sunca tokom istog tog vremena. Pošto je srednje godišnje kretanje čvora ono koje čvor izvodi u vremenu tokom kog Sunce dovršava jedan period svog kretanja, onda će se srednje kretanje čvora od Sunca odnositi prema srednjem kretanju Sunca kao površina kruga prema površini elipse, tj., kao prava linija TK prema pravoj liniji TH, koja je geometrijska sredina između TK i TS, ili, što je isto, kao geometrijska sredina TH prema pravoj liniji TS.

PROPOZICIJA II

Pošto je poznato srednje kretanje Mesečevih čvorova, neophodno je pronaći njihovo istinsko kretanje.

Neka ugao A predstavlja rastojanje Sunca od srednjeg mesta čvora ili srednje kretanje Sunca od čvora. Ako uzmemo ugao B tako da se njegova tangenta odnosi prema tangenti ugla A kao TH prema TK, ili tako da je njihov odnos jednak kvadratnom korenu iz odnosa srednjeg časovnog kretanja Sunca prema srednjem časovnom kretanju Sunca od čvora, kada se čvor nalazi u kvadraturi i onda će ugao B predstavljati rastojanje Sunca od istinskog mesta čvora. Ako spojimo FT (prema poslednjoj Propoziciji), ugao FTN predstavlja rastojanje Sunca od srednjeg mesta čvora, a ugao ATN rastojanje od istinskog mesta, pri čemu se tangente tih uglova međusobno odnose kao TK prema TH.

Kor. Odatle sledi da je ugao FTA jednačina Mesečevih čvorova a sinus tog ugla, kada je najveći u oktantima, odnosi se prema poluprečniku kao KH prema TK + TH. Međutim, sinus iz ove jednačine se u bilo kom drugom mestu A odnosi prema najvećem



sinusu kao sinus zbira uglova FTN + ATN prema poluprečniku tj., približno kao sinus dvostrukog rastojanja Sunca od srednjeg mesta čvora (2FTN) prema poluprečniku.

SHOLIJA

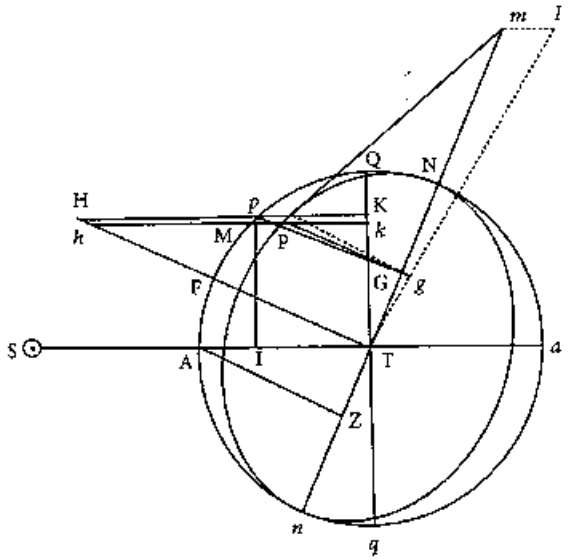
Ako srednje časovno kretanje čvorova u kvadraturama iznosi 16" 16"' 37^{IV} 42^{V}, tj., 39° 38' 7" 50"' u celokupnoj zvezdanoj godini, onda će se TH prema TK odnositi kao kvadratni koren iz broja 9,0827646 prema kvadratnom korenu iz broja 10,0827646, tj., kao 18,6524761 prema 19,6524761. Prema tome, TH se prema HK odnosi kao 18,6524761 prema 1, tj., kao kretanje Sunca tokom zvezdane godine prema srednjem kretanju čvora koje iznosi 19° 18' 1" 23"' 40^{IV}.

Međutim, ako srednje kretanje Mesečevih čvorova tokom 20 julijanskih godina iznosi 386° 50' 15", kao što je izvedeno iz posmatranja koja se koriste u teoriji Meseca, onda će srednje kretanje čvorova u jednoj zvezdanoj godini iznositi 19° 20' 31" 58"', a TH će se prema HK odnositi kao 360° prema 19° 20' 31" 58"', tj., kao 18,61214 prema 1. Odatle sledi da će srednje časovno kretanje čvorova u kvadraturama iznositi 16" 18"' 48^{IV}, a najveća jednačina čvorova u oktantima 1° 29' 57"."

PROPOZICIJA XXXIV. PROBLEM XV

Pronaći časovnu varijaciju inklinacije Mesečeve orbite prema ravni ekliptike.

Neka A i *a* predstavljaju sizigije, Q i *q* kvadrature, N i *n* čvorove, P mesto Meseca na njegovoj orbiti, *p* ortografsku projekciju tog mesta na ravan ekliptike, a *mTl* momentalno kretanje čvorova, kao i ranije. Ako na T*m* spustimo normalu PG i ako spojimo *p*G i produžimo je sve dok ne preseče T*l* u *g*, zatim, ako spojimo P*g*, onda će ugao PG*p* predstavljati inklinaciju Mesečeve orbite prema ravni



ekliptike kada je Mesec u P, a ugao P*gp* će predstavljati inklinaciju nakon što prođe mali trenutak vremena. Zbog toga će ugao GP*g* predstavljati trenutnu varijaciju inklinacije. Ipak, taj ugao GP*g* se prema uglu GT*g* odnosi kao TG prema PG i kao P*p* prema PG zajedno. Prema tome, ako pretpostavimo da momenat vremena iznosi jedan čas i pošto se ugao GT*g* (prema Prop. XXX) odnosi prema uglu od 33" 10"' 33^{IV} kao IT × PG × AZ prema AT^3, onda će se ugao GP*g* (ili časovna varijacija inklinacije) odnositi prema uglu od 33" 10"' 33^{IV} kao IT × AZ × TG × $\frac{Pp}{PG}$ prema AT^3. Q.E.I.

Sve to će se desiti ako Mesec ravnomerno kruži po kružnoj orbiti. Međutim, ako je orbita eliptična, onda će se srednje kretanje čvorova umanjiti u proporciji manje ose prema većoj, kao što smo ranije pokazali, a varijacija inklinacije takođe će se umanjiti u istoj proporciji.

Kor. 1. Na N*n* ćemo podignuti normalu TF i neka *p*M predstavlja časovno kretanje Meseca u ravni ekliptike. Na QT ćemo spustiti normale *p*K i M*k* i produžićemo ih dok ne preseku TF u H i *h*.

Onda će se IT prema AT odnositi kao K*k* prema M*p*, a TG će se prema H*p* odnositi kao TZ prema AT i zbog toga će IT × TG biti jednako sa $\frac{Kk \times Hp \times TZ}{Mp}$, tj., jednako sa površinom H*p*M*h* pomnoženom sa odnosom $\frac{TZ}{Mp}$. Prema tome, časovna varijacija inklinacije odnosiće se prema 33" 10"' 33^{IV} kao površina H*p*M*h* pomnožena sa odnosom AZ × $\frac{TZ}{Mp}$ × $\frac{Pp}{PG}$ prema AT^3.

Kor. 2. Prema tome, ako se Zemlja i čvorovi nakon svakog časa vraćaju sa svojih novih mesta ka svojim prvobitnim mestima, tako da njihovi položaji mogu biti konstantni tokom ukupnog perioda od mesec dana, onda će se ukupna varijacija inklinacije tokom tog meseca odnositi prema 33" 10"' 33^{IV} kao skup svih površina H*p*M*h*, stvorenih u vremenu jedne revolucije tačke *p* (uzimajući u obzir, pri sabiranju, njihove pojedinačne znakove, + i −), pomnoženim sa odnosom AZ × TZ × $\frac{Pp}{PG}$ prema M*p* × AT^3, tj., kao celokupan krug QA*qa* pomnožen sa odnosom AZ × TZ × $\frac{Pp}{PG}$ prema M*p* × AT^3, tj., kao obim kruga Qa*qa* pomnožen sa odnosom AZ × TZ × $\frac{Pp}{PG}$ prema 2M*p* × AT^2.

Kor. 3. Prema tome, u datom položaju čvorova, srednje časovno kretanje od kog, ako se ravnomerno kreće tokom mesec dana, može nastati mesečna varijacija, odnosi se prema 33" 10"' 33^{IV} kao AZ × TZ × $\frac{Pp}{PG}$ prema $2AT^2$, ili kao P*p* × $\frac{AZ \times TZ}{\frac{1}{2}AT}$ prema PG × 4AT, tj., kao sinus inklinacije pomnožen sa sinusom dvostrukog rastojanja čvorova od Sunca prema četvorostrukom kvadratu poluprečnika (pošto se P*p* prema PG odnosi kao sinus gorepomenute inklinacije prema poluprečniku i pošto se $\frac{AZ \times TZ}{\frac{1}{2}AT}$ prema 4AT odnosi kao sinus dvostrukog ugla AT*n* prema četvorostrukom poluprečniku).

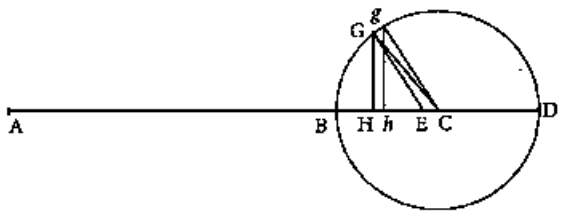
Kor. 4. S obzirom na to da se časovna varijacija inklinacije, kada su čvorovi u kvadraturama, odnosi prema uglu 33" 10"' 33^{IV} (prema ovoj propoziciji) kao IT × AZ × TG × $\frac{Pp}{PG}$ prema AT^3, tj., kao $\frac{IT \times TG}{\frac{1}{2}AT}$ × $\frac{Pp}{PG}$ prema 2AT, tj. kao sinus dvostrukog rastojanja Meseca od kvadratura pomnožen sa $\frac{Pp}{PG}$ prema dvostrukom poluprečniku, onda će se zbir svih časovnih varijacija u vremenu tokom kog Mesec, sa ovim položajem čvorova, prelazi od kvadratura prema sizigijumu (u periodu od $177\frac{1}{6}$ časova), odnositi prema zbiru isto tolikog broja uglova 33" 10"' 33^{IV}, tj., prema 5878", kao zbir svih sinusa dvostrukog rastojanja Meseca od kvadratura pomnoženim sa $\frac{Pp}{PG}$ prema zbiru isto tolikog broja prečnika, tj., kao prečnik pomnožen sa $\frac{Pp}{PG}$ prema obimu, ako inklinacija iznosi 5° 1', kao 7 × $\frac{874}{10000}$ prema 22, ili kao 278 prema 10000. Zbog toga

će ukupna varijacija, koja se sastoji iz zbira svih časovnih varijacija u gorepomenutom vremenu, iznositi 163" ili 2' 43"."

PROPOZICIJA XXXV. PROBLEM XVI

U datom vremenu pronaći inklinaciju Mesečeve orbite prema ravni ekliptike.

Neka je AD sinus najveće inklinacije, a AB sinus najmanje. Preseći ćemo BD na pola u C i oko centra C sa poluprečnikom BC opisaćemo krug BGD. Na AC uzećemo da se CE odnosi prema EB kao EB prema 2BA. Ako pri zadatom vremenu napravimo ugao AEG koji je jednak sa dvostrukim rastojanjem čvorova od kvadratura i ako na AD spustimo normalu GH, onda će AH predstavljati traženi sinus inklinacije.



Jer, GE^2 jednako je sa $GH^2 + HE^2 = BHD + HE^2 = HBD + HE^2 - BH^2 = HBD + BE^2 - 2BH \times BE = BE^2 + 2EC \times BH = 2EC \times AB + 2EC \times BH = 2EC \times AH$ i pošto je 2EC poznato, onda će GE^2 biti proporcionalno sa AH. Sada, ako AE*g* predstavlja dvostruko rastojanje čvorova od kvadratura, u datom momentu vremena posle toga, luk G*g* će, s obzirom na to da je luk GE*g* poznat, biti proporcionalan sa rastojanjem GE. Međutim, H*h* se prema G*g* odnosi kao GH prema GC i zbog toga je H*h* proporcionalno sa pravougaonikom GH × G*g*, ili sa GH × GE, tj., sa $\frac{GH}{GE} \times GE^2$, ili sa $\frac{GH}{GE} \times AH$, tj., sa AH i sinusom ugla AEG zajedno. Prema tome, ako je u bilo kom slučaju AH sinus inklinacije, on će se uvećati s istim uvećanjem kao i sinus inklinacije (prema Kor. 3, prethodne Propozicije) i zbog toga će uvek biti jednak sa tim sinusom. Ipak, kada tačka G pada ili u B ili u D, onda je AH jednak sa tim sinusom i zbog toga će uvek biti jednak sa njim.

U ovom dokazivanju pretpostavio sam da se ugao BEG, koji predstavlja dvostruko rastojanje čvorova od kvadratura, ravnomerno uvećava, jer ovde ne mogu tumačiti detalje svake nejednakosti. Sada, pretpostavimo da je BEG prav ugao i da je G*g*, u ovom slučaju,

časovno uvećanje dvostrukog rastojanja čvorova od Sunca. Onda će se (prema Kor. 3 poslednje Propozicije), časovna varijacija inklinacije u istom tom slučaju odnositi prema 33" 10"' 33^{IV} kao proizvod $\frac{AH \times \sin BEG}{4}$ prema poluprečniku, tj. kao $\frac{1}{4}$AH prema poluprečniku za prav ugao BEG, a kako je odnos AH prema poluprečniku jednak uglu srednje inklinacije, tj. sin 5° $8\frac{1}{2}$', onda je njegova četvrtina jednaka odnosu 224 prema 10000. Ipak, ukupna varijacija, koja odgovara razlici sinusa BD, odnosi se prema tom časovnom kretanju kao prečnik BD prema luku G*g*, a taj odnos odgovara proizvodu odnosa prečnika BD prema poluobimu BGD i odnosa vremena od $2079\frac{7}{10}$ časova, tokom kog se čvor kreće od kvadratura ka sizigijama, prema 1 času, ili kao 7 prema 11 i $2079\frac{7}{10}$ prema 1. Kada sastavimo sve te odnose, dobićemo da se ukupna varijacija BD prema 33" 10"' 33^{IV} odnosi kao 224 × 7 × $2079\frac{7}{10}$ prema 110000, tj. kao 29645 prema 1000 i odatle sledi da će varijacija BD iznositi 16' $23\frac{1}{2}$".

To predstavlja najveću varijaciju inklinacije ako apstrahujemo položaj Meseca u njegovoj orbiti, jer, ako su čvorovi u sizigijama, onda različiti položaji Meseca ne utiču na promenu inklinacije. Međutim, ako su čvorovi u kvadraturama, onda je inklinacija manja kada je Mesec u sizigijama nego kada je u kvadraturama za razliku od 2' 43", kao što smo pokazali u Kor. 4, prethodne Propozicije. Kada je Mesec u kvadraturama, ukupna srednja varijacija BD, kada je umanjimo za polovinu od te veličine, tj., za 1' $21\frac{1}{2}$", postaće 15' 2", a kada je u sizigijama, postaće 17' 45", pošto je uvećana istom tom veličinom. Prema tome, ako je Mesec u sizigijama, ukupna varijacija pri prelasku čvorova od kvadratura prema sizigijama, iznosiće 17' 45" i zbog toga će, ako inklinacija iznosi 5° 17' 20" kada su čvorovi u sizigijama, inklinacija iznositi 4° 59' 35" kada su čvorovi u kvadraturama, a Mesec u sizigijama. Sve je ovo potvrđeno posmatranjima.

Sada, ako je inklinacija orbite neophodna kada je Mesec u sizigijama, a čvorovi bilo gde između njih i kvadratura, zatim, ako se AB prema AD odnosi kao sinus od 4° 59' 35" prema sinusu od 5° 17' 20" i ako uzmemo da je ugao AEG jednak sa dvostrukim rastojanjem čvorova od kvadratura, onda će AH biti sinus tražene inklinacije. Sa ovom inklinacijom orbite jednaka je ona inklinacija orbite kada rastojanje Meseca od čvorova iznosi 900. U ostalim položajima Meseca, ova mesečna nejednakost, čija je varijacija inklinacije komplikovana pri izračunavanju Mesečeve latitude, uravnotežena je i

uklonjena pomoću mesečne nejednakosti kretanja čvorova (kao što smo ranije rekli), pa se zbog toga može zanemariti pri izračunavanju navedene latitude.

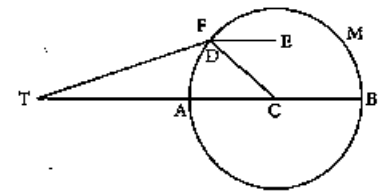
SHOLIJA

Ovim izračunavanjima Mesečevih kretanja želeo sam da pokažem da se prema teoriji gravitacije kretanja Meseca mogu odrediti iz njihovih fizičkih uzroka. Pomoću iste teorije pronašao sam i da godišnja jednačina srednjeg kretanja Meseca nastaje iz različitih dilatacija Mesečeve orbite koja nastaju usled delovanja Sunca (prema Kor. 6, Prop. LXVI, Knjige I). Sila tog delovanja jača je u perigeju Sunca i proširuje Mesečevu orbitu, a u apogeju Sunca je manja, pa omogućava da se orbita ponovo kontrahuje. Mesec se kreće sporije po proširenoj, a brže po kontrahovanoj orbiti, a godišnja jednačina, kojom je regulisana ta nejednakost, nestaje u perigeju i apogeju Sunca. Na srednjem rastojanju Sunca od Zemlje ona nastaje na oko 11' 50", a na ostalim rastojanjima Sunca proporcionalna je sa jednačinom Sunčevog centra. Ta jednačina se dodaje srednjem kretanju Meseca, pri prelasku Zemlje od afela prema perihelu, a oduzima se kada se Zemlja nalazi na suprotnom polukrugu. Ako uzmemo da poluprečnik *orbis magnusa* iznosi 1000, a Zemljin ekscentricitet $16\frac{7}{8}$, onda najveća veličina te jednačine prema teoriji gravitacije iznosi 11' 49". Međutim, čini se da je ekscentricitet Zemlje nešto veći, pa se uvećanjem ekscentriciteta uvećava i ta jednačina u istoj proporciji. Ako pretpostavimo da ekscentricitet iznosi $16\frac{11}{12}$, onda će najveća jednačina iznositi 11' 51".

Potom sam pronašao da se apogej i čvorovi Meseca kreću brže u perihelu Zemlje, gde je sila Sunca jača, nego što je u njenom afelu i pritom u obrnutom odnosu kubnog rastojanja Zemlje od Sunca. Odatle nastaju godišnje jednačine tih kretanja koje su proporcionalne sa jednačinom Sunčevog centra. Kretanje Sunca obrnuto je proporcionalno kvadratu rastojanja Zemlje od Sunca, a najveća jednačina centra koju ova nejednakost stvara iznosi 1° 56' 20", što odgovara gore pomenutom ekscentricitetu Sunca, $16\frac{11}{12}$. Ako bi kretanje Sunca bilo obrnuto proporcionalno sa kubnim rastojanjem, onda bi ta nejednakost stvorila najveću jednačinu koja bi iznosila 2° 54' 30" i zbog toga se ta najveća jednačina, koju stvaraju nejednakosti kretanja apogeja i čvorova Meseca, odnosi prema 2° 54' 30" kao što se srednje dnevno kretanje Mesečevog apogeja

i srednje dnevno kretanje njegovih čvorova odnose prema srednjem dnevnom kretanju Sunca. Odalte sledi da najveća jednačina srednjeg kretanja apogeja iznosi 19' 43", a najveća jednačina srednjeg kretanja čvorova 9' 24". Prva jednačina se dodaje, a druga oduzima, pri prelasku Zemlje od perihela ka afelu i obrnuto kada se Zemlja nalazi u suprotnom polukrugu.

Na sličan način sam prema teoriji gravitacije pronašao da je delovanje Sunca na Mesec nešto jače kada poprečni prečnik Mesečeve orbite prelazi preko Sunca, nego kada je normalan u odnosu na liniju koja spaja Zemlju i Sunce. Zbog toga je Mesečeva orbita nešto veća u prvom, nego što je u drugom slučaju. Odatle nastaje druga jednačina Mesečevog srednjeg kretanja, koja zavisi od položaja Mesečevog apogeja u odnosu na Sunce i koja je najveća kada je Mesečev apogej u oktantima Sunca, a koja nestaje kada apogej stigne do kvadratura ili sizigija. Ona se dodaje srednjem kretanju kada Mesečev apogej prolazi od kvadratura Sunca ka sizigijumu, a oduzima se kada apogej prolazi od sizigijuma ka kvadraturi. Ta jednačina, koju ću nazvati polugodišnjom, kada je najveća u oktantima apogeja, dostiže 3' 45" (onoliko koliko mogu izvesti iz fenomena), što predstavlja njenu veličinu na srednjem rastojanju Sunca od Zemlje. Međutim, ona se uvećava ili umanjuje u obrnutom odnosu kubnog rastojanja Sunca od Zemlje i zbog toga iznosi približno 3' 34", kada je rastojanje najveće, a 3' 56" kada je najmanje. Kada je Mesečev apogej van oktanta, ona postaje manja i odnosi se prema svojoj najvećoj veličini kao sinus dvostrukog rastojanja Mesečevog apogeja od najbližeg sizigijuma ili najbliže kvadrature prema poluprečniku.



Prema istoj teoriji gravitacije, delovanje Sunca na Mesec nešto je jače kada linija Mesečevih čvorova prolazi kroz Sunce, nego kada je pod pravim uglom sa linijom koja spaja Sunce i Zemlju. Odatle nastaje još jedna jednačina Mesečevog srednjeg kretanja, koju ću nazvati drugom polugodišnjom jednačinom, zatim, koja je najveća kada su čvorovi u oktantima Sunca i koja nestaje kada su oni u sizigijama ili kvadraturama. Pri drugim položajima čvorova ona je proporcionalna sa sinusom dvostrukog rastojanja bilo kog čvora od najbližeg sizigijuma ili od kvadrature. Ta jednačina se dodaje srednjem kretanju Meseca ako je Sunce *in antecedentia*

u odnosu na čvor koji je najbliži njemu, a oduzima se ako je Sunce *in consequentia* i u oktantima, a tamo gde ima najveću veličinu dostiže do 47" pri srednjem rastojanju Sunca od Zemlje (kao što sam pronašao pomoću teorije gravitacije). Na ostalim rastojanjima Sunca, ova jednačina, koja je najveća u oktantima čvorova, obrnuto je proporcionalna sa kubnim rastojanjem Sunca od Zemlje i zbog toga u Sunčevom perigeju iznosi oko 49", a u njegovom apogeju oko 45".

Prema istoj teoriji gravitacije, Mesečev apogej se kreće unapred najvećom brzinom kada je ili u konjunkciji ili u opoziciji sa Suncem, a kada je u svojim kvadraturama sa Suncem kreće se unazad. Ekscentricitet je najveći u prvom slučaju, a najmanji u drugom (prema Kor. 7, 8 i 9, Prop. LXVI, Knjige I). A te nejednakosti su, prema navedenim korolarima, veoma velike i stvaraju osnovnu jednačinu apogeja, koju nazivam polugodišnjom jednačinom. A onoliko koliko mogu zaključiti iz fenomena, najveća polugodišnja jednačina apogeja iznosi oko 12° 18'. Naš zemljak, Horoks (Horrox), prvi je predložio teoriju po kojoj se Mesec kreće po elipsi oko Zemlje koja se nalazi na njegovoj donjoj žiži. Dr Halej je unapredio tu ideju tako što je smestio centar elipse u epicikl čiji centar ravnomerno kruži oko Zemlje. Iz kretanja po ovom epiciklu, stvarno nastaju navedene nejednakosti u progresivnom i regresivnom kretanju apogeja, kao i u veličini ekscentriciteta. Pretpostavićemo da je srednje rastojanje Meseca od Zemlje podeljeno na 100000 delova i da T predstavlja Zemlju, a TC Mesečev srednji ekscentricitet koji iznosi 5505 tih delova. Produžićemo TC ka B, tako da CB može biti jednako sa odnosom sinusa najveće polugodišnje jednačine 12° 18" prema poluprečniku TC. Onda će krug BDA, opisan oko centra C sa poluprečnikom CB, biti taj epicikl u kom je smešten centar Mesečeve orbite i koji kruži prema redosledu slova BDA. Ako je ugao BCD jednak sa dvostrukim godišnjim argumentom, ili sa dvostrukim rastojanjem Sunčevog istinskog mesta od mesta apogeja Meseca koje je jednom izjednačeno, onda će CTD biti polugodišnja jednačina apogeja Meseca, a TD ekscentricitet njegove orbite, koja teži ka mestu apogeja koji je sad dvaput izjednačen. Pošto su Mesečevo srednje kretanje, mesto njegovog apogeja i ekscentricitet, kao i duža osa njegove orbite koja iznosi 200000, poznati, onda iz tih podataka pomoću dobro poznatih metoda možemo pronaći istinski položaj Meseca na njegovoj orbiti zajedno sa njegovim rastojanjem od Zemlje.

U perihelu Zemlje, gde je sila Sunca najjača, centar Mesečeve orbite se kreće brže oko centra C, nego u afelu i to u obrnutom odnosu kubnog rastojanja Sunca od Zemlje. Međutim, pošto je jednačina Sunčevog centra uključena u godišnjem argumentu, onda će se centar Mesečeve orbite kretati brže u epiciklu BDA i to u obrnutom odnosu kvadrata rastojanja Sunca od Zemlje. Da bi se mogao kretati još brže u obrnutom odnosu njegovog rastojanja, pretpostavićemo da je iz centra orbite D povučena prava linija DE prema Mesečevom apogeju koji je jednom izjednačen, tj., koja je paralelna sa TC i uzećemo da je ugao EDF jednak sa viškom gore pomenutog godišnjeg argumenta u odnosu na rastojanje Mesečevog apogeja od Sunčevog perigeja *in consequentia*, ili, što je isto, uzećemo da je ugao CDF jednak sa dopunom do 360° istinske Sunčeve anomalije. Neka je odnos DF prema DC jednak sa proizvodom odnosa dvostrukog ekscentriciteta *orbis magnusa* prema Sunčevom srednjem rastojanju od Zemlje i odnosa Sunčevog srednjeg dnevnog kretanja od Mesečevog apogeja prema Sunčevom srednjem dnevnom kretanju od svog sopstvenog apogeja, tj., kao $33\frac{7}{8}$ prema 1000 i 52' 27" 16"' prema 59' 8" 10"' zajedno, ili kao 3 prema 100. Zamislimo da centar Mesečeve orbite, koji je smešten u tački F, kruži po epiciklu čiji je centar D i poluprečnik DF, u vremenu tokom kog se tačka D kreće po obimu kruga DABD. Pri takvim uslovima centar Mesečeve orbite opisaće određenu krivu liniju oko centra Q sa brzinom koja će približno biti obrnuto proporcionalna sa kubnim rastojanjem Sunca od Zemlje, kao što i treba da bude.

Račun ovog kretanja je težak, ali se on može pojednostaviti pomoću sledeće aproksimacije. Pretpostavimo, kao i ranije, da srednje rastojanje Meseca od Zemlje iznosi 100000 delova i da ekscentricitet TC iznosi 5505 tih delova. U tom slučaju će linija CB ili CD iznositi $1172\frac{3}{4}$ tih delova, a DF će biti jednako sa $35\frac{1}{5}$ tih delova. Ta linija DF na rastojanju TC pravi ugao na Zemlji koji nastaje premeštanjem centra orbite iz mesta D do mesta F, a kada udvostručimo tu liniju DF u jednom paralelnom položaju, na rastojanju gornje žiže Mesečeve orbite od Zemlje, onda ona na Zemlji pravi isti ugao DF kao i ranije a koji je nastao premeštanjem te gornje žiže. Međutim, na rastojanju Meseca od Zemlje, ta dvostruka linija 2DF na gornjoj žiži koja je paralelna sa prvom linijom DF, napraviće ugao na Mesecu koji je nastao premeštanjem i kretanjem Meseca, a koji se zbog toga može nazvati drugom jednačinom Mesečevog centra. Ta jednačina je na srednjem rastoja-

nju Meseca od Zemlje približno proporcionalna sa sinusom ugla koji sadrži linija DP sa linijom povučenom iz tačke F ka Mesecu, a najveća veličina te jednačine iznosi oko 2' 25". Ugao koji sadrži linija DF sa linijom povučenom iz tačke F ka Mesecu pronađen je ili oduzimanjem ugla EDP od srednje anomalije Meseca ili dodavanjem rastojanja Meseca od Sunca rastojanju Mesečevog apogeja od apogeja Sunca. I kao što se, kada je gore pomenuti zbir manji od polukruga, poluprečnik dodaje sinusu pronađenog ugla, a 2' 25" drugoj jednačini centra, oni se oduzimaju kada je taj zbir manji. I iz tako ispravljenog Mesečevog položaja na orbiti može se pronaći njegova longituda u sizigijama luminara.

Zemljina atmosfera do visine od 35 ili 40 milja prelama Sunčevu svetlost. To prelamanje raspršava i širi svetlost preko Zemljine senke, a raspršena svetlost u blizini granica senke proširuje senku. Zbog toga sam prečniku senke, izračunatom prema paralaksi, dodao 1 ili $1\frac{1}{3}$ minuta pri pomračenju Meseca.

Ipak, teorija Meseca mora se istražiti i dokazati na osnovu fenomena, prvo u sizigijama, potom u kvadraturama i na kraju u oktantima i ko god želi da se prihvati tog posla pronaći će pogodnim podatke Kraljevske opservatorije u Griniču koji se odnose na podne poslednjeg dana decembra 1700. godine za sledeća srednja kretanja Sunca i Meseca: srednje kretanje sunca ☉ 20° 43' 40" i njegovog apogeja ☋ 7° 44' 30", srednje kretanje Meseca ☽ 15° 21' 00" i njegovog apogeja ☽ 8° 20' 00", kao i njegovog uzlaznog čvora ☊ 27° 24' 20" i razlika meridijana između Opservatorije u Griniču i Kraljevske opservatorije u Parizu, koja iznosi 0^h 9' 20". Međutim, srednje kretanje Meseca i njegovih apogeja još uvek nisu dobijeni sa dovoljnom preciznošću.

PROPOZICIJA XXXVI. PROBLEM XVII

Pronaći silu Sunca kojom se pokreće more.

Sila Sunca ML ili PT koja utiče na kretanje Meseca, kada je on u kvadraturama, odnosila se (prema Prop. XXV) prema sili gravitacije na Zemlji kao 1 prema 638092,6, a sila TM – LM ili 2PK dvostruko je veća u Mesečevim sizigijama. Pri spuštanju ka površini Zemlje te sile su umanjene u proporciji rastojanja do centra Zemlje, tj., u odnosu $60\frac{1}{2}$ prema 1. Zbog toga se prva sila na Zemljinoj površini odnosi prema sili gravitacije kao 1 prema 38604600 i tom silom se more spušta u takvim mestima koja su na rastojanju

90 stepeni od Sunca. Drugom silom, koja je dvaput jača, more se podiže ne samo na mestima koja su direktno ispod Sunca, već i na onim mestima koja su direktno suprotna njemu. Zbir tih sila odnosi se prema gravitaciji kao 1 prema 12868200. Pošto ista sila proizvodi isto kretanje, bez obzira na to da li spušta vodu na onim mestima koja su na rastojanju od 90 stepeni od Sunca ili ih podiže na mestima koja su direktno ispod Sunca ili direktno suprotno od njega, onda će pomenuti zbir predstavljati ukupnu silu Sunca koja utiče na more i imaće isti efekat kada bi se upotrebila za podizanje mora na mestima koja su direktno ispod Sunca ili direktno suprotno od njega i kada uopšte ne bi delovala na onim mestima koja su na rastojanju od 90 stepeni od Sunca.

Takva sila Sunca deluje na more u bilo kom datom mestu kada je Sunce istovremeno i vertikalno i na svom srednjem rastojanju od Zemlje. U ostalim položajima Sunca, njegova sila kojom podiže more, direktno je proporcionalna sa sinus versusom dvostruke visine Sunca iznad horizonta mesta, a obrnuto je proporcionalna sa kubnim rastojanjem od Zemlje.

Kor. Pošto centrifugalna sila delova Zemlje, koja nastaje iz dnevnog kretanja Zemlje i koja se prema sili gravitacije odnosila kao 1 prema 289, podiže vodu ispod ekvatora do visine koja prelazi onu ispod polova za 85472 *pariskih* stopa (kao što je pokazano u Prop. XIX), onda će sila Sunca, koja se prema sili gravitacije odnosi kao 1 prema 12868200 i koja se, zbog toga, prema centrifugalnoj sili odnosi kao 289 prema 12868200, ili kao 1 prema 44527, moći da podigne vodu na onim mestima koja su direktno ispod ili direktno suprotno od Sunca do visine koja prelazi onu na mestima koja su na rastojanju od 90 stepeni od Sunca za samo jednu *parisku* stopu i $113\frac{1}{30}$ inča. A ta se veličina odnosi prema veličini od 85472 stopa kao 1 prema 44527.

PROPOZICIJA XXXVII. PROBLEM XVIII

Pronaći silu Meseca kojom se pokreće more.

Sila Meseca kojom se pomera more izvodi se iz njenog odnosa prema sili Sunca, a taj odnos se dobija iz odnosa kretanja mora, koja su posledica tih sila. Pre ušća reke Avon, tri milje ispod Bristola, visina porasta vode u prolećnim i jesenjim sizigijama luminara, (prema posmatranjima Semjuela Šturmija) iznosila je oko 45 stopa, dok je u kvadraturama iznosila samo 25 stopa. Prva od tih

visina proizlazi iz zbira gore pomenutih sila, a poslednja iz njihove razlike. Prema tome, ako pretpostavimo da S i L predstavljaju sile Sunca i Meseca dok se nalaze na ekvatoru i na srednjim rastojanjima od Zemlje, onda će se L + S odnositi prema L – S kao 45 prema 25 ili kao 9 prema 5.

Prema posmatranjima Semjuela Kolpresa, u Plimutu se srednja visina plime podiže do oko 16 stopa, a tokom proleća ili jeseni visina u sizigijama može prevazići onu u kvadraturama za više od 7 ili 8 stopa. Ako pretpostavimo da najveća razlika tih visina iznosi 9 stopa, onda će se L + S odnositi prema L – S kao $20\frac{1}{2}$ prema $11\frac{1}{2}$, ili kao 41 prema 23. Ta proporcija je u dovoljnoj meri saglasna sa prethodnom. Međutim, usled najveće plime u Bristolu, bolje je osloniti se na Šturmijeva posmatranja, pa ćemo zbog toga i koristiti proporciju 9 prema 5 sve dok ne obezbedimo nešto sigurnije.

Usled uzajamnog kretanja vode, najveća plima ne dešava se tokom sizigija luminara, kao što smo rekli ranije, već je treća po redu posle sizigija ili sledi nakon trećeg prolaska Meseca kroz meridijan mesta posle sizigija, tj., kao što je Šturmi uočio jeste treća nakon dana novog ili punog Meseca, ili približno 12 časova posle novog ili punog Meseca, pa se zbog toga dešava približno $\frac{40}{3}$ časova posle novog ili punog Meseca. U ovoj luci plime se dešavaju približno 7 časova nakon konjunkcije Meseca i meridijana mesta, pa zbog toga slede posle konjunkcije Meseca i meridijana kada je Mesec na rastojanju od Sunca ili u opoziciji sa njim na oko 18 ili 19 stepeni *in consequentia*. Letnja i zimska doba ne dostižu svoje visine u samim solsticijima, već kada je Sunce odvojeno od solsticija za oko desetinu dela svog ukupnog kruga, tj., za oko 36 ili 37 stepeni. Na sličan način, najveće plime podižu se nakon konjunkcije Meseca i meridijana mesta, kada je Mesec odvojen od Sunca, ili kad je u opoziciji s njim, za oko desetinu dela ukupnog kretanja od jedne najveće plime ka narednoj najvećoj plimi. Pretpostavimo da to rastojanje iznosi oko $18\frac{1}{2}$ stepeni. Sila Sunca na tom rastojanju Meseca od sizigija i kvadratura uvećaće ili umanjiti onaj deo kretanja mora koji nastaje iz kretanja Meseca manje nego u samim sizigijama i kvadraturama i to u odnosu poluprečnika prema kosinusu dvostrukog tog rastojanja, ili za ugao od 37 stepeni, tj., u odnosu 10000000 prema 7986355. Zbog toga se u prethodnoj proporciji umesto S mora koristiti 0,7986355S.

Potom, sila Meseca u kvadraturama mora se umanjiti s obzirom na njegovu deklinaciju od ekvatora, jer, Mesec u tim kvadraturama, tj., na $18\frac{1}{2}$ stepeni posle kvadratura, odstupa od ekvatora za oko 23° 13', a sila bilo kog luminara, kojom se pokreće more, umanjuje se pri deklinaciji od ekvatora približno proporcionalno sa kvadratom kosinusa deklinacije. Zbog toga sila Meseca u tim kvadraturama iznosi samo 0,8570327L, pri čemu se L + 0,7986355S odnosi prema 0,8570327L – 0,7986355S kao 9 prema 5.

Nadalje, prečnici orbite, po kojoj se Mesec kreće bez obzira na ekscentricitet, međusobno se odnose kao 66 prema 70. Zbog toga se rastojanje Meseca od Zemlje u sizigijama odnosi prema njegovom rastojanju u kvadraturama, *caeteris paribus*, kao 69 prema 70, a njegovo rastojanje, kada se nalazi na $18\frac{1}{2}$ stepeni posle sizigija pri čemu se dešava najveća plima i kada se nalazi na $18\frac{1}{2}$ stepeni posle kvadratura pri čemu se dešava najmanja plima, odnosi se prema srednjem rastojanju kao 69,098747 i 69,897345 prema $69\frac{1}{2}$. Međutim, sila Meseca kojom se pokreće more obrnuto je proporcionalna sa kubnim rastojanjem i zbog toga se njegove sile, pri najvećim i najmanjim rastojanjima, odnose prema srednjem rastojanju kao 0,9830427 i 1,017522 prema 1. Odatle sledi da se 1,017522L × 0,7986355S odnosi prema 0,9830427 × 0,8570327L – 0,7986355S kao 9 prema 5, a S prema L kao 1 prema 4,4815. Pošto se sila Sunca prema sili gravitacije odnosi kao 1 prema 12868200, onda će se sila Meseca prema sili gravitacije odnositi kao 1 prema 2671400.

Kor. 1. Pošto sila Sunca podiže vodu na visinu od 1 stope i $11\frac{1}{30}$ inča, onda će sila Meseca podići tu istu vodu na visinu od 8 stopa i $7\frac{5}{22}$ inča. Kada spojimo te sile, voda će se podići na visinu od $10\frac{1}{2}$ stopa, a kada je Mesec u svom perigeju, voda će se podići na visinu od $12\frac{1}{2}$ stopa, i više kada vetar doprinosi plimi. Takva sila sasvim je dovoljna da utiče na kretanje mora i potpuno se slaže sa proporcijom tih kretanja; jer u takvim morima koja su slobodna i otvorena od istoka ka zapadu, kao što je recimo Tihi okean ili oni predeli Atlantskog okeana i Etiopskog mora koja su van tropskog pojasa, voda se obično podiže do 6, 9, 12 ili 15 stopa. Ipak, kaže se da su u Tihom okeanu, koji ima veću dubinu i veću širinu, plime veće nego u Atlantskom okeanu ili u Etiopskom moru, jer da bi se dostigla puna plima, širina mora od istoka ka zapadu mora biti veća od 90 stepeni. U Etiopskom moru voda se manje podiže u tropskim, nego u umerenim pojasevima, usled suženja mora između Afrike i južnih delova Amerike. Na sredini otvorenog mora voda se ne može podići, a da istovremeno ne opada kako na istočnim tako i na zapadnim obalama, a u uskim morima voda na tim

obalama opada naizmenično, pa su plime i oseke uobičajeno male na ostrvima koja su udaljenija od kopna. Nasuprot tome, u nekim lukama, u kojim voda sa većom jačinom protiče kroz uske kanale kako bi naizmenično ispunila i ispraznila zaliv, plima i oseka moraju biti veće nego obično, kao što se dešava u Plimutu i Čepstov Bridžu u Engleskoj, zatim na planini Mon Sen Mišel i u gradu Avranš u Normandiji, kao i u Kambaji i Peguu u Istočnim Indijama. Na tim mestima plime i oseke su toliko jake da ponekad potope obale, a ponekad ih ostave suvim na mnogo milja. Ta sila plime i oseke ne prekida se sve dok ne podigne ili ne spusti vodu do 30, 40, 50 ili više stopa. Slično se dešava i u dugim i plitkim kanalima kao što je Magelanov moreuz i kao što su kanali koji okružuju Englesku. Plime i oseke u takvim lukama i moreuzima uvećane su iznad mere. Ipak, na onim obalama koje se se strmo spuštaju prema dubokom i otvorenom moru i gde se voda slobodno podiže i spušta, proporcija plime i oseke odgovara silama Sunca i Meseca.

Kor. 2. Pošto se sila Meseca kojom se pokreće more odnosi prema sili gravitacije kao 1 prema 2871400, onda je jasno da je ta sila mnogo manja od one koja se pojavljuje u statičkim i hidrostatičkim eksperimentima, pa čak i u onim eksperimentima sa klatnima. Ta sila se samo tokom plima i oseka vidljivo manifestuje.

Kor. 3. Pošto se sila kojom Mesec pokreće more odnosi prema sličnoj sili Sunca kao 4,4815 prema 1 i pošto su te sile (prema Kor. 14, Prop. LXVI, Knjige I) proporcionalne sa gustinama Sunca i Meseca i sa njihovim vidljivim prečnicima na kub zajedno, onda će se gustina Meseca odnositi prema gustini Sunca kao 4,4815 direktno, a obrnuto kao kubni prečnik Meseca prema kubnom prečniku Sunca; tj. kao 4891 prema 1000, zbog toga što vidljivi prečnici Sunca i Meseca iznose 31' $16\frac{1}{2}$" i 32' 12". Međutim, gustina Sunca odnosila se prema gustini Zemlje kao 1000 prema 4000, pa se zbog toga gustina Meseca odnosi prema gustini Zemlje kao 4891 prema 4000, ili kao 11 prema 9. Prema tome, telo Meseca je veće gustine i više *zemaljsko* od same Zemlje.

Kor. 4. Pošto se, prema astronomskim posmatranjima, istinski prečnik Meseca odnosi prema istinskom prečniku Zemlje kao 100 prema 365, onda će se masa materije na Mesecu odnositi prema masi materije na Zemlji kao 1 prema 39,788.

Kor. 5. Ubrzavajuća gravitacija na površini Meseca biće oko tri puta manja od ubrzavajuće gravitacije na površini Zemlje.

Kor. 6. Rastojanje centra Meseca od centra Zemlje odnosiće se prema rastojanju centra Meseca od zajedničkog centra gravitacije Zemlje i Meseca kao 40,788 prema 39,788.

Kor. 7. Srednje rastojanje centra Meseca od centra Zemlje (u oktantima Meseca) iznosiće približno $60\frac{1}{2}$ najvećih poluprečnika Zemlje. Jer, najveći poluprečnik Zemlje iznosi 19658600 *pariskih* stopa, a srednje rastojanje centra Zemlje i centra Meseca, koje se sastoji iz $60\frac{1}{2}$ takvih poluprečnika, jednako je sa 1187379440 stopa. To se rastojanje (prema prethodnom Korolaru) odnosi prema rastojanju centra Meseca od zajedničkog centra gravitacije Zemlje i Meseca kao 40,788 prema 39,788 i zbog toga to poslednje rastojanje iznosi 1158268534 stopa. Pošto Mesec, u odnosu na fiksne zvezde, izvodi svoju revoluciju za $27^{d}\ 7^{h}\ 43\frac{4}{9}'$, onda će sinus versus tog ugla koji Mesec opisuje u jednoj minuti vremena iznositi 12752341 sa poluprečnikom 1 000 000 000 000 000 i kao što se poluprečnik odnosi prema tom sinus versusu, tako će se i 1158268534 stope odnositi prema 14,7706353 stope. Prema tome, Mesec, koji pada prema Zemlji pod dejstvom takve sile koja ga zadržava u njegovoj orbiti, u jednoj minuti vremena opisaće 14,7706353 stope. Ako tu silu uvećamo u proporciji $178\frac{29}{40}$ prema $177\frac{29}{40}$ dobićemo ukupnu gravitaciju na orbiti Meseca (prema Kor. Prop. III), a Mesec koji pada pod dejstvom takve sile opisaće 14,8538067 stopa u jednoj minuti vremena. Na šezdesetom delu rastojanja Meseca od centra Zemlje, tj., na rastojanju od 197896573 stope od centra Zemlje, telo koje pada usled sopstvene težine opisaće 14,8538067 stopa u jednoj sekundi vremena. Prema tome, na rastojanju od 19615800, što predstavlja jedan srednji poluprečnik Zemlje, teško telo opisaće pri padanju 15,11175 stopa ili 15 stopa, 1 inč i $4\frac{1}{11}$ linija tokom istog vremena. To predstavlja padanje tela na širini od 45 stepeni.

Shodno prethodnoj tabeli iz Propozicije XX, padanje tela u širini Pariza biće malo veće i to za razliku od $\frac{2}{3}$ delova linije. Prema tom računu, teška tela koja padaju u vakuumu u širini Pariza opisaće približno 15 *pariskih* stopa, 1 inč i $4\frac{25}{33}$ linija u jednoj minuti vremena. I ako je gravitacija umanjena tako što je sklonjena veličina koja je jednaka sa centrifugalnom silom koja nastaje u toj širini od Zemljinog dnevnog kretanja, onda će teška tela koja tu padaju u jednoj sekundi opisati 15 stopa, 1 inč i $1\frac{1}{2}$ linija. Kao što smo pokazali ranije u prop. IV i XIX, teška tela zaista padaju tom brzinom u širini Pariza.

Kor. 8. Srednje rastojanje centra Zemlje i centra Meseca u sizigijama Meseca jednako je sa 60 najvećih poluprečnika Zemlje, oduzimajući pritom samo $\frac{1}{30}$ dela poluprečnika. A u kvadraturama Meseca srednje rastojanje istih centara iznosi $60\frac{5}{6}$ takvih poluprečnika Zemlje, jer ta dva rastojanja odnose se prema srednjem rastojanju Meseca u oktantima kao 69 i 70 prema $69\frac{1}{2}$ (prema Prop. XXVIII).

Kor. 9. Srednje rastojanje centra Zemlje i centra Meseca u sizigijama Meseca jednako je sa 60 srednjih poluprečnika Zemlje i sa $\frac{1}{10}$ dela od jednog poluprečnika. A u kvadraturama Meseca, srednje rastojanje istih centara iznosi 61 srednjih poluprečnika Zemlje, oduzimajući pritom $\frac{1}{30}$ dela jednog poluprečnika.

Kor. 10. U sizigijama Meseca njegova srednja paralaksa na širinama od 0, 30, 38, 45, 52, 60 i 90 stepeni iznosi 57' 20", 57' 16", 57' 14", 57' 12", 57' 10", 57' 8" i 57' 4", tim redom.

U ovim proračunima nisam razmatrao magnetno privlačenje Zemlje čija je veličina veoma mala i nepoznata. Ako se ta veličina ikad pronađe, onda će se iz fenomena preciznije odrediti dužinu stepena meridijana, dužine izohronih klatna na različitim paralelama, zakoni kretanja mora, Mesečeva paralaksa kao i vidljivi prečnici Sunca i Meseca i tada ćemo moći da ponovimo ove proračune sa većom preciznošću.

PROPOZICIJA XXXVIII. PROBLEM XIX

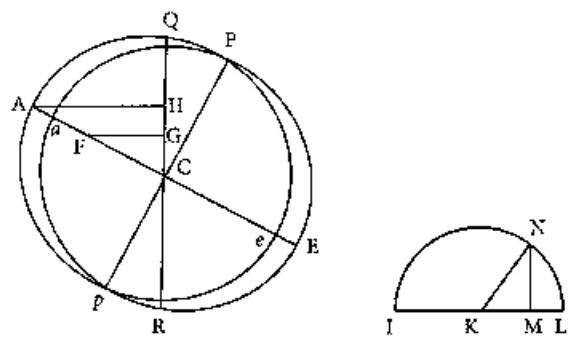
Pronaći oblik Meseca.

Ako je telo Meseca tečno kao naše more, onda će se sila Zemlje, kojom se ta tečnost podiže na najbližim i na najudaljenijim delovima, odnositi prema sili Meseca, kojom se naše more podiže na mestima koja su ispod Meseca i suprotno od njega, kao ubrzavajuća gravitacija Meseca ka Zemlji prema ubrzavajućoj gravitaciji Zemlje ka Mesecu i kao prečnik Meseca prema prečniku Zemlje, zajedno, tj., kao 39,788 prema 1 i 100 prema 365, zajedno, ili kao 1081 prema 100. Prema tome, pošto je naše more podignuto do $8\frac{3}{5}$ stopa pomoću sile Meseca, onda će se lunarna tečnost podići do 93 stope pomoću sile Zemlje. Na taj način, oblik Meseca će biti sferan, a njegov najveći prečnik kada se produži proći će kroz centar Zemlje i prevazići će prečnike koji su normalni u odnosu na njega za 186 stopa. Takav oblik ima Mesec i mora ga imati od samog početka. Q.E.I.

Kor. Odatle sledi da na Zemlju uvek gleda ista strana Meseca, kao i to da telo Meseca u bilo kom drugom položaju ne može biti u stanju mirovanja, već će se uvek vratiti tom položaju pomoću libracionog kretanja. Ipak, usled slabih sila koje deluju na njih, te libracije moraju biti izuzetno spore, kako bi se strana Meseca, koja uvek gleda na Zemlju, mogla okrenuti i ka drugoj žiži Mesečeve orbite (prema Prop. XVII), a da se pritom ne povuče odmah nazad i ne preokrene ponovo ka Zemlji.

LEMA I

Ako APE*p* predstavlja Zemlju ravnomerne gustine, označenu sa centrom C, polovima P i *p* i ekvatorom AE i ako pretpostavimo da je oko centra C sa poluprečnikom CP opisana sfera P*ape* i da QR označava ravan na kojoj se prava linija, koja je povučena od centra Sunca ka centru Zemlje, nalazi pod pravim uglom, zatim, ukoliko pretpostavimo da nekoliko čestica ukupne spoljašnjosti Zemlje *Pap*A*Pep*E, bez visine spomenute sfere, nastoje da se udaljavaju sa ove i one strane od ravni QR, pri čemu je svaka čestica svojom silom proporcionalna sa rastojanjem od te ravni – onda, na prvom mestu, tvrdim da će se ukupna sila i dejstvo svih čestica, koje su smeštene u ekvatorijalnom krugu AE i koje su ravnomerno raspoređene van kruga i obuhvaćene poput prstena, a pomoću kojih se Zemlja rotira oko svog centra, odnositi prema ukupnoj sili i dejstvu isto tolikog broja čestica u tački A ekvatora koja se nalazi na najvećem rastojanju od ravni QR i pomoću kojih se Zemlja rotira oko svog centra sa sličnim kružnim kretanjem, kao 1 prema 2. To kružno kretanje izvodiće se oko ose koja se nalazi u zajedničkom preseku ekvatora i ravni QR.



Neka je iz centra K sa prečnikom IL opisan polukrug INL. Pretpostavićemo da je poluobim INL podeljen na bezbroj jednakih delova i da su iz nekoliko delova N prema prečniku IL uzeti sinusi NM. Onda će zbir kvadrata svih sinusa NM biti jednak sa zbirom kvadrata sinusa KM, a oba zbira zajedno biće jednaka sa zbirom kvadrata isto toliko poluprečnika KN. Zbog toga će zbir kvadrata svih sinusa NM iznositi samo polovinu zbira kvadrata isto tolikog broja poluprečnika KN.

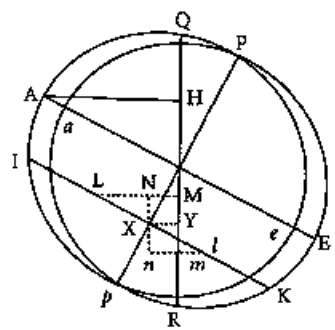
Zatim ćemo pretpostaviti da je obim kruga AE podeljen na isto toliko malih jednakih delova i da je iz svakog tog dela P spuštena normala FG na ravan QR, a normala AH iz tačke A. Onda će (prema pretpostavci) sila kojom se čestica F udaljava od ravni QR biti proporcionalna sa normalom PG, a kada se ta sila pomnoži sa rastojanjem CG, onda će predstavljati snagu čestice F pri pokretanju Zemlje oko njenog centra. Prema tome, snaga čestice u mestu F odnosiće se prema snazi čestice u mestu A kao FG × GC prema AH × HC, tj., kao FC^2 prema AC^2. Stoga će se ukupna snaga svih čestica F, koje se nalaze u svojim odgovarajućim mestima F, odnositi prema ukupnoj snazi isto tolikog broja čestica u A kao zbir svih FC^2 prema zbiru svih AC^2, ili kao 1 prema 2 (na osnovu onog što smo pokazali ranije).

Pošto je delovanje tih čestica usmereno u pravcu linija koje se udaljavaju od ravni QR, i to podjednako sa obe strane te ravni, onda će one činiti obim ekvatorijalnog kruga i zajedno sa Zemljom rotiraće oko ose koja se nalazi i u ravni QR i na ekvatoru.

LEMA II

Na drugom mestu, prema istim pretpostavkama, tvrdim da će se ukupna sila ili snaga svih čestica, koje se nalaze svuda oko sfere, a koje Zemlju rotiraju oko pomenute ose, odnositi prema ukupnoj sili isto tolikog broja čestica, koje su ravnomerno raspoređene oko celokupnog obima ekvatora AE poput prstena, a koje Zemlju pokreću sa sličnim kružnim kretanjem, kao 2 prema 5.

Neka je IK bilo koji manji krug koji je paralelan sa ekvatorom AE i neka su L i *l* bilo koje dve jednake čestice tog kruga koje su smeštene van sfere *Pape*. Ako na ravan QR, koja je pod pravim uglom u odnosu na poluprečnik povučen ka Suncu, spustimo normale LM i *lm*, onda će ukupne sile kojima se te čestice udaljavaju od ravni QR biti proporcionalne sa normalama LM i *lm*. Neka je prava linija L*l* povučena paralelno ravni *Pape* i neka je preseca na pola u X; zatim ćemo kroz tačku X povući N*n* paralelno sa tom ravni QR tako da seče normale LM i *lm* u N i *n*; onda ćemo na ravan QR spustiti normalu XY. Tada će suprotne sile čestica L i *l* kojima se Zemlja rotira u suprotnu stranu biti proporcionalne sa LM × MC i sa *lm* × *m*C, tj., sa LN × MC + NM × MC i sa *ln* × *m*C − *nm* × *m*C ili sa LN × MC + NM × MC i sa LN × *m*C − NM × *m*C, kao i sa, a razlika tih veličina, LN × *Mm* − NM × (MC + *m*C), predstavlja silu obe čestice uzetih zajedno, koje rotiraju Zemlju. Pozitivan deo te razlike, LN × *Mm* ili 2LN × NX, odnosi se prema 2AH × HC, tj., prema sili te dve čestice koje su iste veličine i koje su smeštene u A, kao LX^2 prema AC^2. Negativan deo (MC + *m*C) ili 2XY + CY, odnosi se prema toj sili 2AH × HC kao CX^2 prema AC^2. Prema tome, razlika delova, ili sila dve čestice L i *l* uzete zajedno, a koje rotiraju Zemlju, odnosi se prema sili dve čestice, koje su jednake sa prethodnim i koje su smeštene u A, i koje rotiraju Zemlju na sličan način, kao $LX^2 - CX^2$ prema AC^2. Međutim, ako se obim kruga IK podeli na beskonačan broj malih i jednakih delova L, onda će se zbir svih LX^2 odnositi prema isto tolikom broju IX^2 kao 1 prema 2 (prema Lemi I), zatim, prema isto tolikom broju AC^2, kao IX^2 prema $2AC^2$, a isto toliki broj CX^2 prema isto toliko AC^2 kao $2CX^2$ prema $2AC^2$. Odatle sledi da će se ukupne sile svih čestica na obimu kruga IK odnositi prema ukupnim silama isto tolikog broja čestica u mestu A kao $IX^2 - 2CX^2$ prema $2AC^2$ i zbog toga će se (prema Lemi I), prema ukupnoj sili isto tolikog broja čestica na obimu kruga AE, odnositi kao $IX^2 - 2CX^2$ prema AC^2.



Zatim, ako zamislimo da je prečnik sfere P*p* podeljen na beskonačan broj jednakih delova, na kojima se nalazi isti broj krugova IK, onda će materija na obimu svakog kruga IK biti proporcionalna sa IX^2 i zbog toga će sila te materije koja rotira Zemlju biti proporcionalna sa proizvodom IX^2 i $IX^2 - 2CX^2$. A sila iste te materije, ukoliko je smeštena na obimu kruga AE, biće proporcionalna sa proizvodom IX^2 i AC^2. Prema tome, sila svih čestica ukupne mate-

rije koja je smeštena van sfere na obimima svih krugova odnosi se prema sili sličnog broja čestica koje su smeštene na obimu najvećeg kruga AE kao proizvod svih IX^2 i $IX^2 - 2CX^2$ prema proizvodu isto toliko IX^2 i AC^2, tj., kao proizvod svih $AC^2 - CX^2$ i $AC^2 - 3CX^2$ prema proizvodu isto tolikog broja $AC^2 - \frac{1}{2}CX^2$ i AC^2, tj., kao $AC^4 - 4AC^2 \times CX^2 + 3CX^4$ prema isto tolikom broju $AC^4 - AC^2 \times CX^2$, tj., kao ukupna količina fluenta, čiji je fluks $AC^4 - 4AC^2 \times CX^2 + 3CX^4$, prema ukupnoj količini fluenta, čiji je fluks $AC^4 - AC^2 \times CX^2$ i zbog toga, prema metodi fluksa, kao $AC^4 \times CX - \frac{4}{3}AC^2 \times CX^3 + \frac{3}{5}CX^5$ prema $AC^4 \times CX - \frac{1}{3}AC^2 \times CX^3$, tj., ako CX označimo sa C*p* ili sa AC, kao $\frac{4}{15}AC^5$ prema $\frac{2}{3}AC^5$, ili kao 2 prema 5. Q.E.D.

LEMA III

Na trećem mestu, prema istim pretpostavkama, tvrdim da će se kretanje Zemlje, oko gore pomenute ose, a koje nastaje iz kretanja svih čestica, odnositi prema kretanju gore pomenutog prstena oko iste te ose u proporciji koja se sastoji iz odnosa materije Zemlje prema materiji prstena i iz odnosa tri kvadrata četvrtine luka bilo kog kruga prema dva kvadrata njegovih prečnika, tj., u proporciji materije prema materiji i broja 925275 prema broju 1000000.

Kretanje cilindra koji se obrće oko ose koja miruje odnosi se prema kretanju upisane sfere koja se obrće zajedno sa njim kao bilo koja četiri jednaka kvadrata prema tri kruga upisanih u tri takva kvadrata. Kretanje tog cilindra odnosi se prema kretanju izuzetno tankog prstena koji okružuje i sferu i cilindar u njihovoj zajedničkoj dodirnoj tački kao dvostruka materija u cilindru prema trostrukoj materiji u prstenu. A kretanje tog prstena, koji se ravnomerno kreće oko ose cilindra, odnosi se prema svom ravnomernom kretanju oko svog prečnika u istom periodičnom vremenu kao obim kruga prema dvostrukom prečniku.

HIPOTEZA II

Ako se drugi delovi Zemlje sklone, a preostali prsten nastavi da se kreće godišnjim kretanjem oko Sunca po orbiti Zemlje, dok se u međuvremenu pri dnevnom kretanju obrće oko svoje ose koja je nagnuta na

ravan ekliptike pod uglom od $23\frac{1}{2}$ stepeni, onda će kretanje tačaka ravnodnevice biti isto bez obzira na to da li je prsten tečan ili se sastoji iz tvrde i krute materije.

PROPOZICIJA XXXIX. PROBLEM XX

Pronaći precesiju ravnodnevica.

Srednje časovno kretanje Mesečevih čvorova po kružnoj orbiti, kada se čvorovi u kvadraturama, iznosilo je $16''\ 35'''\ 16^{IV}\ 36^{V}$, polovina od toga, tj. $8''\ 17'''\ 38^{IV}\ 18^{V}$ (usled gore objašnjenih razloga) jeste srednje časovno kretanje čvorova po takvoj orbiti, čije kretanje u jednoj zvezdanoj godini iznosi 20° 11' 46". Prema tome, čvorovi Meseca u takvoj orbiti godišnje bi se premeštali 20° 11' 46", *in antecedentia*. Ako bi postojalo više meseca, onda bi kretanje čvorova svakog od njih (prema Kor. 16, Prop. LXVI, Knjige I) bilo proporcionalno sa svojim periodima. Ako bi se Mesec, iznad same površine Zemlje, rotirao tokom zvezdanog dana, onda bi se godišnje kretanje čvorova tog Meseca odnosilo prema 20° 11' 46" kao zvezdani dan, $23^h\ 56'$, prema periodu Meseca, $27^d\ 7^h\ 43'$, ili kao 1436 prema 39343. Isto bi se desilo i sa čvorovima prstena Meseca koji okružuju Zemlju, bez obzira na to da li su ti meseci razdvojeni i ne dodiruju jedan drugog, ili su pretvoreni u tečnost pa oblikuju jedan opšti prsten, i bez obzira na to da li taj prsten postaje tvrd i nesavitljiv.

Zatim ćemo pretpostaviti da je taj prsten po količini materije jednak sa ukupnom spoljašnjošću Zemlje P*ap*A P*ep*P, koja se nalazi van sfere P*ape* (videti sliku Leme II). Pošto se ta sfera prema spoljašnjosti Zemlje odnosi kao aC^2 prema $AC^2 - aC^2$, tj. kao 52441 prema 459, (jer se najmanji poluprečnik Zemlje PC ili *a*C odnosi prema njenom najvećem poluprečniku AC kao 229 prema 230). Ako taj prsten okružuje Zemlju oko ekvatora i ako zajedno kruže oko prečnika prstena, onda će se kretanje tog prstena (prema Lemi III) odnositi prema kretanju unutrašnje sfere kao 459 prema 52441 i kao 1000000 prema 925275 zajedno, tj. kao 4590 prema 485223. Odatle sledi da će se kretanje prstena odnositi prema zbiru kretanja prstena i sfere kao 4590 prema 489813. Ako se prsten pripoji sferi i ako joj prenese svoje kretanje, usled kojeg se čvorovi ili tačke ravnodnevice udaljavaju, onda će se preostalo kretanje u prstenu

odnositi prema svom prethodnom kretanju kao 4590 prema 489813. Zbog toga će se i kretanje tačaka ravnodnevice umanjiti u tom istom odnosu. Godišnje kretanje tačaka ravnodnevice tela, koje se sastoji i iz prstena i iz sfere, odnosiće se prema kretanju od 20° 11' 46" kao 1436 prema 39343 i kao 4590 prema 489813 zajedno, ili kao 100 prema 292369. Međutim, sile usled kojih se čvorovi nekoliko meseca (kao što je objašnjeno ranije), kao i tačke ravnodnevnice prstena, udaljavaju (sile 3IT, u slici Prop. XXX) u nekoliko pojedinačnih čestica, proporcionalne su sa rastojanjem tih čestica od ravni QR. Usled tih sila, čestice se udaljavaju od te ravni (prema Lemi II) ako je materija prstena raspoređena preko cele površine sfere, na način kao u figuri P*ap*AP*ep*E, kako bi sačinila taj spoljašnji deo Zemlje, onda će ukupna sila ili snaga svih čestica kojima se Zemlja rotira oko bilo kog prečnika ekvatora i kojima se pomeraju tačke ravnodnevice, biti manja nego ranije i to u proporciji 2 prema 5. Prema tome, godišnje regresivno kretanje ravnodnevica odnosiće se prema 20° 11' 46" kao 10 prema 73092, tj., iznosiće 9" 56"' 50^{IV}.

Pošto je ravan ekvatora nagnuta na ravan ekliptike, to kretanje će se umanjiti u proporciji sinusa 91706, (koji je kosinus od $23\frac{1}{2}$ stepena) prema poluprečniku 100000, a preostalo kretanje će iznositi 9" 7"' 20^{IV}, što i jeste godišnja precesija ravnodnevica koje nastaju iz sile Sunca.

Sila Meseca koja utiče na kretanje mora odnosila se prema sili Sunca približno kao 4,4815 prema 1, pa će i sila Meseca koja utiče na kretanje ravnodnevica prema sili Sunca biti u istom tom odnosu. Godišnja precesija ravnodnevica koja proizlazi iz sile Meseca iznosi 40" 52"' 52^{IV}, a ukupna godišnja precesija koja proizlazi iz obe sile zajedno iznosiće 50" 00"' 12^{IV}. To je količina kretanja koja je saglasna sa fenomenima; jer, prema astronomskim posmatranjima, precesija ravnodnevnica iznosi oko 50" godišnje.

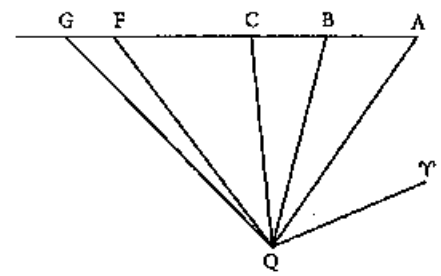
Ako visina Zemlje na ekvatoru prevazilazi njenu visinu na polovima za više od $17\frac{1}{6}$ milja, onda će materija Zemlje biti ređa na površini nego u centru i onda će se precesija ravnodnevica uvećati usled veće visine, a umanjiti usled veće retkosti.

Sada smo objasnili sistem Sunca, Zemlje, Meseca i planeta, a preostaje nam da dodamo nešto i o kometama.

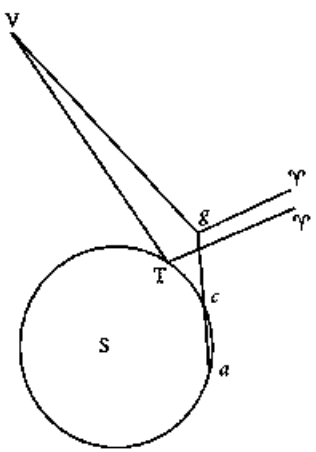
LEMA IV

Komete se nalaze iznad Meseca i u oblastima planeta.

Astronomi su smestili komete iznad Meseca jer je pronađeno da nemaju dnevnu paralaksu, pa njihova godišnja paralaksa predstavlja ubedljiv dokaz njihovog silaska u oblasti planeta. Sve komete, koje se kreću shodno poretku znakova, na kraju svojih pojavljivanja postaju više nego uobičajeno spore i retrogradne, kada se Zemlja nalazi između njih i Sunca, a više nego uobičajeno brze, kada Zemlja prilazi heliocentričnoj opoziciji sa njima. S druge strane, one komete koje se kreću suprotno poretku znakova, na kraju svojih pojavljivanja izgledaju brže nego što bi trebalo da budu, ako je Zemlja između njih i Sunca, a sporije, čak i retrogradne, kada je Zemlja na drugoj strani svoje orbite. Sva ta pojavljivanja uglavnom proizlaze iz različitih položaja koje Zemlja zadobija pri svom kretanju, na sličan način kao što se događa i sa planetama, čije kretanje ponekad izgleda retrogradno, ponekad sporije, a ponekad brže, progresivnije, s obzirom na to da li se kretanje Zemlje poklapa sa njihovim kretanjima, ili je usmereno suprotno od njih. Ako se Zemlja kreće s iste strane kao i kometa, a ako je njeno ugaono kretanje oko Sunca brže tako da će se prave linije povučene od Zemlje prema kometi spajati prema delovima koji se nalaze iza komete, onda će kretanje komete, viđeno sa Zemlje, izgledati retrogradno, usled njenog sporijeg kretanja. Čak i ako je Zemlja sporija od komete, pošto se oduzme kretanje Zemlje, kretanje komete izgledaće u najmanju ruku usporeno. Međutim, ako Zemlja teži suprotnoj strani, onda će kretanje komete odatle izgledati ubrzano. Iz tog vidljivog ubrzanja, usporenja ili regresivnog kretanja, može se zaključiti rastojanje komete na sledeći način. Neka ♈QA, ♈QB i ♈QC predstavljaju tri posmatrane longitude komete u vremenu njenog prvog pojavljivanja, a ♈QF posmatranu longitudu pre iščezavanja. Povući ćemo pravu liniju ABC čiji se delovi AB i BC, koji su odsečeni pravim linijama QA i QB, QB i QC, mogu međusobno odnositi kao dva vremena između tri prva posmatranja. Spojićemo QG i produžićemo AC do G, tako da se



AG može odnositi prema AB kao vreme između prvog i poslednjeg posmatranja prema vremenu između prvog i drugog. Ako se kometa kreće ravnomerno pravolinijski i ako Zemlja miruje ili se na sličan način kreće ravnomerno pravolinijski, onda će ugao ♈QG predstavljati dužinu komete u vremenu poslednjeg posmatranja. Prema tome, ugao FQG, koji predstavlja razliku dužine, proizlazi iz nejednakosti kretanja komete i Zemlje i ako se Zemlja i kometa kreću po suprotnim stranama, taj ugao se dodaje uglu ♈QG, usled čega će se ubrzati vidljivo kretanje komete. Međutim, ako se kometa kreće u istom pravcu kao i Zemlja, taj ugao se oduzima, pa ili usporava kretanje komete ili ga čini retrogradnim, kao što smo upravo objasnili. Prema tome, taj ugao uglavnom proizlazi iz kretanja Zemlje i može se ispravno smatrati paralaksom komete, zanemarujući, pritom, mala uvećanja ili umanjenja koja mogu nastati iz nejednakog kretanja komete po svojoj orbiti. Na taj način, iz te paralakse možemo zaključiti rastojanje komete. Neka S predstavlja Sunce, *acT orbis magnus*, *a* mesto Zemlje pri prvom posmatranju, *c* mesto Zemlje pri trećem posmatranju, T mesto Zemlje pri poslednjem posmatranju, a T♈ pravu liniju koja je povučena ka početku znaka Ovna. Napravićemo da je ugao ♈TV jednak sa uglom ♈QF, tj., jednak sa dužinom komete u vremenu kada je Zemlja u T; spojićemo *ac* i produžićemo je do *g*, tako da se *ag* može odnositi prema *ac* kao AG prema AC; onda će *g* biti mesto do kog će Zemlja stići u vremenu poslednjeg posmatranja, ako je nastavila da se kreće ravnomerno po pravoj liniji *ac*. Ako povučemo *g*♈ paralelno sa T♈ i ako je ugao ♈*g*V jednak sa uglom ♈QG, onda će taj ugao ♈*g*V biti jednak sa dužinom komete viđenom iz mesta *g*, a ugao TV*g* predstavljaće paralaksu koja nastaje iz Zemljinog premeštanja iz mesta *g* do mesta T. Odatle sledi da V predstavlja mesto komete u ravni ekliptike. A to mesto V obično je niže od Jupiterove orbite.



Isto se može zaključiti i iz zakrivljenosti pravca kometa, jer se ta tela kreću skoro po velikom krugu, dok je njihova brzina velika. Međutim, na kraju njihovog puta, kada je deo vidljivog kretanja,

koji nastaje iz paralakse, veće veličine u odnosu na njihovo ukupno vidljivo kretanje, ta tela uobičajeno odstupaju od tih krugova i kada se Zemlja kreće s jedne strane, oni odstupaju ka drugoj strani. To odstupanje, pošto odgovara kretanju Zemlje, mora prvenstveno nastati iz paralakse, a njegova značajna veličina pokazuje, prema mojim proračunima, da se iščezavanje kometa može smestiti mnogo niže od Jupitera. Odatle sledi da se komete, kada nam prilaze u njihovim perigejima i perihelima, često spuštaju ispod orbite Marsa i nižih planeta.

Blizina kometa potvrđena je i iz svetlosti njihovih glava, jer, svetlost nebeskog tela, koje obasjava Sunce i koje se udaljava do udaljenih delova, umanjeno je za četvorosturki odnos rastojanja – naime, u jednom dvostrukom odnosu usled uvećanja rastojanja od Sunca i u još jednom dvostrukom odnosu usled umanjenja vidljivog prečnika. Prema tome, ako su poznate veličine svetlosti i vidljivog prečnika komete, takođe će biti poznato i njeno rastojanje, tako što ćemo uzeti da se rastojanje komete prema rastojanju planete nalazi u direktnom odnosu prečnika i u obrnutom odnosu kvadratnih korena iz količine svetlosti. Gospodin Flemstid (Flamsteed) je posmatrao kometu iz 1682. godine pomoću teleskopa od 16 stopa i izmerio je mikrometrom da najmanji prečnik njene glave iznosi 2' 00", pri čemu je jezgro (ili zvezda u sredini glave) jedva iznosilo jednu desetinu od te veličine, pa je njegov prečnik iznosio samo 11" ili 12". Ipak, shodno svetlosti i svom sjaju ta kometa je prevazišla kometu iz 1680. godine i mogla bi se uporediti sa zvezdama prvog ili drugog reda veličine. Pretpostavimo sada da je Saturn sa svojim prstenom oko četiri puta svetliji. Pošto je svetlost prstena skoro jednaka sa svetlošću lopte i pošto je vidljivi prečnik lopte iznosio oko 21", pa je zbog toga svetlost i prstena i lopte jednaka sa svetlošću lopte čiji prečnik iznosi 30", onda će se rastojanje komete prema rastojanju Saturna odnositi kao 1 prema $\sqrt{4}$ obrnuto, a kao 12" prema 30 direktno, tj., kao 24 prema 30, ili kao 4 prema 5. Zatim, prema Heveliju (Hevelius), kometa iz aprila 1665. godine, prema svom sjaju prevazišla je skoro sve fiksne zvezde, čak i Saturn, pošto je imala mnogo živopisniju boju. Ta kometa je bila mnogo svetlija od one koja se pojavila prethodne godine, bila je upoređena sa zvezdama prvog reda veličine. Prečnik njene glave iznosio je oko 6'. Ipak, njeno jezgro, u poređenju sa planetama pomoću teleskopa, bilo je očito manje od Jupitera pri čemu je ponekad smatrano manjim, a ponekad jednakim sa telom

Saturna unutar prstena. Pošto prečnici glava kometa retko prevazilaze 8' ili 12', i pošto prečnik jezgra ili centralne zvezde iznosi samo desetinu ili možda petnaestinu dela prečnika glave, odatle sledi da su ta jezgra, uopšteno govoreći, skoro iste vidljive veličine kao i planete. S obzirom na to da se njihova svetlost često može porediti sa svetlošću Saturna, a da je ponekad čak i prevazilazi, onda je jasno da sve komete u svojim perihelima moraju biti smeštene ispod ili ne mnogo iznad Saturna. Prema tome, mnogo greše oni koji smeštaju komete u oblastima u blizini fiksnih zvezda, jer, ako bi to bio slučaj, onda komete ne bi dobijale više svetlosti od našeg Sunca nego što planete dobijaju od fiksnih zvezda.

U dosadašnjem razmatranju nismo uzimali u obzir zatamnjenje kometa usled obilnog i gustog dima koji okružuje njihove glave i u kojem glave uvek izgledaju mutno kao u oblaku. Što je više telo zatamnjeno tim dimom, utoliko bliže ono mora prilaziti Suncu, kako bi se moglo uporediti sa planetama prema količini svetlosti koje odbijaju. Odatle je moguće da se komete spuštaju daleko ispod Saturnove orbite, kao što je ranije i dokazano iz njihovih paralaksi. Međutim, iznad svega, sve to više je potvrđeno pomoću repova kometa, koji proizlaze ili iz Sunčeve svetlosti koja se odbija od dima koji nastaje od njih i koji je raspoređen preko etra, ili iz svetlosti njihovih glava. U prvom slučaju morali bismo umanjiti rastojanje komete jer bi se, u protivnom, dim koji nastaje iz glave komete prostirao preko ogromnog prostranstva i takvom brzinom i širenjem koji bi zajedno izgledali neverovatno. U drugom slučaju, ukupna svetlost i glave i repa pripisuje se centralnom jezgru. Ipak, ako pretpostavimo da je sva svetlost sjedinjena i sažeta unutar diska jezgra, onda bi zasigurno sjaj jezgra umnogome prevazišao sjaj Jupitera, posebno onda kada emituje veoma velik i svetao rep. Prema tome, ako pri manje vidljivom prečniku emituje više svetlosti, onda mora biti mnogo više osvetljen Suncem, pa zbog toga mora biti bliže Suncu. Na osnovu istog argumenta, ponekad možemo smestiti glave kometa unutar Venerine orbite, tj., onda kada su njihove glave skrivene iza Sunčevih zraka i kada emituju ogromne i sjajne repove, poput vatrenih snopova, kao što to ponekad i čine. Ako pretpostavimo da je sva ta svetlost zajedno skupljena u jednoj zvezdi, ona bi ponekad prevazišla ne samo svetlost jedne Venere, već i mnogo njih zajedno sjedinjenih.

Na kraju, isto se može zaključiti i iz svetlosti glave, koja se uvećava pri udaljavanju kometa od Zemlje prema Suncu, i koja se

umanjuje pri njihovom povratku od Sunca prema Zemlji. Kometa iz 1665. godine (prema Hevelijevim posmatranjima), od vremena kada je prvi put uočena, uvek je gubila deo svog vidljivog kretanja i zbog toga je već prošla kroz svoj perigej; ipak, sjaj njene glave dnevno se uvećavao sve dok nije prestala da bude vidljiva, pošto su je prekrili Sunčevi zraci. Kometa iz 1683. godine (takođe prema Hevelijevim posmatranjima), kada se prvi put pojavila, otprilike krajem jula, kretala se veoma sporo i napredovala je samo oko 40 ili 50 minuta dnevno po svojoj orbiti. Međutim, od tog vremena njeno dnevno kretanje neprekidno se uvećavalo sve do 4. septembra kada je dostiglo oko 5 stepeni. Zbog toga se u tom ukupnom vremenskom intervalu kometa približavala Zemlji. Na sličan način, to se može dokazati i pomoću prečnika njene glave, izmerenim mikrometrom, a koji je, prema Heveliju, 6. avgusta, iznosio samo 6' 05", uključujući i rep, dok je 2. septembra on iznosio 9' 07". Odatle sledi da je na početku kretanja glava mnogo manja, nego pri kraju, a da je, pritom, na početku izgledala mnogo svetlija, usled blizine Sunca, nego pri kraju kretanja (kao što je to i objavio Hevelije). Prema tome, u tom ukupnom intervalu vremena, sjaj komete se umanjuje, usled udaljavanja od Sunca, bez obzira na njeno približavanje ka Zemlji. Kometa iz sredine decembra 1618. godine, kao i ona s kraja decembra 1680. godine, kretale su se svojom najvećom brzinom i stoga su bile u svojim perigejima. Ipak, najjači sjaj njihovih glava viđen je dve nedelje pre toga, kada su tek izlazili iz Sunčevih zraka, a najjači sjaj njihovih repova viđen je malo ranije, kada su bile još bliže Suncu. Glava prve komete, prema Cizatovim (Cysatus) posmatranjima, činila se, 1. decembra, većom od zvezda prvog reda veličine; 16. decembra (kada je bila u perigeju) malo se umanjila po veličini, ali se po sjaju i blistavosti njene svetlosti veoma umanjila. Kepler je, 7. januara, završio posmatranje, jer više nije mogao da razazna glavu komete. Glava druge komete, uočena je i posmatrana 12. decembra od strane gospodina Flemstida kada se nalazila na rastojanju od 9 stepeni od Sunca, što se jedva može učiniti kada su u pitanju zvezde trećeg reda veličine. Činilo se da je 15. i 17. decembra ta kometa bila zvezda trećeg reda veličine čiji je sjaj umanjen osvetljenošću oblaka posle zalaska Sunca. Kada se kretala najvećom brzinom i kada je bila skoro u svom perigeju, 26. decembra, njen sjaj je bio manji od sjaja Pegaza, tj., zvezde trećeg reda veličine, 3. janura izgledala je kao zvezda četvrtog reda veličine, a 9. januara kao zvezda petog reda

veličine. Sjaj Meseca pokrio ju je 13. januara, dok je 25. januara jedva bila jednaka sa zvezdama sedmog reda veličine. Ako uporedimo jednake intervale vremena na jednakom odstojanju od perigeja, onda ćemo pronaći da je glava komete, koja je u oba intervala bila jednako udaljena od Zemlje i koja je zbog toga sijala jednakim sjajem, izgledala svetlija sa one strane perigeja koja se nalazi prema Suncu, dok je na drugoj strani izgledalo kao da je nestala. Prema tome, iz velike razlike između svetlosti u ta dva položaja, možemo zaključiti blizinu Sunca i komete u prvom od njih. Jer, svetlost kometa je pravilna i izgleda najjačom kada se glava kreće najbrže, tj., kada se nalazi u perigeju, osim u slučaju kada je uvećana usled blizine Sunca.

Kor. 1. Zbog toga komete sijaju pomoću Sunčeve svetlosti koja se odbija od njih.

Kor. 2. Iz onoga što je do sada rečeno možemo razumeti zbog čega se komete često viđaju na onoj hemisferi na kojoj je i Sunce, a toliko retko na suprotnoj. Ako bi one mogle biti vidljive u oblastima koje su daleko iznad Saturna, onda bi se češće pojavljivale i u onim delovima koji su suprotni Suncu. Jer, one komete koje se nalaze u tim delovima, bile bi bliže Zemlji, a prisustvo Sunca moralo bi zamračiti i sakriti komete koje se pojavljuju na istoj hemisferi zajedno sa njim. Ipak, istražujući istoriju kometa, pronašao sam da su četiri ili pet puta više viđene na onoj hemisferi koja je okrenuta Suncu, nego na suprotnoj. Pored toga, nema sumnje da nije mali broj onih kometa koje su skrivene Sunčevom svetlošću. U svakom slučaju, kada se komete približavaju našim delovima, one ne emituju repove, niti su toliko obasjane Suncem, kao što golim okom možemo otkriti, sve dok nam ne priđu bliže od Jupitera. Međutim, mnogo veći deo tog sfernog prostora, koji je opisan oko Sunca sa izuzetno malim intervalom, nalazi se na onoj strani Zemlje na kojoj je i Sunce i u tom većem delu komete su obično jače osvetljene pošto su najvećim delom bliže Suncu.

Kor. 3. Takođe, odatle je jasno da je nebeski prostor lišen otpora, jer, iako su komete nošene kosim putanjama, a ponekad i u suprotnom pravcu od planeta, ipak se svuda kreću sa najvećom slobodom i održavaju svoja kretanja tokom izuzetno dugog vremenskog perioda, čak i kada se kreću suprotno od planeta. Čak sumnjam da one ne predstavljaju neku vrstu planeta koje kruže po orbitama vraćajući se u svoj prvobitni oblik sa večnim kretanjem, jer, tvrdnje pojedinih autora da su one ništa drugo do meteori (naime, tvrdnje koje su proizašle na osnovu večitih promena oblika glave komete), nemaju čvrsto uporište. Jer, glave kometa okružene su ogromnom atmosferom, pri čemu najniži delovi te atmosfere moraju biti najgušći i zato su te promene viđene samo u oblacima, a ne u samim telima kometa. Prema tome, Zemlja će, ako se na nju gleda sa planeta, bez svake sumnje sijati svetlošću svojih oblaka, dok će njeno čvrsto telo jedva biti primetno od okolnih oblaka. Na takav način su i Jupiterovi pojasi oblikovani od oblaka te planete, a dok oni međusobno menjaju svoje položaje, čvrsto Jupiterovo telo se jedva može videti kroz njih. U još većoj meri su skrivena tela kometa ispod atmosfere koja je dublja i gušća.

PROPOZICIJA XL. TEOREMA XX

Komete se kreću po pojedinim konusnim presecima, imajući svoju žižu u centru Sunca, a poluprečnicima povučenim prema Suncu opisuju površine koje su proporcionalne sa vremenima.

Ova propozicija sledi iz Kor. 1, Prop. XIII, Knjige I, u poređenju sa prop. VIII, XII i XIII, Knjige III.

Kor. 1. Ako se komete, kružeći po orbitama, vraćaju u svoj prvobitni položaj, te orbite će biti elipse, a njihovi periodi prema periodima planeta nalaziće se u polukubnom odnosu njihovih glavnih osa. Prema tome, duže vreme za dovršetak revolucije biće neophodno onim kometama koje se u najvećem delu svog pravca nalaze iznad planeta i koje zbog toga opisuju orbite sa većim osama. Ako je osa orbite komete četiri puta veća od ose Saturnove orbite, onda će se vreme revolucije komete prema vremenu revolucije Saturna (30 godina), odnositi kao $4\sqrt{4}$ (ili 8) prema 1 i iznosiće 240 godina.

Kor. 2. Međutim, njihove orbite su toliko slične parabolama, da se parabole mogu koristiti umesto njih bez osetne greške.

Kor. 3. Prema Kor. 7, Prop. XVI, Knjige I, brzina svake komete uvek će se odnositi prema brzini bilo koje planete, koja kruži na istom rastojanju po krugu oko Sunca, približno kao kvadratni koren iz odnosa dvostrukog rastojanja planeta od centra Sunca prema rastojanju kometa od centra Sunca. Ako pretpostavimo da se poluprečnik *orbis magnusa*, ili najveći poluprečnik elipse koju opisuje Zemlja, sastoji iz 100000000 delova, onda će Zemlja svojim srednjim dnevnim kretanjem opisati 1720212 tih delova, a

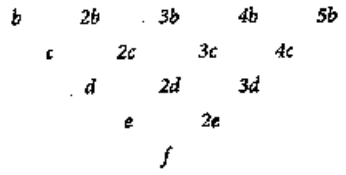
$71675\frac{1}{2}$ tih delova opisaće svojim časovnim kretanjem. Prema tome, kometa, na istom srednjem rastojanju od Sunca kao i Zemlja, i sa brzinom koja se prema brzini Zemlje odnosi kao $\sqrt{2}$ prema 1, opisaće svojim dnevnim kretanjem 2432747 delova, a časovnim $101364\frac{1}{2}$ delova. Međutim, na većem ili manjem rastojanju, i dnevno i časovno kretanje prema tom dnevnom i časovnom kretanju nalaziće se u odnosu koji je jednak kvadratnom korenu iz obrnutog odnosa rastojanja, i zbog toga će biti poznat.

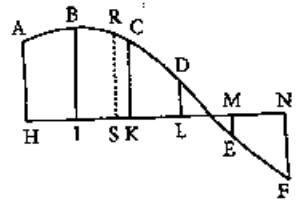
Kor. 4. Ako je žižni parametar parabole četiri puta veći od poluprečnika *orbis magnusa*, i ako pretpostavimo da se kvadrat tog poluprečnika sastoji iz 100000000 delova, onda će površina koju kometa opisuje poluprečnikom povučenim ka Suncu u jednom danu iznositi $1216373\frac{1}{2}$ delova, a u jednom času $50682\frac{1}{4}$ delova. Ipak, ako je žižni parametar veći ili manji u bilo kojoj proporciji, onda će dnevna i časovna površina biti manja ili veća u odnosu kvadratnog korena iste te proporcije recipročno.

LEMA V

Pronaći krivu liniju paraboličke vrste koja će proći kroz bilo koji dati broj tačaka.

Neka su te tačke A, B, C, D, E, F itd. i neka je iz njih do bilo koje prave linije HN, koja je data prema položaju, spušteno isto toliko normala AH, BI, CK, DL, EM, FN itd.





Slučaj 1. Ako su intervali tačaka H, I, K, L, M itd., (tj., HI, IK, KL itd.) jednaki, onda ćemo prve razlike normala AH, BI, CK itd. označiti kao b, $2b$, $3b$, $4b$, $5b$ itd., njihove druge razlike kao c, $2c$, $3c$, $4c$, $5c$ itd.; treće kao d, $2d$, $3d$, $4d$, $5d$ itd., tj. tako da AH − BI može biti = b, BI − CK = $2b$, CK − DL = $3b$, DL + EM = $4b$, − EM + FN = $5b$ itd., onda je $b - 2b = c$ i tako dalje sve do poslednje razlike, koja je ovde f. Potom, ako podignemo bilo koju normalu RS, koja se može smatrati ordinatom tražene krive, da bismo pronašli dužinu te ordinate, pretpostavićemo da su intervali HI, IK, KL, LK itd. jedinice i da je AH = a, − HS = p, $\frac{1}{2}$ p puta − IS = q, $\frac{1}{3}$ q puta + SK = r, $\frac{1}{4}$ r puta + SL = s, $\frac{1}{5}$ s puta + SM = t i tako dalje sve dok ne stignemo do pretposlednje normale ME, pritom stavljajući negativne znakove ispred članova HS, IS itd. koji se nalaze između S prema A, i pozitivne znakove ispred članova SK, SL itd. koji se nalaze na drugoj strani tačke S. Ako se dobro pridržavamo znakova dobićemo da je RS = $a + bp + rq + dr + es + ft$ + itd.

Slučaj 2. Međutim, ako su HI, IK itd., intervali tačaka H, I, K, L itd. nejednaki, onda ćemo prve razlike normala AH, BI, CK itd. označiti sa b, $2b$, $4b$, $5b$ itd. podeljeno sa intervalima između tih normala; njihove druge razlike označićemo sa c, $2c$, $3c$, $4c$, $5c$ itd. podeljeno sa intervalima između svake druge normale; treće razlike sa d, $2d$, $3d$, $4d$, $5d$ itd. podeljeno sa intervalima između svake treće normale; četvrte razlike sa e, $2e$, $3e$, $4e$, $5e$ itd. podeljeno sa intervalima između svake četvrte normale; tj., na takav način da b može biti $\frac{AH-BI}{HI}$, $2b = \frac{BI-CK}{IK}$, $3b = \frac{CK-DL}{KL}$ itd. i onda je $c = \frac{b-2b}{HK}$, $2c = \frac{2b-3b}{IL}$, $3c = \frac{3b-4b}{KM}$ itd., a $d = \frac{c-2c}{HL}$, $2d = \frac{2c-3c}{IM}$ itd. I pošto su te razlike pronađene, neka je AH = a, − HS = p, $p \times (-IS) = q$, $q \times SK = r$, $r \times SL = s$, $s \times SM = t$, nastavljajući tako sve do pretposlednje normale ME. Onda je ordinata RS = $a + bp + cq + dr + es + ft$ + itd.

Kor. Odatle se površine svih krivih linija mogu približno pronaći, jer, ako je neki broj tačaka nepoznate krive pronađen i ako se pretpostavi da je parabola povučena kroz te tačke, onda će površina te parabole biti približno ista sa površinom krivolinijske figure koju je potrebno pronaći. Ipak, parabola se uvek može pronaći geometrijskim metodama koje su opštepoznate.

LEMA VI

Ako je nekoliko posmatranih položaja komete poznato, pronaći ćemo njen položaj u bilo kom datom srednjem vremenu.

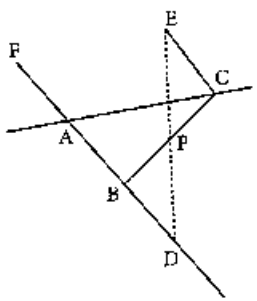
Neka HI, IK, KL i LM (na prethodnoj slici) predstavljaju vremena između posmatranja; HA, IB, KC, LD i ME pet posmatranih longituda komete; HS dato vreme između prvog posmatranja i tražene longitude. Zatim, ako pretpostavimo da je pravilna kriva ABCDE povučena kroz tačke A, B, C, D i E i pošto je ordinata RS pronađena pomoću prethodne Leme, onda će RS predstavljati traženu longitudu.

Prema istoj metodi, iz pet posmatranih latituda, možemo pronaći latitudu prema bilo kom datom vremenu.

Ako su razlike posmatranih longituda male, npr. 4 ili 5 stepeni, onda će tri ili četiri posmatranja biti dovoljna da se pronađu nova longituda i nova latituda. Međutim, ako su razlike veće, npr. 10 ili 20 stepeni, neophodno je koristiti pet posmatranja.

LEMA VII

Kroz datu tačku P povući ćemo pravu liniju BC, čiji se delovi PB i PC, koji su presečeni dvema pravim linijama AB i AC datih prema položaju, mogu međusobno odnositi prema datoj proporciji.

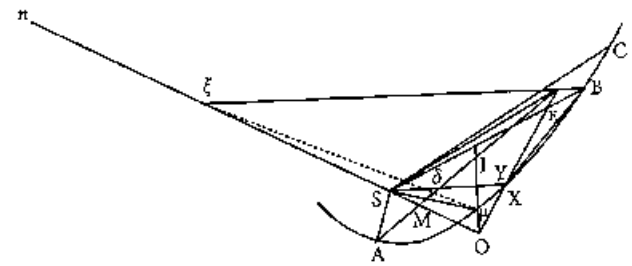


Pretpostavimo da je iz date tačke P povučena bilo koja prava linija PD prema bilo kojoj datoj pravoj liniji, recimo AB i produžimo je do AC, tj., do druge date linije, sve do tačke E, tako da se PE može odnositi prema PD u datoj proporciji. Neka je EC paralelno sa AD i ako povučemo CPB, onda će se PC prema PB odnositi kao PE prema PD. Q.E.F.

LEMA VIII

Neka je ABC parabola čija je žiža u S. Tetivom AC, koja je podeljena na pola u I, preseći ćemo segment ABCI čiji je prečnik Iμ a vrh μ. Na produženom prečniku Iμ uzećemo da je μO jednako sa jednom polovinom od Iμ. Spojićemo OS i produžićemo je do ξ, tako da Sξ može biti jednako sa 2SO. Zatim, ako pretpostavimo da kometa kruži po luku CBA i ako povučemo ξB tako da seče AC u E, onda tvrdim da će tačka E preseći segment AE od tetive AC približno proporcionalno sa vremenom.

Ako spojimo EO tako da seče luk parabole ABC u Y, zatim, ako povučemo μX tako da dodiruje isti taj luk u vrhu μ, a da seče EO u X, onda će se krivolinijska površina AEXμA odnositi prema krivolinijskoj površini ACYμA kao AE prema AC. Prema tome, pošto se trougao ASE odnosi prema trouglu ASC u istoj toj proporciji, onda će se ukupna površina ASEXμA prema ukupnoj površini ASCYξA odnositi kao AE prema AC. Međutim, pošto se ξO odnosi prema SO kao 3 prema 1, kao i EO prema XO, onda će SK biti paralelna sa EB. Kada spojimo BX, onda će trougao SEB biti jednak sa trouglom XEB. Zatim, ako površini ASEXμA dodamo trougao EXB i ako od tog zbira oduzmemo trougao SEB, preostaće nam površina ASBXμA koja je jednaka sa površinom ASEXμA i stoga će se prema površini ASCYμA odnositi kao AE prema AC. Međutim, površina ASBYμA približno je jednaka sa površinom ASBXμA, a ta površina ASBYμA odnosi se prema površini ASCYμA kao vreme opisivanja luka AB prema vremenu opisivanja celokupnog luka AC. Zbog toga je odnos AE prema AC približno jednak sa odnosom vremena. Q.E.D.



Kor. Kada je tačka B na temenu parabole μ, onda je odnos AE prema AC precizno jednak sa odnosom vremena.

SHOLIJA

Ako spojimo μξ tako da seče AC u δ, zatim, ako na njoj uzmemo da se ξ*n* odnosi prema μB kao 27MI prema 16Mμ i ako povučemo B*n*, onda će ta prava B*n* preseći tetivu AC u odnosu koji je mnogo bliži odnosu vremena nego ranije. Međutim, tačka *n* mora se naći iza tačke δ kada je tačka B udaljenija od temena parabole od tačke μ i na toj strani tačke δ, kada je B bliža temenu parabole od tačke μ.

LEMA IX

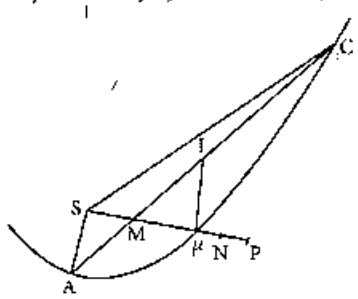
Prave linije Iμ i μM, kao i dužina $\frac{AI^2}{4S\mu}$, međusobno su jednake.

Jer, 4Sμ jeste žižni parametar parabole koji prirada vrhu μ.

LEMA X

Produžićemo Sμ do N i P, tako da μN može biti jednako sa jednom trećinom od μI i tako da se SP može odnositi prema SN kao SN prema Sμ. U vremenu tokom kog bi kometa opisala luk AμC, ako pretpostavimo da se uvek kreće napred brzinom koju je imala na visini koja je jednaka sa SP, kometa će opisati dužinu koja je jednaka sa tetivom AC.

Ako pretpostavimo da se kometa, brzinom koju je imala u μ, u navedenom vremenu kreće ravnomerno napred po pravoj liniji koja dodiruje parabolu u toj tački μ, onda će površina koju bi opisala poluprečnikom povučenim ka tački S biti jednaka sa paraboličnom površinom ASCμA. Prema tome, prostor koji je proizvod dužine opisane na tangenti i dužine Sμ odnosiće se prema prostoru koji je proizvod dužina AC i SM kao površina ASCμA prema trouglu ASC, tj., kao SN prema SM. Odatle sledi da se AC prema dužini opisanoj na tangenti odnosi kao Sμ prema SN. Međutim, pošto se brzina komete na visini SP (prema Kor. 6, Prop. XVI, Knjige I), prema brzini na visini Sμ odnosila kao kvadratni koren iz Sμ prema kvadratnom korenu iz SP, tj., kao Sμ prema SN, onda će se dužina opisana sa tom brzinom odnositi prema dužini koja je istovremeno opisana na tangenti kao Sμ prema SN. Pošto se AC i dužina opisana sa ovom novom brzinom nalaze u istom odnosu sa dužinom opisanom na tangenti, onda one moraju biti međusobno jednake. Q.E.D.



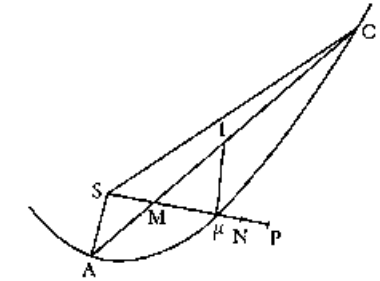
Kor. Prema tome, kometa će približno istovremeno opisati tetivu AC sa brzinom koju je imala na visini $S\mu + \frac{2}{3}\ I\mu$.

LEMA XI

Ako je kometa, koja je lišena svih kretanja, puštena da pada prema Suncu sa visine SN, ili $S\mu + \frac{1}{3}\ I\mu$, i ako bi na nju ravnomerno delovala ista sila koja je na nju delovala od početka, ona bi, u polovini onog vremena tokom kojeg bi mogla da opiše luk AC na

svojoj orbiti, pri padanju opisala prostor koji je jednak sa dužinom Iμ.

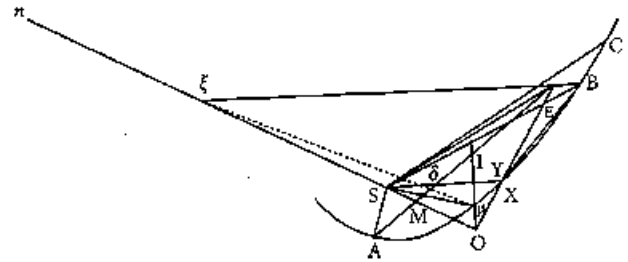
U istom vremenu tokom kojeg kometa opisuje parabolični luk AC, ona bi (prema poslednjoj Lemi) sa onom brzinom koju je imala na visini SP, opisala tetivu AC. Zbog toga će (prema Kor. 7, Prop. XVI, Knjige I), ako pretpostavimo da istovremeno kruži pomoću svoje sile gravitacije po krugu čiji je poluprečnik SP, opisati luk tog kruga čija se dužina odnosi prema tetivi paraboličnog luka AC kao 1 prema kvadratnom korenu iz 2. Prema tome, ako je imala takvu težinu na visini SP prema Suncu, onda će i padati prema Suncu sa te visine i tokom polovine navedenog vremena (prema Kor. 9, Prop. XVI, Knjige I) opisaće prostor koji je jednak sa kvadratom polutetive podeljenim sa četvorostrukom visinom SP, tj. prostor jednak $\frac{AI^2}{4SP}$. Međutim, pošto se težina komete ka Suncu na visini SN odnosi prema težini te komete ka Suncu na visini SP, kao SP prema Sμ, onda će kometa, s težinom koju je imala na visini SN, pri padanju sa te visine ka Suncu, tokom istog vremena opisati prostor $\frac{AI^2}{4S\mu}$, tj., prostor koji je jednak sa dužinom Iμ ili sa dužinom μM. Q.E.D.



PROPOZICIJA XLI. PROBLEM XXI

Iz tri data posmatranja odrediti orbitu komete koja se kreće po paraboli.

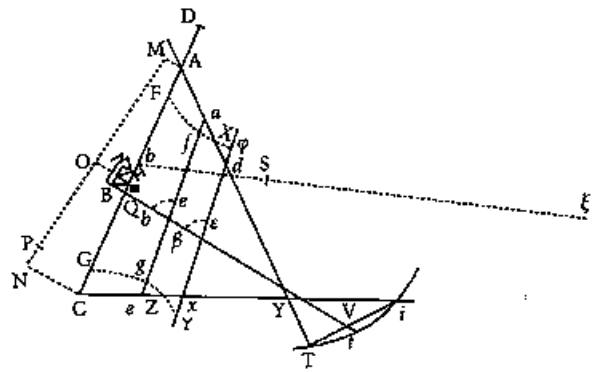
Pošto je ovaj problem izuzetno složen, isprobavao sam razne metode pri njegovom rešavanju. Tome su poslužile postavke nekoliko



problema koji su izloženi u Knjizi I. Kasnije sam pronašao unekoliko jednostavnije rešenje.

Odabrao sam tri posmatranja koja su sledila jedno za drugim u približno jednakim intervalima vremena. Ipak, neka je interval vremena tokom kog se kometa kreće sporije unekoliko veći od ostalih, tako da se razlika između vremena može odnositi prema zbiru vremena kao zbir vremena prema otprilike 600 dana, ili da tačka E može približno pasti na tačku M, kako bi od nje pre težila ka I nego ka A. Ukoliko takva neposredna posmatranja nisu dostupna, potrebno je pronaći novo mesto komete prema Lemi VI.

Neka S predstavlja Sunce, T, *t* i τ tri mesta Zemlje na *orbis magnusu*, TA, *t*B i τC tri posmatrane longitude komete, V vreme između prvog i drugog posmatranja, W vreme između drugog i trećeg posmatranja, X dužinu koju tokom ukupnog vremena V + W može opisati kometa onom brzinom koju je imala na srednjem



rastojanju Zemlje od Sunca, a koja se može pronaći prema Kor. 3, Prop. XL, Knjige III i neka *t*V predstavlja normalu na tetivu Tτ. Na srednjoj posmatranoj dužini *t*B uzmimo neku proizvoljnu tačku B za položaj komete u ravni ekliptike. Odatle ćemo ka Suncu povući liniju BE koja se može odnositi prema normali *t*V kao proizvod SB i S*t*^{2} prema kubnoj hipotenuzi pravouglog trougla, čije su strane SB i tangenta latitude komete u drugom posmatranju sa poluprečnikom *t*B. Kroz tačku F (prema Lemi VII) povući ćemo pravu liniju AEC čiji se delovi AE i EC, koji su ograničeni pravim linijama TA i τC, mogu međusobno odnositi kao vremena V i W. Onda će A i C biti približni položaji komete na mestu ekliptike u

prvom i trećem posmatranju, ako je pravilno pretpostavljen položaj B u drugom posmatranju.

Na AC, koja je prepolovljena u I, podignućemo normalu I*i*. Kroz B ćemo povući isprekidanu liniju B*i* paralelnu sa AC. Spojićemo isprekidanu liniju S*i* koja seče AC u λ i dovršićemo paralelogram *i*Iλμ. Uzmimo da je Iσ jednako sa 3Iλ. Zatim ćemo, kroz Sunce S, povući isprekidanu liniju σξ koja je jednaka sa 3Sσ + 3*i*λ. Poništićemo slova A, E, C i I i iz tačke B prema tački δ povući ćemo novu isprekidanu liniju BE koja se sa prethodnom linijom BE nalazi u dvostrukom odnosu rastojanja BS prema veličini Sσ + $\frac{1}{3}$ *i*λ. Iz tačke E opet ćemo povući pravu liniju AEC prema istom pravilu kao i ranije, tako da se njeni delovi AE i EC mogu međusobno odnositi kao vremena V i W pri posmatranjima. Tada će A i C preciznije predstavljati položaje komete.

Na AC, koja je prepolovljena u I, podugnićemo normale AM, CN i IO, od kojih AM i CN mogu biti tangente latitude u prvom i trećem posmatranju sa poluprečnicima TA i τC. Spojićemo MN tako da seče IO u O. Povući ćemo, kao i ranije, pravougaoni paralelogram *i*Iλμ. Na IA, koja je produžena, uzećemo da je ID jednako sa Sμ + $\frac{2}{3}$ *i*λ. Zatim ćemo na MN, ka N, uzeti MP koja se može odnositi prema gore pronađenoj dužini X kao kvadratni koren iz odnosa srednjeg rastojanja Zemlje od Sunca (poluprečnik *orbis magnusa*) prema rastojanju OD. I ako tačka P pada na tačku N, onda će A, B i C biti tri mesta komete, kroz koje će biti opisana njena orbita u ravni ekliptike. Međutim, ako tačka P ne pada na tačku N, onda ćemo na pravoj liniji AC uzeti da je CG jednako sa NP tako da se tačke G i P mogu nalaziti na istoj strani linije NC.

Istom metodom kojom su pronađene tačke E, A, C i G iz proizvoljne tačke B, iz proizvoljnih tačaka *b* i β mogu se pronaći nove tačke *e*, *a*, *c* i *g*, kao i ε, α, χ i γ. Zatim ćemo kroz G, *g* i γ povući kružnicu kruga Ggγ tako da seče pravu liniju τC u Z. Onda će Z biti jedno mesto komete u ravni ekliptike. Ako na AC, *ac* i αχ uzmemo da su AF, *af* i αφ jednaki sa CG, *cg* i χγ, zatim, ako kroz tačke F, *f* i φ povučemo kružnicu kruga F*f*φ tako da seče pravu liniju AT u X – onda će X biti drugi položaj komete u ravni ekliptike. Ako iz tačaka X i Z podignemo tangente latitude komete ka poluprečnicima TX i τZ, onda će biti određena dva položaja komete na njenoj orbiti. Na kraju, ako je (prema Prop. XIX, Knjige I)

ka žiži S opisana parabola tako da prolazi kroz ta dva položaja, onda će ta parabola predstavljati orbitu komete. Q.E.I.

Dokazivanje ove postavke sledi iz prethodnih lema. Jer, prava linija AC, prema Lemi VII, presečena je u E u proporciji sa vremenima, baš kao što i sledi iz Leme VIII. Prema Lemi XI, linija BE čini deo prave linije BS ili Bξ u ravni ekliptike, koja je ograničena lukom ABC i tetivom AEC. Prema Korolaru Leme X, MP je dužina tetive tog luka, koju će kometa opisati u svojoj orbiti između prvog i trećeg posmatranja. Zbog toga će MP biti jednaka sa MN, ukoliko je B istinski položaj komete u ravni ekliptike.

Ipak, bilo bi zgodno pretpostaviti da tačke B, *b* i β nisu proizvoljne, već približno istinite. Ako je ugao AQ*t*, pod kojim projekcija orbite u ravni ekliptike seče pravu liniju *t*B, približno poznat, onda ćemo pod tim uglom sa B*t* povući isprekidanu liniju AC koja se može odnositi prema $\frac{4}{3}$Tτ kao kvadratni koren iz SQ prema kvadratnom korenu iz S*t*. Ako povučemo pravu liniju SEB tako da njen deo EB može biti jednak sa dužinom V*t*, onda će biti određena tačka B, koju ćemo koristiti po prvi put. Zatim, ukoliko izbrišemo pravu liniju AC i povučemo drugu liniju AC s obzirom na prethodnu postavku, i ukoliko je pronađena dužina MP, onda ćemo na *t*B uzeti tačku *b* (prema tom pravilu), tako da se, ako se TA i τC međusobno presecaju u Y, rastojanje Y*b* i rastojanje YB mogu nalaziti u odnosu koji se sastoji iz odnosa MP prema MN i kvadratnog korena iz odnosa SB prema S*b*. Istom metodom možemo pronaći i treću tačku β ako ponovimo operaciju po treći put. Ipak, ako se sledi ova metoda, dve operacije bi obično bile dovoljne, jer, ako je rastojanje B*b* veoma malo i pošto su pronađene tačke F, *f* i G, *g* i ako povučemo prave linije F*f* i G*g*, onda će one preseći TA i τC u traženim tačkama X i Z.

PRIMER

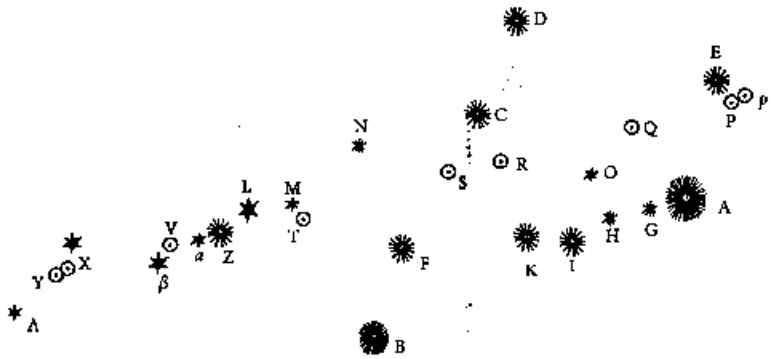
Uzećemo u obzir kometu iz 1680. godine. Naredna tabela pokazuje kretanje komete, onako kako ih je uočio i izračunao Flemstid, a kasnije ispravio dr Halej na osnovu istih posmatranja.

	Vreme		Dužina Sunca	Kometa	
	Relativno h ″	Istinsko h ′ ″	° ′ ″	Dužina ° ′ ″	Širina (N) ° ′ ″
12. dec. 1680.	4.46	4.46. 0	♑ 1.51.23	♑ 6.32.30	8.28. 0
21.	6.32½	6.36.59	11.06.44	♒ 5.08.12	21.42.13
24.	6.12	6.17.52	14.09.26	18.49.23	25.23. 5
26.	5.14	5.20.44	16.09.22	28.24.13	27.00.52
29.	7.55	8.03.02	19.19.43	♓ 13.10.41	28.09.58
30.	8.02	8.10.26	20.21.09	17.38.20	28.11.53
5. januar 1681.	5.51	6.01.38	26.22.18	♈ 8.48.53	26.15. 7
9.	6.49	7.00.53	♒ 0.29.02	18.44.04	24.11.56
10.	5.54	6.06.10	1.27.43	20.40.50	23.43.52
13.	6.56	7.08.55	4.33.20	25.59.48	22.17.28
25.	7.44	7.58.42	16.45.36	♉ 9.35. 0	17.56.30
30.	8.07	8.21.53	21.49.58	13.19.51	16.42.18
2. februar	6.20	6.34.51	24.46.59	15.13.53	16.04. 1
5.	6.50	7.04.41	27.49.51	16.59.06	15.27. 3

Njima možemo dodati pojedina moja posmatranja.

	Približno vreme	Kometa	
	h ′	Dužina ° ′ ″	Širina (N) ° ′ ″
25. februar 1681.	8.30	♉ 26.18.35	12.46.46
27.	8.15	27.04.30	12.36.12
1. mart	11. 0	27.52.42	12.23.40
2.	8. 0	28.12.48	12.19.38
5.	11.30	29.18. 0	12.03.16
7.	9.30	♊ 0. 4. 0	11.57. 0
9.	8.30	0.43. 4	11.45.52

Ta posmatranja načinjena su pomoću teleskopa od 7 stopa sa mikrometrom i nitima koje su smeštene u žiži teleskopa. Tim instrumentima određujemo i međusobne položaje fiksnih zvezda i položaje kometa u odnosu na te fiksne zvezde. Neka A predstavlja zvezdu četvrtog reda veličine u levoj peti Perseja (Bajerova [Bayer] oznaka *o*); B narednu zvezdu trećeg reda veličine na levom stopalu (Bajerova oznaka ξ); C zvezdu šestog reda veličine na gležnju istog stopala (Bajerova oznaka *n*); neka D, E, F, G, H, I, K, L, M, N, O, Z, α, β, γ i δ predstavljaju ostale najmanje zvezde na istom stopalu. Zatim, neka *p*, P, Q, R, S, T, V i X predstavljaju položaje komete prema posmatranjima koja su gore sprovedena. I ako uzmemo da je rastojanje AB iznosilo $80\frac{7}{12}$ delova, onda je AC = $52\frac{1}{4}$ tih delova, BC = $58\frac{5}{6}$, AD = $57\frac{5}{12}$, BD = $82\frac{6}{11}$, CD = $23\frac{2}{3}$, AE = $29\frac{4}{7}$,



CE = $57\frac{1}{2}$, DE = $49\frac{11}{12}$, AI = $27\frac{7}{12}$, BI = $52\frac{1}{6}$, CI = $36\frac{7}{12}$, DI = $53\frac{5}{11}$, AK = $38\frac{2}{3}$, BK = 43, C K = $31\frac{5}{9}$, FK = 29, FB = 23, FC = $36\frac{1}{4}$, AH = $18\frac{6}{7}$, DH = $50\frac{7}{8}$, BN = $46\frac{5}{12}$, CN = $31\frac{1}{3}$, BL = $45\frac{5}{12}$, NL = $31\frac{5}{7}$. HO se prema HI odnosila kao 7 prema 6, a kada je produžena prolazi između zvezda D i E, tako da je rastojanje zvezde D od te prave linije iznosilo $\frac{1}{6}$ CD. LM se prema LN odnosila kao 2 prema 9, a kada je produžena prolazi kroz zvezdu H. Odatle su i određeni međusobni položaji fiksnih zvezda.

Gospodin Paund je od tada po drugi put posmatrao međusobne položaje tih fiksnih zvezda i izložio je u narednoj tabeli njihove prikupljene dužine i širine.

Fiksne zvezde	Dužina		Širina (N)	Fiksne zvezde	Dužina		Širina (N)
		° ′ ″				° ′ ″	
A	♉	26.41.50	12. 8.36	L	♉	29.33.34	12. 7.48
B		28.40.23	11.17.54	M		29.18.54	12. 7.20
C		27.58.30	12.40.25	N		28.48.29	12.31. 9
E		26.27.17	12.52. 7	Z		29.44.48	11.57.13
F		28.28.37	11.52.22	α		29.52. 3	11.55.48
G		26.56. 8	12. 4.58	β	♊	0. 8.23	11.48.56
H		27.11.45	12. 2. 1	λ		0.40.10	11.55.18
I		27.25. 2	11.53.11	δ		1. 3.20	11.30.42
K		27.42. 7	11.53.26				

Sada ćemo izložiti uočene položaje kometa u odnosu na te fiksne zvezde.

U petak, 25. februara, O.S. u $8\frac{1}{2}$ časova popodne, rastojanje komete u *p* od zvezde E bilo je manje od $\frac{3}{13}$ AE, a veće od $\frac{1}{5}$ AE, i zbog toga je bilo približno jednako sa $\frac{3}{14}$ AE. Ugao A*p*E je bio tup,

ali skoro prav. Zatim, ako iz A spustimo normalu na *p*E, onda je rastojanje komete od te normale iznosilo $\frac{1}{5}$ *p*E.

Iste noći, u $9\frac{1}{2}$ časova, rastojanje komete u P od zvezde E bilo je veće od $\frac{1}{4\frac{1}{2}}$ AE, a manje od $\frac{1}{5\frac{1}{4}}$ AE i zbog toga je bilo približno jednako sa $\frac{1}{4\frac{7}{8}}$ AE, ili sa $\frac{8}{39}$ AE. Međutim, rastojanje komete od normale, koja je spuštena iz zvezde A na pravu liniju PE, iznosilo je $\frac{4}{5}$ PE.

U nedelju, 27. februara, u $8\frac{1}{4}$ časova popodne, rastojanje komete u Q od zvezde O bilo je jednako sa rastojanjem između zvezda O i H. A kada je prava linija QO produžena, prolazila je između zvezda K i B. Usled oblačnosti nisam mogao odrediti položaje zvezde sa velikom preciznošću.

U utorak, 1. marta, u 11 časova uveče, kometa u R nalazila se tačno na liniji između zvezda K i C, tako da je deo CR prave linije CRK bio malo veći od $\frac{1}{3}$ CK, a malo manji od $\frac{1}{3}$ CK + $\frac{1}{8}$ CR, pa je zbog toga bio jednak sa $\frac{1}{3}$ CK + $\frac{1}{16}$ CR, ili sa $\frac{16}{45}$ CK.

U sredu, 2. marta, u 8 časova uveče, rastojanje komete u S od zvezde C bilo je približno $\frac{4}{9}$ FC. Rastojanje zvezde F od produžene prave linije CS bilo je $\frac{1}{24}$ FC. Rastojanje zvezde B od iste te prave linije bilo je pet puta veće od rastojanja zvezde F. Produžena prava linija NS prolazila je kroz zvezde H i I, i to pet ili šest puta bliže ka zvezdi H nego ka zvezdi I.

U subotu, 5. marta, u $11\frac{1}{2}$ časova popodne, kada je kometa bila u T, prava linija MT bila je jednaka sa $\frac{1}{2}$ ML, a produžena prava linija LT prolazila je između B i F četiri ili pet puta bliže ka F nego ka B i odsecala je od BF njen peti ili šesti deo prema F. Produžena MT prolazila je izvan prostora BF ka zvezdi B četiri puta bliže ka zvezdi B nego ka zvezdi F. Zvezda M je veoma mala zvezda koja je jedva vidljiva pomoću teleskopa, ali je zvezda L veća i otprilike je osmog reda veličine.

U ponedeljak, 7. marta, u $9\frac{1}{2}$ uveče, kada je kometa bila u V, produžena prava linija Vα prolazila je između B i F i odsecala je od BF, ka F, $\frac{1}{10}$ od BF, a prema pravoj liniji Vβ odnosila se kao 5 prema 4. Rastojanje komete od prave linije αβ iznosilo je $\frac{1}{2}$ Vβ.

U sredu, 9. marta, u $8\frac{1}{2}$ časova uveče, kada je kometa bila u X, prava linija γX bila je jednaka sa $\frac{1}{4}$ γδ, a normala koja je spuštena iz zvezde δ na pravu liniju γX iznosila je $\frac{2}{3}$ od γδ.

Iste noći, u 12 časova, kada je kometa bila u Y, prava linija γY bila je jednaka sa $\frac{1}{3}$ γδ, ili malo manje, npr. sa $\frac{5}{16}$ γδ. Normala koja je puštena iz zvezde δ na pravu liniju γY bila je jednaka sa

otprilika $\frac{1}{6}$ ili $\frac{1}{7}$ γδ. Međutim, pošto je kometa tada izuzetno blizu horizonta pa je jedva vidljiva, onda se njen položaj ne može sa sigurnošću odrediti kao što je to slučaj u prethodnim posmatranjima.

Iz tih posmatranja i pomoću konstrukcije dijagrama i računa izveo sam dužine i širine kometa. Gospodin Paund je, unoseći ispravke za mesta fiksnih zvezda, preciznije odredio mesta kometa. Ti korigovani položaji izloženi su u prethodnoj tabeli. Iako moj mikrometar nije jedan od najboljih, ipak su greške u dužinama i širinama (izvedenim prema mojim posmatranjima) jedva prelazile jednu minutu. Shodno mojim posmatranjima, kometa je, otprilike na kraju svog kretanja, započela primetno da se spušta prema severu od paralele koju je opisala otprilike krajem februara.

Zatim, da bismo odredili orbitu komete iz gore opisanih posmatranja, odabrao sam tri posmatranja koja je učinio Flemstid, 21. decembra, 5. januara i 25. januara. Iz tih posmatranja otkrio sam da se *St* sastoji iz 9842,1 delova, *Vt* iz 455, a poluprečnik *orbis magnusa* iz 10000 delova. Pri prvom posmatranju, pod pretpostavkom da se *t*B sastoji iz 5657 tih delova, pronašao sam da je SB = 9747 i da je prvobitno BE = 412, Sμ = 9503, *i*λ = 413, zatim da je BE = 421, OD = 10186, X = 8528,4, PM = 8450, MN = 8475, a NP = 25. Zatim sam, pomoću druge operacije, dobio da je rastojanje *tb* jednako sa 5640 i na kraju sam, pomoću te operacije, pronašao da je TX = 4775 i da je τZ = 11322. Odatle sam, ograničavajući orbitu, pronašao da se njen silazni čvor nalazi u ♋, a njen uzlazni čvor u ♑ 1° 53', zatim, da inklinacija njene ravni na ravan ekliptike iznosi 61° 20$\frac{1}{3}$', da rastojanje njene najviše tačke (ili perihela komete) od čvora iznosi 8° 39' i da se nalazi u ♐ 27° 43' sa širinom od 7° 34' južno, potom, da žižni parametar iznosi 236,8, a da dnevna površina opisana poluprečnikom povučenim ka Suncu iznosi 93585, pod pretpostavkom da kvadrat poluprečnika *orbis magnusa* iznosi 100000000. Kometa koja se kreće po toj orbiti shodno poretku znakova, 8. decembra u 00^h 04' uveče, nalazila se na najvišoj tački, tj., na perihelu svoje orbite. Sve to odredio sam koristeći skalu i kompas, i tetive uglova, uzetih iz tablice prirodnih sinusa, u kojima je poluprečnik *orbis magnusa* (koji se sastoji iz 10000 delova) bio jednak sa 16$\frac{1}{3}$ inča *engleske* stope.

Na kraju, kako bih otkrio da li se kometa zaista kreće po tako određenoj orbiti, istražio sam njena mesta na toj orbiti, prema vremenima nekolikih posmatranja, delimično pomoću aritmetičkih

operacija, a delimično pomoću skale i kompasa, kao što se može videti u narednoj tabeli.

Kometa							
	Rastojanje od Sunca	Izračunata dužina	Izračunata širina	Posmatrana dužina	Posmatrana širina	Razlika između dužina	Razlika između širina
		° '	° '	° '	° '		
12. dec.	2792	♑ 6.32	8.18$\frac{1}{2}$	♑ 6.31$\frac{1}{2}$	8.26	÷ 1	− 7$\frac{1}{2}$
29. dec.	8403	♓ 13.13$\frac{2}{3}$	28.00	♓ 13.11$\frac{3}{4}$	28.10 $\frac{1}{12}$	+ 2	− 10$\frac{1}{12}$
5. feb.	16669	♉ 17.00	15.29$\frac{2}{3}$	♉ 16.59$\frac{7}{8}$	15.27 $\frac{2}{5}$	+ 0	+ 2$\frac{1}{4}$
5. mart	21737	29.19$\frac{3}{4}$	12.4	29.20$\frac{6}{7}$	12.3 $\frac{1}{2}$	− 1	+ $\frac{1}{2}$

Kasnije je dr Halej odredio orbitu pomoću aritmetičkog računa sa većom preciznošću nego što se ona može postići linearnim opisom. Pošto je zadržao mesto čvorova u ♉ i ♉ 1° 53' i inklinaciju ravni orbite na ravan ekliptike koja iznosi 61° 20$\frac{1}{3}$' i pošto je vreme prolaska komete kroz perihel 8. decembar, u 00^h 04' – pronašao je da je rastojanje perihela od uzlaznog čvora, izmereno na orbiti komete, iznosilo 9° 20', a da je žižni parametar parabole 2430 delova, pod pretpostavkom da srednje rastojanje Sunca od Zemlje iznosi 100000. Iz tih podataka je, pomoću preciznog aritmetičkog računa, izračunao položaje kometa u vremenima posmatranja, a oni su predstavljeni u narednoj tabeli.

Kometa					
Istinsko vreme	Rastojanje od Sunca	Izračunata dužina	Izračunata širina (N)	Greške	
				dužina	širina
d h ' "		° ' "	° ' "	' "	' "
Dec. 12. 4.46	28028	♑ 6.29.25	8.26. 0	− 3.5	− 2.0
21. 6.37	61076	♒ 5. 6.30	21.43.20	− 1.42	+ 1.7
24. 6.18	70008	18.48.20	25.22.40	− 1.3	− 0.25
26. 5.20	75576	28.22.45	27. 1.36	− 1.28	+ 0.44
29. 8. 3	84021	♓ 13.12.40	28.10.10	+ 1.59	+ 0.12
30. 8.10	86661	17.40. 5	28.11.20	+ 1.45	− 0.33
Jan. 5. 6. 1$\frac{1}{2}$	101440	♈ 8.49.49	26.15.15	+ 0.56	+ 0.8
9. 7. 0	110959	18.44.36	24.12.54	+ 0.32	+ 0.58
10. 6. 6	113162	20.41. 0	23.44.10	+ 0.10	+ 0.18
13. 7. 9	120000	26. 0.21	22.17.30	+ 0.33	+ 0.2
25. 7.59	145370	♉ 9.33.40	17.57.55	− 1.10	+ 1.25
30. 8.22	155303	13.17.41	16.42. 7	− 2.10	− 0.11
Feb. 2. 6.35	160951	15.11.11	16. 4.15	− 2.42	+ 0.14
5. 7. 4$\frac{1}{2}$	166686	16.58.55	15.29.13	− 0.41	+ 2.0
25. 8.41	202570	26.15.46	12.48. 0	− 0.35	+ 1.10
Mart 5.11.39	216205	29.18.35	12. 5.40	+ 0.35	+ 2.14

Ta kometa takode se pojavila i u novembru prethodne godine, a u Koburgu u Saksoniji (4, 6. i 11. novembra, O. S.) posmatrao ju je Gotfrid Kirš (Gottfried Kirch). Prema položaju komete u odnosu na najbližu fiksnu zvezdu, posmatranu sa dovoljno preciznosti teleskopom od dve i od deset stopa, zatim, prema razlici dužina u Koburgu i Londonu na 11° i prema mestima fiksnih zvezda posmatranih od strane gospodina Paunda i dr Haleja, Kirš je odredio položaje komete na sledeći način.

Dana 3. novembra u 17^h 2', relativnog vremena u Londonu, kometa se nalaziła na ♌ 29° 51', sa širinom 17° 45' severno.

Dana 5. novembra u 15^h 58', kometa se nalazila u ♍ 3° 23', sa širinom 1° 6' severno.

Dana 10. novembra u 16^h 31', kometa je bila jednako udaljena od dve zvezde u ♍, koje imaju Bajerove oznake σ i τ; ipak, još uvek nije sasvim dodirnula pravu liniju koja ih spaja, već je bila na malom rastojanju od nje. Prema Flemstidovom katalogu ta zvezda σ tada se približno nalazila u ♍ 14° 15', sa širinom 1° 41' severno, a zvezda τ se nalazila u ♍ 17° $3\frac{1}{2}$' sa širinom 0° 34' južno, a središnja tačka između tih zvezda se nalazila u ♍ 15° $39\frac{1}{2}$' sa širinom 0° $33\frac{1}{2}$' severno. Neka rastojanje komete od te prave linije iznosi otprilike 10' ili 12', zatim, neka razlika između dužine komete i te središnje tačke bude 7'; a razlika širine približno $7\frac{1}{2}$'. Odatle sledi da se kometa nalazila u ♍ 15° 32', sa širinom oko 26' severno.

Prvo posmatranje prema položaju komete u odnosu na određene male fiksne zvezde posedovalo je svu preciznost koja bi se mogla poželeti. Drugo posmatranje je takođe bilo dovoljno precizno. U trećem posmatranju, koje je bilo najmanje precizno, moguća je greška od 6 ili 7 minuta, ali ne više od toga. Dužina komete, pronađena prvim i najpreciznijim posmatranjem, kada je izračunata za gore pomenutu paraboličnu orbitu, iznosila je ♌ 29° 30' 22", sa širinom 1° 25' 7" severno, a njeno rastojanje od Sunca iznosilo je 115546.

Zatim, dr Halej je uočio da se velika kometa pojavila četiri puta tokom jednakih intervala od 575 godina (u septembru posle ubistva Julija Cezara; 531. godine posle Hrista u konzulatu Lampadijusa i Oresta, 1106. godine posle Hrista u februaru i na kraju 1680. godine, a imala je dugačak i izvanredan rep, osim kada je viđena posle Cezarove smrti, jer u tom vremenu, usled nezgodnog položaja Zemlje, rep nije bio toliko primetan). Potom je Halej potražio eliptičnu orbitu čija bi najveća osa trebalo da iznosi 1382957 delova, a srednje rastojanje Zemlje od Sunca 10000 delova. Po takvoj bi orbiti kometa trebalo da kruži tokom 575 godina. Pošto je smestio uzlazni čvor u ♋ 2° 2', inklinaciju ravni orbite prema ravni ekliptike pod uglom od 61° 6' 48", perihel komete u toj ravni u ♐ 22° 44' 25", jednako vreme perihela u decembru 7^d 23^h 9', rastojanje perihela od uzlaznog čvora u ravni ekliptike 9° 17' 35", a konjugovana osa = 18481,2 – onda je izračunao kretanja komete po toj eliptičnoj orbiti. Položaji komete, koji su izvedeni iz posmatranja i koji su dobijeni izračunavanjem za ovu orbitu, mogu se videti u narednoj tabeli.

Istinsko vreme	Posmatrana dužina	Posmatrana širina (N)	Izračunata dužina	Izračunata širina	Greške	
					dužina	širina
d h ′	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	′ ″	′ ″
Nov.						
3.16.47	♌ 29.51. 0	1.17.45	♌ 29.51.22	1.17.32 (N)	+ 0.22	– 0.13
5.15.37	♍ 3.23. 0	1. 6. 0	♍ 3.24.32	1. 6. 9	+ 1.32	+ 0.9
10.16.18	15.32. 0	0.27. 0	15.33. 2	0.25. 7	+ 1.2	– 1.53
16.17.00			♎ 8.16.45	0.53. 7 (S)		
18.21.34			18.52.15	1.26.54		
20.17. 0			28.10.36	1.53.35		
23.17. 5			♏ 13.22.42	2.29. 0		
Dec.						
12. 4.46	♑ 6.32.30	8.28. 0	♑ 6.31.20	8.29.6 (N)	– 1.10	+ 1.6
21. 6.37	♒ 5. 8.12	21.42.13	♒ 5. 6.14	91.44.42	– 1.58	+ 2.29
24. 6.18	18.49.23	25.23. 5	18.47.30	25.23.35	– 1.53	+ 0.30
26. 5.21	28.24.13	27. 0.52	28.21.42	27. 2. 1	– 2.31	+ 1.9
29. 8. 3	♓ 13.10.41	28. 9.58	♓ 13.11.14	28.10.38	+ 0.33	+ 0.40
30. 8.10	17.38. 0	28.11.53	17.38.27	28.11.37	+ 0.7	– 0.16
Jan.						
5. $6.1\frac{1}{2}$	♈ 8.48.53	26.15. 7	♈ 8.48.51	26.14.57	– 0.2	– 0.10
9. 7. 1	18.44. 4	24.11.56	18.43.51	24.12.17	– 0.13	+ 0.21
10. 6. 6	20.40.50	23.43.32	20.40.23	23.43.25	– 0.27	– 0.7
13. 7. 9	25.59.48	22.17.28	26. 0. 8	22.16.32	+ 0.20	– 0.56
25. 7.59	♉ 9.35. 0	17.56.30	♉ 9.34.11	17.56. 6	– 0.49	– 0.24
30. 8.22	13.19.51	16.42.18	13.18.28	16.40. 5	– 1.23	– 2.13
Feb.						
2. 6.35	15.13.53	16. 4. 1	15.11.59	16. 2.17	– 1.54	– 1.54
5. $7.4\frac{1}{2}$	16.59. 6	15.27. 3	16.59.17	15.27. 0	+ 0.11	– 0.3
25. 8.41	26.18.35	12.46.46	26.16.59	12.45.22	– 1.36	– 1.24
Mart						
1.11.10	27.52.42	12.23.40	27.51.47	12.22.28	– 0.55	– 1.12
5.11.39	29.18. 0	12. 3.16	29.20.11	12. 2.50	+ 2.11	– 1.26
9. 8.38	♊ 0.43. 4	11.45.52	♊ 0.42.43	11.45.35	– 0.21	– 0.17

Posmatranja ove komete od početka do kraja savršeno se slažu sa kretanjem komete po orbiti koja je upravo opisana, baš kao što se kretanja planeta slažu sa teorijama pomoću kojih su izračunata. Na osnovu tog argumenta jasno je pokazano da se svaki put pojavila jedna te ista kometa, kao i da je orbita te komete tačno definisana.

U prethodnoj tabeli izostavili smo posmatranja sačinjena 16, 18, 20. i 23. novembra jer nisu bila dovoljno precizna. Tokom tih dana nekoliko osoba posmatralo je kometu. Pontej (Pontheaus) i njegovi pomoćnici posmatrali su kometu u ♎ 8° 30' sa širinom 0° 40' južno, 6. novembra u 6^h ujutru u Rimu (tj., u 5^h 10' u Londonu) pomoću niti koje su usmerene ka fiksnim zvezdama. Njihova posmatranja mogu se videti u studiji koju je Pontej objavio u vezi s ovom kometom. Celije (Cellius), koji je bio prisutan i koji je preneo svoja posmatranja u pismu upućenom Kaziniju, uočio je kometu u istom času i u ♎ 8° 30' sa širinom 0° 30' južno. Na sličan način uočio ju je i Galetije (Galletius) u istom tom času u Avinjonu (tj., u 5^h 42' ujutru u Londonu) u ♎ 8° 30' 8" bez širine. Međutim, prema teoriji, kometa je u tom vremenu bila u ♎ 8° 16' 45" sa širinom 0° 53' 7" južno.

U Rimu je 18. novembra u 6^h 30' ujutru (tj., u 5^h 40' u Londonu) Pontej uočio kometu u ♎ 13° 30' sa širinom 1° 20' južno, a Celije u ♎ 13° 60' sa širinom 1° 00' južno. Međutim, u 5^h 30' ujutru u Avinjonu, Galetije ju je video u ♎ 13° 00' sa širinom 1° 00' južno. Na Univerzitetu La Fleš u Francuskoj, u 5^h ujutru (tj., u 5^h 9' u Londonu) Ango (Ango) ju je uočio tačno između dve male zvezde, od kojih je jedna središnja od tri koje leže na pravoj liniji na južnoj ruci Device (Bajerova oznaka ψ), a druga ona koja je najdalja na njenom krilu (Bajerova oznaka θ). Odatle sledi da se kometa nalazila u ♎ 12° 46' sa širinom 50' južno. A dr Halej me je informisao da je u istom danu u Bostonu u Novoj Engleskoj, na širini od $42\frac{1}{2}$ stepeni i u 5^h ujutru (tj., u 9^h 44' u Londonu), ta kometa viđena u blizini ♎ 14°, sa širinom 1° 30' južno.

U Kembridžu je, 19. novembra u $4\frac{1}{2}$ časova, kometa bila udaljena od zvezde Spika ♍ približno 2° ka severozapadu. Položaj Spike u tom vremenu bio je u ♎ 19° 23' 47" sa širinom 2° 1' 59" južno. Istog dana, u 5^h ujutru u Bostonu u Novoj Engleskoj, kometa je bila udaljena od zvezde Spika ♍ 1° sa razlikom od 40' u širini. Istog dana, na ostrvu Jamajka, ona je bila udaljena od zvezde Spika ♍ približno 1°. Gospodin Artur Storer (Arthur Storer) je,

istog dana na reci Pataksent u blizini Hanting Krika u Merilendu, na granici sa Virdžinijom, na širini $38\frac{1}{2}°$, u 5^h ujutru, (u 10 časova u Londonu), video kometu iznad Spike ♍, a koja se gotovo spojila sa njom, jer je rastojanje između njih bilo otprilike $\frac{3}{4}$ jednog stepena. Kada sam uporedio ova posmatranja, zaključio sam da je u 9^h 44' u Londonu ova kometa bila u ♎ 18° 50', sa širinom od otprilike 1° 25' južno. Ipak, prema teoriji, kometa se u tom vremenu nalazila u ♎ 18° 52' 15" sa širinom 1° 26' 54" južno.

Profesor astronomije Montenari (Montenari) iz Padove je 20. novembra u 6^h ujutru u Veneciji (u 5^h 10' u Londonu) uočio kometu u ♎ 23° sa širinom 1° 30' južno. Istog dana je ta kometa u Bostonu bila udaljena od Spike ♍ za otprilike 4° dužine ka istoku, i stoga se približno nalazila u ♎ 23° 24'.

Pontej i njegovi pomoćnici su 21. novembra u $7\frac{1}{4}$ časova ujutru uočili kometu u ♎ 27° 50' sa širinom 1° 16' južno, Celije u ♎ 28°, Ango, u 5^h ujutru u ♎ 27° 45', a Montenari u ♎ 27° 51'. Istog dana je, na ostrvu Jamajka, viđena u blizini početka sazvežđa ♏ i otprilike na istoj širini sa zvezdom Spika ♍, tj., 2° 2'. Istog dana, u 5^h ujutru, u Balasoru u Istočnim Indijama (u 11^h 20' prethodne noći u Londonu) uzeto je rastojanje komete od ♍ na 7° 35' ka istoku. Kometa se nalazila na pravoj liniji između šiljka i tasa vage i zbog toga se tada nalazila u ♎ 26° 58', sa širinom od otprilike 1° 11' južno. Posle 5^h 40' (u 5^h ujutru u Londonu) nalazila se u ♎ 28° 12' sa širinom 1° 16' južno. Prema teoriji, kometa se tada nalazila ♎ 28° 10' 36" sa širinom 1° 53' 35" južno.

Montemari je 22. novembra video kometu u ♍ 2° 33'. Međutim, u Bostonu u Novoj Engleskoj je pronađena na otprilike ♍ 3°, sa skoro istom širinom kao i ranije, tj., 1° 30'. Istog dana je, u 5^h ujutru u Balasoru, kometa uočena u ♍ 1° 50'; a zbog toga se, u 5^h ujutru u Londonu, nalazila približno u ♍ 3° 5'. Istog dana ju je, u $6\frac{1}{2}$ časova ujutru u Londonu, dr Huk (Hook) uočio na otprilike ♍ 3° 30', i to na pravoj liniji koja prolazi kroz Spiku ♍ i Regulus, doduše, malo je odstupala od te linije ka severu. Na sličan način, Montenari je uočio da tog dana kao i nekoliko dana posle, prava linija, koja je povučena iz komete prema zvezdi Spika, prolazi preko južne strane Regulusa i to na veoma malom odstojanju. Prava linija koja prolazi kroz Regulus i Spiku seče ekliptiku u ♍ 3° 46' pod uglom od 2° 51'. Ako bi se kometa nalazila na toj liniji i u ♍ 3°, njena širina bi onda bila 2° 26'. Ipak, Huk i Montenari su se složili da se kometa nalazila na malom rastojanju od te linije ka severu,

kao i da njena širina mora biti nešto manja. Prema Montenarovim posmatranjima, 20. novembra širina komete skoro da je bila ista sa širinom Spike, tj., otprilike 1° 30'. Međutim, saglasno sa Hukom, Montenarijem i Angoom, širina se naprekidno uvećava i stoga bi 22. novembra bila primetno veća od 1° 30'. Ako bismo uzeli srednju između krajnjih granica upravo navedenih, tj., 2° 26' i 1° 30', onda bi širina iznosila otprilike 1° 58'. Huk i Montenari su se složili da je rep komete bio usmeren ka zvezdi Spika ♍ i da je malo odstupao od te zvezde, sudeći prema Huku, ka jugu, a sudeći prema Montenariju, ka severu. Prema tome, ta deklinacija je bila jedva vidljiva, a rep, koji je skoro paralelan sa ekvatorom, malo je odstupao od opozicije Sunca ka severu.

U Nirnbergu je 23. novembra u 5^h ujutru (u $4\frac{1}{2}$ časova u Londonu) gospodin Zimerman (Zimmerman) video kometu u ♍ 8° 8' sa širinom 2° 31' južno. A njeno mesto je dobijeno pomoću njenog rastojanja od fiksnih zvezda.

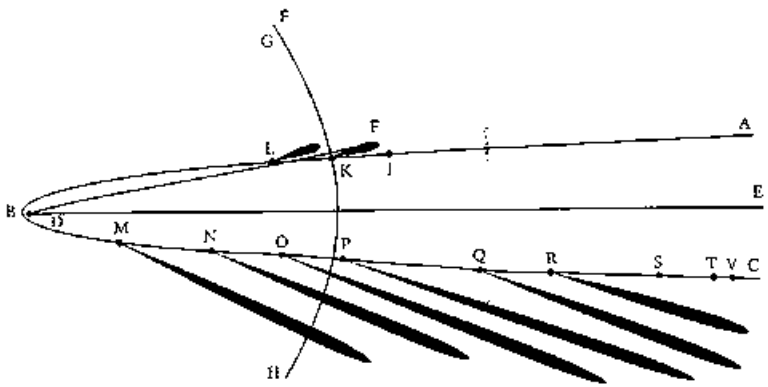
Pre izlaska Sunca, 24. novembra, kometu je video Montenari u ♍ 12° 52' na severnoj strani prave linije koja prolazi kroz Regulus i Spiku ♍, pa je zbog toga njena širina bila nešto manja od 2° 38'. Pošto se širina, kao što smo rekli, saglasno sa Montenarijem, Hukom i Angoom neprekidno uvećava, onda je ona 24. novembra bila nešto veća od 1° 58'. Na taj način možemo izračunati da srednja veličina iznosi 2° 18' i to bez značajne greške. Pontej i Galetije ukazivali su na to da se širina umanjuje, dok su Celije i posmatrač iz Nove Engleske tvrdili da je širina neprekidno ista, tj., da iznosi otprilike 1° ili $1\frac{1}{2}$°. Posmatranja Ponteja i Celija prilično su gruba, posebno ona koja su izvedena pomoću azimuta i visina, baš kao i Galetijeva. Bolja su ona koja su izvedena prema položaju komete u odnosu na fiksne zvezde, a koja su izvodili Montenari, Huk, Ango, posmatrač iz Nove Engleske, a ponekad i Pontej i Celije. Istog dana, u 5^h ujutru u Balasoru, kometa je uočena u ♍ 11° 45'. Zbog toga se u 5^h ujutru u Londonu nalazila približno u ♍ 13°. Prema teoriji, kometa se u tom vremenu nalazila u ♍ 13° 22' 42".

Montenari je, 25. novembra, pre izlaska Sunca, uočio kometu približno u ♍ $17\frac{3}{4}$°. Istovremeno je Celije uočio da je kometa bila na pravoj liniji između sjajne zvezde na desnom bedru Device i južne skale Vage, a ta prava linija seče putanju komete u ♍ 18° 36'. Prema teoriji, kometa se približno nalazila u ♍ $18\frac{1}{3}$°.

Iz svega ovoga očigledno je da se posmatranja slažu s teorijom sve dotle dok se slažu međusobno. Na osnovu tog argumenta, jasno je da je to bila jedna te ista kometa koja se pojavljivala od 4. novembra do 9. marta. Putanja te komete dva puta je presekla ravan ekliptike, pa zbog toga nije bila pravolinijska. Nije presekla ravan ekliptike na dva suprotna dela neba, već na kraju Device i početku Jarca, uključujući pritom luk od oko 98°. Prema tome, putanja komete je umnogome odstupala od velikog kruga, jer, u novembru je odstupala od ekliptike najmanje 3° ka jugu, a u decembru 29° ka severu. Dva dela orbite, pri čemu se kometa s jednog udaljavala od Sunca, a s drugog približavala, međusobno su odstupala pod vidljivim uglom od 30°, kao što je uočio Montenari. Kometa je prošla kroz devet znakova, tj., od poslednjeg stepena ♌ do početka ♎, osim znaka ♌ kroz koji je prošla ranije pre nego što je postala vidljiva. Ne postoji nijedna druga teorija prema kojoj bi kometa mogla ikada da pređe tako velik deo neba sa pravilnim kretanjem. Kretanje ove komete bilo je veoma neujednačeno. Oko 20. novembra ona je opisala otprilike 5° za dan. Potom je, između 26. novembra i 12. decembra, njeno kretanje počelo da se usporava, pa je tokom $15\frac{1}{2}$ dana opisala samo 40°. Ipak, njeno kretanje se kasnije ubrzalo, pa je dnevno opisivala otprilike 5°, sve dok kretanje nije opet počelo da se usporava. Teorija koja potpuno odgovara tako neujednačenom kretanju, koje se prostire kroz tako velik deo neba, koja je zasnovana na istim zakonima kao i teorija planeta i koja se precizno slaže sa preciznim astronomskim posmatranjima, ne može biti ništa drugo do istinita.

Misleći da je prikladno, na slici sam predstavio verni prikaz orbite koju kometa opisuje, kao i rep koji ona emituje na nekoliko mesta, a koji su u ravni putanje. U ovoj shemi ABC predstavlja putanju komete, D Sunce, DE osu putanje, DF liniju čvorova, GH presecenje sfere *orbis magnusa* i ravni putanje, I mesto komete 4. novembra, 1680. godine, K njeno mesto 11. novembra iste godine, L njeno mesto 19. novembra, M – 12. decembra, N – 21. decembra, O – 29. decembra, P njeno mesto 5. januara naredne godine, Q – 25. januara, R – 5. februara, S – 25. februara, T – 5. marta i V njeno mesto 9. marta. Pri određivanju dužine repa komete sačinio sam sledeća posmatranja.

Rep se nije pojavio 4. i 6. novembra. Počeo je da se pojavljuje 11. novembra, ali se nije pojavio iznad $\frac{1}{2}$ stepena dužine kroz teleskop od 10 stopa. Pontej je 17. novembra video rep čija je dužina iznosila više od 15°. U Novoj Engleskoj je 18. novembra rep imao dužinu 30°, bio je direktno suprotno od Sunca i protezao se prema



planeti Mars koja je tada bila u ♍ 9° 54'. U Merilandu je 19. novembra rep bio dužine od 15° ili 20° stepeni. Prema posmatranjima gospodina Flemstida 10. decembra rep je prošao kroz sredinu rastojanja između repa Zmije u sazvežđu Zmijonoša i zvezde δ na južnom krilu sazvežđa Orla, a nestao je u blizini zvezda A, ω i *b* (prema Bajerovim oznakama). Prema tome, kraj repa se nalazio u ♑ $19\frac{1}{2}^{\circ}$, sa širinom od otprilike $34\frac{1}{4}^{\circ}$ severno. Rep se, 11. decembra, podignuo do glave sazvežđa Strelica (Bajerove oznake α i β) i nestao je u ♑ 26° 43' sa širinom 38° 34' severno. Kroz sredinu Strelica, prošao je 12. decembra i nije se daleko od toga ni prostirao; nestao je približno u ♒ 4°, sa širinom $42\frac{1}{2}^{\circ}$ severno. Sve ovo podrazumeva se za dužinu svetlijeg dela repa, jer njen manje svetao deo uočio je Pontej u Rimu, 12. decembra u 5° i 40', (moguće usled vedrog neba). Tad se rep komete podigao do 10° iznad zvezde Labud, koja je bila 45' udaljena od repa prema zapadu i prema severu. Otprilike u tom vremenu, rep je bio 3° širi prema gornjem kraju, pa je zbog toga njegova sredina bila 2° 15' udaljena od te zvezde prema jugu, dok je gornji kraj bio u ♓ 22° sa širinom 61° severno. Odatle sledi da je dužina repa bila 70°. Rep se proširio 21. decembra, skoro do stolice Kasiopeje, na jednakom rastojanju od β i Šedira, tako da je njegovo rastojanje od bilo koje od ovih zvezda bilo jednako sa njihovim međusobnim rastojanjem, pa je zbog toga rep nestao u ♈ 24° sa širinom $47\frac{1}{2}^{\circ}$. Rep komete je 29. decembra dodirnuo zvezdu Šeat sa njene leve strane i potpuno je ispunio prostor između dve zvezde na severnom stopalu Andromede. Tada je njegova dužina bila 54° i zbog toga je nestao u ♉ 19° sa širinom od 35°. Zvezdu π na grudima Andromede dodirnuo je 5. januara sa njene desne strane, a s leve strane dodirnuo je zvezdu μ na njenom pojasu i, sudeći prema našim posmatranjima, njegova dužina je iznosila 40°. Međutim, rep je bio zakrivljen, pa se njegova konveksna strana nalazila prema jugu, a u blizini glave komete, sa krugom koji prolazi kroz Sunce i kroz glavu komete, činio je ugao od 4°, dok je prema drugom kraju bio nagnut ka tom krugu pod uglom od otprilike 10° ili 11°, a tetiva repa zajedno sa krugom pravila je ugao od 8°. Rep je nestao 13. januara između Alameha i Algola sa svetlošću koja je bila dovoljno primetna, dok je sa manjom svetlošću nestao u oblasti zvezde χ sa Persejeve strane. Rastojanje kraja repa od kruga koji prolazi kroz Sunce i kroz kometu iznosilo je 3° 50', dok je inklinacija tetive repa ka tom krugu iznosila $8\frac{1}{2}^{\circ}$. Rep je, 25 i 26. januara, sijao sa slabom svetlošću do dužine od 6° ili 7°. Jednu ili dve noći kasnije, kada je bilo veoma vedro nebo, njegova dužina dostigla je 12°, ili nešto malo više, sa svetlošću koja je bila jedva primetna. Međutim, njegova osa bila je direktno usmerena ka svetloj zvezdi na istočnom ramenu Kočijaša i zbog toga je odstupala od opozicije Sunca ka severu pod uglom od 10°. Na kraju, 10. februara, posmatrao sam teleskopom rep dužine od 2°, koji se, usled slabije svetlosti o kojoj sam govorio, nije pojavio kroz stakla. Ipak, Pontej je pisao da je 7. februara uočio rep od 12° dužine. Kometa je 25. februara bila bez repa i nastavila je tako da se kreće sve dok nije nestala.

Ako razmatramo opisanu orbitu i uporedimo ostale pojave u vezi sa kometom, lako ćemo zaključiti da su tela kometa čvrsta, sabijena, jaka i izdržljiva, baš kao i tela planeta. Ako bi tela kometa bila samo para ili isparenja Zemlje, Sunca ili drugih planeta, onda bi se pri prolasku u blizini Sunca momentalno rasula. Jer, toplota Sunca je proporcionalna sa gustinom svojih zraka, tj., obrnuto je proporcionalna sa kvadratom rastojanja mesta od Sunca. Prema tome, pošto se 8. decembra, kada je kometa bila u perihelu, njeno rastojanje od centra Sunca odnosilo prema rastojanju Zemlje od istog tog centra kao 6 prema 1000, onda bi se toplota Sunca na kometi odnosila prema toploti Sunca tokom leta kao 1000000 prema 36, ili kao 28000 prema 1. Ipak, kao što sam ispitao, toplota kljućale vode 3 puta je veća od toplote koju suva zemlja prima od Sunca tokom leta, a toplota usijanog gvožđa (ako je moja pretpostavka tačna) otprilike je tri ili četiri puta veća od toplote kljućale vode. Prema tome, toplota koju suvo tlo komete, kada je u perihelu, može primiti od Sunčevih zraka, otprilike je 2000 puta veća od toplote usijanog gvožđa. Sa takvom žestokom toplotom, sva

para, isparenja i isparljive materije momentalno bi sagoreli i istrošili se.

Odatle sledi da ta kometa prima ogromnu toplotu od Sunca i zadržava tu toplotu tokom izuzetno dugog vremenskog perioda. Pritom, užarena gvozdena lopta sa prečnikom od 1 inča, koja je izložena otvorenom vazduhu, jedva bi izgubila svu svoju toplotu tokom vremena od jednog časa. Veća lopta duže bi zadržala svoju toplotu i to u proporciji sa prečnikom, jer je površina (u odnosu na onu veličinu koja je ohlađena pri kontaktu sa okolnim vazduhom) u manjoj proporciji s obzirom na količinu sadržane materije. Prema tome, lopta od usijanog gvožđa koja je jednaka sa Zemljom, koja ima prečnik od 40000000 stopa, jedva bi se ohladila tokom istog broja dana, približno za 50000 godina. Međutim, pretpostavljam da se trajanje toplote, usled nekih skrivenih uzroka, može uvećati u još manjoj proporciji nego što je proporcija s prečnicima, i biće mi drago da se istinska proporcija istraži eksperimentima.

Pored toga, potrebno je uočiti da je kometa tokom decembra, upravo nakon zagrevanja Suncem, emitovala mnogo duži i mnogo sjajniji rep nego u prethodnom mesecu, kada još uvek nije stigla da svog perihela. Uopšteno govoreći, najveći i najsjajniji repovi uvek nastaju iz kometa neposredno nakon njihovog prolaska u blizini Sunca. Prema tome, toplota koju prima kometa doprinosi većoj veličini repa i mislim da odatle možemo zaključiti da je rep ništa drugo do veoma fina para, koju glava ili jezgro komete emituju svojom toplotom.

Ipak, do sada smo imali tri različita mišljenja o repovima kometa. Prema prvom mišljenju, repovi nisu ništa drugo do zraci Sunčeve svetlosti koja se prenosi kroz glavu komete, a za koju se pretpostavlja da je providna. Prema drugom mišljenju, repovi nastaju iz prelamanja svetlosti koja prolazi od glave komete ka Zemlji. Na kraju, prema trećem mišljenju, repovi su svojevrsni oblaci ili para koji konstantno nastaju iz glave komete i koji teže ka delovima koji su suprotni Suncu. Prvo je takvo mišljenje koje još uvek nije poznato u optici, jer, zraci Sunca viđeni su u zamračenoj sobi samo kao posledica odbijanja svetlosti od malih čestica prašine i dima koji uvek lete po vazduhu. Iz tog razloga, u vazduhu koji sadrži gust dim, ti zraci se pojavljuju kao svetliji i snažnije pokreću čula, dok se u finijem vazduhu pojavljuju kao manje svetli i teško ih je primetiti. Međutim, na nebu, u mestima gde nema materije koja bi odbijala svetlost, zraci se nikad ne mogu ni videti. Svetlost se ne

razaznaje po svom zraku, već po refleksiji tog zraka na naše oči, jer vid i ne može drugačije proizaći do padanjem zraka na naše oči. Odatle sledi da mora postojati neka reflektujuća materija u onim delovima u kojima je viđen rep komete. U suprotnom bi svi delovi neba sijali istom jačinom, pošto bi svi nebeski prostori bili podjednako osvetljeni Suncem. Drugo mišljenje podleže mnogim poteškoćama. Nikad nije viđeno da su repovi kometa prošarani onim bojama s kojima je prelamanje obično nerazdvojno, a udaljeno prenošenje svetlosti sa fiksnih zvezda i planeta ka nama pokazuje nam da eter ili nebeska sredina nije obdarena bilo kakvim svojstvom prelamanja. Prema posmatranjima Egipćana, navodno su fiksne zvezde ponekad bile okružene *komom* ili *kapitlitiumom*. Ipak, pošto se retko dešavalo, radije bi to trebalo pripisati povremenim prelamanjem svetlosti na oblacima. Zračenje i svetlucanje fiksnih zvezda potrebno je pripisati prelamanju svetlosti kako u očima tako i u vazduhu, jer, i zračenje i svetlucanje momentalno nestaju kada teleskop prinesemo očima. Treperenjem vazduha i isparavanjem dešava se da se zraci svetlosti naizmenično odvraćaju od uskog prostora zenice oka. Ipak, tako nešto se ne dogada na mnogo širem sočivu teleskopa. Odatle sledi da u prvom slučaju proizlazi svetlucanje, a da u drugom ono nestaje. To nestajanje dokaz je pravilnog prenošenja svetlosti preko nebeskog prostranstva, bez ijednog osetnog prelamanja. Međutim, kako bismo otklonili prigovor koji može nastati u vezi sa nepojavljivanjem repa na takvim kometama koje sijaju sa slabom svetlošću, jer su sekundarni zraci toliko slabi da ne utiču na naše oči, i što se zbog toga ne pojavljuju repovi fiksnih zvezda, neophodno je znati da se pomoću teleskopa svetlost fiksnih zvezda može uvećati više od 100 puta, a da se pritom ne vide repovi. Svetlost planeta je jača jer su sasvim bez repova, dok je ponekad viđeno da komete imaju ogromne repove pri čemu je svetlost njihovih glava blaga i slaba. Tako je i kometa iz decembra meseca 1680. godine, kada je njena svetlost jedva bila jednaka sa svetlošću zvezde drugog reda veličine, emitovala primetan rep koji se širio do dužine od 40°, 50°, 60°, 70° i više. Zatim, 27. i 28. januara, kada je svetlost glave komete bila jednaka sa svetlošću zvezde sedmog reda veličine, rep se (kao što smo ranije rekli) sa svetlošću koja je slaba ali dovoljno primetna, širio do 6° ili 7° dužine, dok se sa još slabijom svetlošću protezao do 12°, čak i više. Ipak, 9. i 10. februara, rep nije bio vidljiv golim okom, ali sam ga uočio pomoću teleskopa i imao je dužinu od 2°. Dalje, ako rep

nastaje prelamanjem svetlosti od nebeske materije i ako usled oblika nebeskog prostranstva odstupa od opozicije sa Suncem, onda bi odstupanje na istim mestima u nebeskom prostranstvu uvek trebalo da bude usmereno prema istim delovima. Međutim, 28. decembra 1680. godine u $8\frac{1}{2}$ časova popodne u Londonu je kometa viđena u ♌ 8° 41', sa širinom 28° 6' severno, dok je Sunce bilo u ♑ 18° 26'. Kometa je 29. decembra 1577. godine bila u ♌ 8° 41' sa širinom 28° 40' severno, dok je Sunce, kao i ranije, bilo otprilike u ♑ 18° 26'. U oba slučaja položaj Zemlje je bio isti, a kometa se pojavila na istom mestu na nebeskom prostranstvu. U prvom slučaju (sudeći kako prema mojim posmatranjima, tako i prema posmatranjima drugih) rep komete je odstupao od opozicije sa Suncem ka severu pod uglom od $4\frac{1}{2}°$, a u drugom slučaju je (prema posmatranjima Tiha Brahea) odstupao 21° ka jugu. Prema tome, pošto je opovrgnuto da repovi nastaju usled prelamanja svetlosti u nebeskom prostranstvu, preostaje stav da se fenomen repova kometa mora izvesti iz neke materije koja reflektuje svetlost.

Zakonima je potvrđeno da repovi kometa nastaju iz glava kometa i da teže ka onim delovima koji su suprotni sa Suncem. Na takav način, pošto se nalaze u ravni orbita kometa koje prolaze kroz Sunce, repovi konstantno odstupaju od opozicije sa Suncem ka delovima koje su glave kometa napustile pri kretanju po tim orbitama. Posmatrač, koji se nalazi u tim ravnima, uočava repove na delovima koji su direktno suprotno Suncu. Pri udaljavanju posmatrača od tih ravni, započinje da se pojavljuje odstupanje repova koje svakodnevno postaje veće. Odstupanje je manje, *caeteris paribus*, kada je rep više nagnut ka orbiti komete i kad se glava komete približava Suncu, a posebno kada je ugao odstupanja približno u blizini glave komete. Repovi koji ne odstupaju izgledaju pravi, a oni koji odstupaju – iskrivljeni. Zakrivljenje je veće kada je odstupanje veće i primetnije je kada je, *caeteris paribus*, rep duži. Jer, kada je rep kratak zakrivljenje se jedva raspoznaje. Ugao odstupanja je manji u blizini glave komete, a veći ka drugom kraju repa, pošto je konveksna strana repa usmerena ka onim delovima na kojima je nastalo odstupanje i koji se poklapaju sa pravom linijom koja je beskonačno povučena iz Sunca kroz glavu komete. Repovi, koji su širi i duži i koji jače sijaju, izgledaju blistaviji i oštrije definisani na konveksnoj nego na konkavnoj strani. Na osnovu toga, jasno je da fenomen repova kometa zavisi od kretanja njihovih glava, a ni u kom slučaju od mesta u nebeskom prostranstvu

u kom su viđeni. Prema tome, repovi ne nastaju iz prelamanja svetlosti u nebeskom prostranstvu, već iz glava kometa koje obezbeđuju materiju koja oblikuje repove. Kao što se u našem vazduhu dim zagrejanog tela podiže vertikalno kada je telo u stanju mirovanja ili koso kada se telo kreće, tako se i u nebeskom prostranstvu, gde sva tela teže ka Suncu, dim i para (kao što smo ranije rekli) podižu od Sunca ili vertikalno, ako je telo u stanju mirovanja, ili koso, ako telo tokom svog kretanja uvek napušta ona mesta sa kojih su se ranije podigli gornji delovi pare ili dima. Ta ukošenost će biti manja kada se para brže podiže, tj., u blizini tela koje se dimi koje je tad blizu Sunca. Međutim, pošto je ukošenost različita, onda će stub pare biti zakrivljen, i pošto je para s prednjih strana unekoliko skorašnjija, tj., pošto se podigla malo dalje od tela, ona će sa te strane biti nešto gušća i odbijaće više svetlosti, a biće i jasnije definisana. Neću dodati ništa u vezi sa iznenadnim i neizvesnim uzburkavanjima repova kometa i njihovim nepravilnim oblicima, a koje autori ponekad opisuju, jer one mogu nastati usled promena našeg vazduha i usled kretanja naših oblaka koji zaklanjaju pojedine delove tih repova, a možda i usled delova Mlečnog puta koji se mogu pomešati ili pogrešno uzeti za delove repova kometa koje tuda prolaze.

Iz razređenosti našeg vazduha možemo lako razumeti zbog čega atmosfere kometa mogu da obezbede dovoljno isparavanja kako bi ispunile tako ogromne prostore. U blizini Zemljine površine vazduh zauzima prostor koji je 850 puta veći od onog koji zauzima voda s istom težinom. Zbog toga je cilindar vazduha koji je visok 850 stopa jednak sa cilindrom vode koji je iste širine, a čija visina iznosi 1 stopu. Međutim, cilindar vazduha, koji dostiže vrh atmosfere, jednake je težine sa cilindrom vode od oko 33 stope visine. Stoga, ako od ukupnog cilindra vazduha oduzmemo donji deo koji je visok 850 stopa, onda će preostali gornji deo biti jednake težine sa cilindrom vode koji je visok 32 stope. Odatle sam (na osnovu hipoteza, koje su potvrđene brojnim eksperimentima, a prema kojima je sabijanje vazduha proporcionalno sa težinom pritiskajuće atmosfere, a gravitacija obrnuto proporcionalna sa kvadratom rastojanja od centra Zemlje), izvođenjem računa prema Korolaru, Prop. XXII, Knjige II, pronašao da je, na visini jednog poluprečnika Zemlje od njene površine, vazduh ređi nego na površini i to u mnogo većoj proporciji od odnosa ukupnog prostora unutar Saturnove orbite prema sfernom prostoru od jednog

inča u prečniku. Prema tome, ako je sfera našeg vazduha debljine od jednog inča podjednako razređena kao i vazduh na visini od jednog poluprečnika Zemlje od njene površine, onda bi ispunila sve oblasti planeta do Saturnove orbite, pa čak i mnogo dalje. Pošto je vazduh na velikim rastojanjima izuzetno razređen, i pošto je atmosfera komete, računajući od njenog centra, obično otprilike deset puta viša od površine jezgra, pri čemu su repovi na još većoj visini, onda oni moraju biti izuzetno retki. S obzirom na veću debljinu atmosfere kometa, jaku gravitaciju njihovih tela ka Suncu, kao i na međusobno privlačenje čestica njihovog vazduha i isparavanja, moguće je da vazduh u nebeskom prostranstvu i na repovima kometa i nije toliko razređen. Ipak, iz ovog računa je jasno da je veoma mala količina vazduha i pare sasvim dovoljna da proizvede sve pojavnosti repova kometa. O izuzetnoj razređenosti njihovih repova možemo zaključiti na osnovu zvezda koje sijaju kroz njih. Zemljina atmosfera koju obasjava Sunčeva svetlost, premda je debljine od samo nekoliko milja, potpuno zatamnjuje i zaklanja ne samo svetlost svih zvezda, već i svetlost samog Meseca. Pritom, najmanja zvezda je viđena da sija kroz repove kometa sa izuzetnom debljinom, koji su na sličan način osvetljeni Suncem, i to bez i najmanjeg umanjenja njihovog sjaja. Pored toga, sjaj repova većine kometa obično nije veći od sjaja našeg vazduha, koji je debljine od 1 ili 2 inča i koji reflektuje svetlost Sunčevog zraka koji je pušten kroz rupu prozorskog okna u zatamnjenu sobu.

Možemo približno odrediti vreme tokom kojeg se para podiže od glave komete ka krajnjem delu repa tako što ćemo povući pravu liniju od krajnjeg dela repa prema Suncu, pri čemu ćemo označiti mesto u kom ta prava linija preseca orbitu komete. Jer, para koja se tad nalazi na krajnjem delu repa, i ukoliko se podiže pravolinijski od Sunca, moraće da započne podizanje od glave komete u vremenu kada se glava nalazila u tački preseka. Tačno je da se para ne podiže pravolinijski od Sunca, već da zadržava ono kretanje koje je imala na kometi pre svog podizanja. Kada složimo to kretanje sa kretanjem pri podizanju, para se ukošeno podiže. Prema tome, rešenje tog problema bilo bi preciznije ako bismo povukli liniju koja preseca orbitu paralelno sa dužinom repa, tj., tako da se malo razdvaja (usled krivolinijskog kretanja komete), od linije ili dužine repa. Pomoću tog principa pronašao sam da je para, koja se 25. januara nalazila na krajnjem delu repa, započela da se podiže od glave komete 11. decembra. Zbog toga je njeno ukupno podizanje

trajalo 45 dana. Međutim, celokupni rep, koji se pojavio 10. decembra, završio je svoje podizanje za dva dana koji su prošli od vremena kada se kometa nalazila u svom perihelu. Prema tome, para se na početku i u blizini Sunca podiže sa najvećom brzinom, a nakon toga nastavlja da se podiže sa kretanjem koje je konstantno usporeno njenom sopstvenom gravitacijom. Što se para više podiže, to se više dodaje dužini repa i dokle god se rep vidi, on je sačinjen skoro od sve pare koja se podigla od vremena kada je kometa bila u svom perihelu. Takođe, onaj deo pare koji se prvi podignuo i koji je oblikovao krajnji deo repa, ne iščezava sve dok ne dođe do velikog rastojanja kako od Sunca, od kog prima svetlost, tako i od naših očiju kojima se tad čini nevidljivim. Zbog toga su i repovi ostalih kometa, koji su kratki, koji ne nastaju iz njihovih glava sa brzim i neprekidnim kretanjem i koji ubrzo potom nestaju, stalni i trajni stubovi pare i isparavanja koji, pri podizanju od glava kometa sa sporim kretanjem koje traje mnogo dana, učestvujući pritom u kretanju glava na samom početku, nastavljaju da se kreću zajedno sa njima kroz nebesko prostranstvo. Odatle dobijamo još jedan argument prema kom su nebeski prostori slobodni i lišeni otpora, jer u njima i čvrsta tela planeta i kometa kao i izuzetno retka para repova kometa zadržavaju svoja brza kretanja sa najvećom slobodom tokom izuzetno dugog vremenskog perioda.

Kepler je pripisao podizanje repova kometa atmosferi njihovih glava, a njihov pravac, koji je usmeren ka delovima koji su suprotni Suncu, delovanju svetlosnih zraka koji prenose materiju repova kometa. Bez neke veće nepodudarnosti možemo pretpostaviti da u tako slobodnim prostorima tako fina materija, kao što je materija etra, može popuštati delovanju zraka Sunčeve svetlosti, premda ti zraci ne mogu primetno pomeriti velika tela u našim delovima usled tako očiglednog otpora. Drugi autori smatraju da mogu postojati svojevrsne čestice materije koje poseduju princip lakoće, pored onih koje imaju silu gravitacije. Zatim, da materija repova kometa može biti iste vrste kao i navedene lake čestice, kao i da njihovo podizanje od Sunca može biti posledica te lakoće. Međutim, pošto je gravitacija zemaljskih tela proporcionalna sa materijom tela, pa zbog toga ne može biti ni manja ni veća u istoj količini materije, sklon sam verovanju da to podizanje pre nastaje usled razređivanja materije repova kometa. Podizanje dima iz dimnjaka nastaje usled impulsa vazduha u kom se nalazi. Vazduh razređen toplotom se podiže jer je njegova specifična gravitacija uma-

njena i pri podizanju sa sobom nosi i dim. I zbog čega se onda na isti način rep komete ne podiže od Sunca? Zbog toga što zraci Sunca deluju na sredine koje oni prožimaju samo putem odbijanja i prelamanja svetlosti. Odbijene čestice koje su zagrejane tim delovanjem, zagrevaju materiju etera koji je sadržan u njima. Ta materija je razređena usled toplote koju zadobija i pošto je, usled tog razređivanja, specifična gravitacija kojom je ranije težila ka Suncu sad umanjena, ona će se odatle podizati i sa sobom će nositi odbijene čestice od kojih se sastoji rep komete. Ipak, podizanje pare dalje je proizvedeno kruženjem oko Sunca, usled čega para teži da se udalji od Sunca, dok je atmosfera Sunca i ostala materija na nebu ili u stanju mirovanja ili se kreće sporim kruženjem koje je izvedeno iz rotacije Sunca. Upravo su to uzroci podizanja repova kometa u blizini Sunca gde su njihove orbite više zakrivljene, pa se zbog toga same komete nalaze u gušćim, a samim tim i težim delovima sunčeve atmosfere. Odatle sledi da one tada emituju repove sa velikom dužinom, jer repovi koji tada nastaju, zadržavajući svoje sopstveno kretanje i u međuvremenu težeći ka Suncu, moraju kružiti po elipsama oko Sunca na sličan način kao i glave kometa. Usled takvog kretanja oni uvek moraju pratiti glave kometa i slobodno im prianjati. Gravitacija pare ka Suncu ne može više dovoditi do toga da se repovi udaljavaju od glave ka Suncu, nego što gravitacija glave primorava paru da se udalji od repova. Oni, usled zajedničke gravitacije, moraju ili padati zajedno ka Suncu, ili će odatle biti zajedno usporeni pri zajedničkom podizanju. I zbog toga će (usled već opisanih uzroka ili usled bilo kojih drugih) repovi i glave kometa lako zadobiti i slobodno zadržati bilo koji međusobni položaj, bez ometanja ili prepreka od tog zajedničkog centra gravitacije.

Prema tome, repovi koji se podižu kada se komete nalaze u perihelima nastaviće da se kreću zajedno sa glavama sve do udaljenih delova. Potom će se odatle ili vratiti opet nama, posle dugog vremenskog perioda, ili će tamo biti razređeni, pa će postepeno potpuno nestati. Nakon toga će se, pri približavanju glave komete prema Suncu, emitovati novi kratki rep od glave komete sa sporim kretanjem. Takvi repovi će postepeno biti izuzetno uvećani, posebno na rastojanju perihela kometa koji se približavaju atmosferi Sunca. Sva para u tim slobodnim prostorima nalazi se u konstantnom stanju razređivanja i dilatacije. Odatle sledi da su repovi svih

kometa širi na gornjim krajevima nego u blizini njihovih glava. Nije nemoguće da će se para, na takav način konstantno razređena i raširena, na kraju rasuti i rasejati preko celokupnog nebeskog prostranstva, kao i da će sopstvenom gravitacijom postepeno biti privučena ka planetama i pomešati se sa njihovom atmosferom. Kao što je more apsolutno neophodno za strukturu naše Zemlje, jer iz njih Sunčevim zagrevanjem može ispariti dovoljna količina pare koja će, pošto je zajedno skupljena u oblacima, pasti u vidu kiše kako bi pokvasila Zemlju i kako bi proizvela i prehranila biljke, a koja usled kondenzovanja na hladnoći na vrhovima planina (kao što neki filozofi razumno rasuđuju) može teći potocima i rekama, tako je za očuvanje mora i vlage na planetama, neophodno da komete iz svojih isparavanja i kondenzovane pare, koje se troše na vegetaciju i raspadanje potom pretvoreno u suvo tlo, mogu neprekidno da snabdevaju i iznova stvaraju. Jer, sva vegetacija u potpunosti se razvija pomoću tečnosti, dok se kasnije u velikoj meri raspadanjem pretvara u suvo tlo. Određeni mulj uvek se pronalazi na dnu raspadnute tečnosti i zbog toga se količina suve zemlje neprestano uvećava. Pritom, ako nije snabdevena od spolja, tečnost će se neprekidno umanjivati, sve dok potpuno ne iščezne. Zatim, sumnjam da taj gas, koji je uistinu najmanji ali najsuptilniji i najkorisniji deo našeg vazduha, i koji je neophodan za očuvanje života svih živih stvari, prvenstveno dolazi od kometa.

Atmosfera kometa, pri njihovom padanju ka Suncu, ističući ka repovima, potrošena je i umanjena, pa postaje uža (barem s one strane koja je okrenuta Suncu). S druge strane, pri udaljavanju od Sunca, atmosfera je ponovo uvećana, ako je Hevelije pravilno označio njihova pojavljivanja. Međutim, komete su viđene kao najmanje upravo posle najvećeg zagrevanja Suncem. Na taj način emitovale su najduže i najsjajnije repove, a možda su, istovremeno, jezgra okružena gušćim i tamnijim dimom na najnižim delovima njihove atmosfere, jer je dim, koji se podiže tako velikom i intenzivnom toplotom, obično gušći i tamniji. Ta glava komete koju smo opisivali, na jednakom rastojanju i od Sunca i od Zemlje, izgledala je tamnije posle prolaska kroz perihel, nego pre toga. Ona je u decembru obično upoređena sa zvezdom trećeg reda veličine, dok je u novembru upoređena sa onima koje su prvog ili drugog reda veličine. Oni koji su videli i prvo i drugo pojavljivanje opisali su da su posredi različite komete i da je prva bila veća od druge.

Tu kometu je, 19. novembra, uočio jedan mladić u Kembridžu. Iako je njena svetlost bila slaba ipak je bila jednaka sa svetlošću Spike u sazvežđu Device, a pritom je tad sijala sjajnije nego posle toga. Montenari je 20. novembra uočio da je veća od zvezde prvog reda veličine i da je njen rep tad iznosio 2^{p} dužine. Gospodin Storer je (u pismima koja sam imao priliku da vidim) napisao da je u decembru, kada se pojavio najveći i najsjajniji rep, glava komete bila veoma mala, i to mnogo manja od one koja je viđena u novembru pre izlaska Sunca. Nagađajući uzrok njene pojave, on je procenio da je na početku glava komete imala veću količinu materije koja se kasnije postepeno trošila.

Potom sam pronašao da se glave ostalih kometa, koje emituju dugačke i sjajne repove, pojavljuju kao male i nejasne (a sve to ide u prilog istoj svrsi). U Brazilu je 5. marta 1668. godine u 7 časova popodne, Valentije Estancije (Valentius Estancius) video kometu u blizini horizonta, prema jugozapadu. Glava te komete je bila jedva primetna, dok je njen rep bio neobično sjajan tako da se njegov odraz lako mogao videti na moru sa obale. Taj rep je izgledao kao vatreni snop koji se protezao na dužini od 23° od zapada ka jugu, skoro paralelno sa horizontom. Ipak, ta izuzetna blistavost trajala je samo tri dana i kasnije se brzo umanjivala. Pri tom umanjenju veličina repa se uvećavala, pa se u Portugalu činilo da je zauzela jednu četvrtinu neba, tj., 45°, prostirući se od zapada ka istoku sa primetnim sjajem, premda celokupni rep nije viđen u tim delovima, jer je glava uvek bila skrivena iza horizonta. Usled uvećanja veličine i umanjenja sjaja repa, sledi da se glava komete udaljavala od Sunca, a da je bila izuzetno blizu njega u svom perihelu, baš kao i kometa iz 1680. godine. Prema navodima Hevelijusa, u *Saksonskom letopisu* monaha Simeona Duramskog (Simeon of Durham) možemo čitati o sličnoj kometi koja se pojavila 1106. godine: *zvezda je bila mala i nejasna* (kao ona iz 1690. godine), *dok je njen rep bio veoma svetao i nalikovao je vatrenom snopu koji se rastezao od istoka prema severu.* Ta kometa se pojavila početkom februara, oko večeri, prema jugozapadnom delu neba. Iz toga i iz položaja repa možemo zaključiti da je glava komete bila blizu Sunca. Metju Pariz (Mattew Paris) kaže da je njeno rastojanje od Sunca iznosilo otprilike jedan lakat, od tri (tačnije od šest), pa sve do devet časova, a da je emitovala dugačak rep. Takva je bila i najsjajnija kometa koju je opisao Aristotel (Knjiga I, *Meteori 6*): *Glava komete*

nije se mogla videti, jer je zašla pre Sunca, ili je u najmanju ruku bila skrivena iza sunčevih zraka. Narednih dana videla se koliko god je to moguće, jer je bila na veoma malom rastojanju od Sunca i odmah potom je zašla. Raspršena svetlost glave komete, koja je skrivena izuzetno velikim sjajem (repa) *nije se još uvek pojavila. Međutim, kasnije* (kako Aristotel kaže), *kada je sjaj* (repa) *umanjen* (glava komete) *je povratila svoju prvobitnu blistavost pri čemu je sjaj* (njenog repa) *dostigao trećinu dela neba* (60°). *To pojavljivanje se desilo u zimskom periodu* (4. godine, 101. Olimpijade) *i kometa je dostigla pojas Oriona, gde je i iščezla.* Istina je da je kometa iz 1618. godine, koja je izašla neposredno ispod Sunčevih zraka sa veoma dugačkim repom, bila jednaka sa zvezdama prvog reda veličine, a možda je bila i malo veća. Ipak, obilje drugih kometa koje su se pojavljivale i koje su imale kraće repove bile su čak i veće od toga. Za neke od njih pojedini su rekli da su bile veličine Jupitera, zatim veličine Venere, pa čak i Meseca.

Rekli smo da su komete svojevrsne planete koje kruže po izuzetno ekscentričnim orbitama oko Sunca. Baš kao što su, pošto nemaju repove, obično manje one planete koje kruže po manjim orbitama i bliže Suncu, tako su verovatno i one komete, koje se u svojim perihelima približavaju Suncu, obično manje veličine, pa svojim privlačenjima ne utiču mnogo na Sunce. Poprečne prečnike njihovih orbita kao i periode njihovih revolucija ostavljam da budu određeni pomoću međusobnih upoređivanja onih kometa koje se nakon dugog vremenskog perioda ponovo vraćaju u iste te orbite. U međuvremenu, naredna Propozicija može baciti svetlo na to istraživanje.

PROPOZICIJA XLII. PROBLEM XXII

Korigovati ranije pronađenu orbitu komete.

Operacija 1. Pretpostavićemo položaj ravni putanje, koji je određen prema prethodnoj Propoziciji i odredićemo tri položaja komete, koji su izvedeni pomoću veoma preciznih posmatranja i koji su na velikim međusobnim rastojanjima. Zatim, pretpostavimo da A predstavlja vreme između prvog i drugog posmatranja, a B vreme između drugog i trećeg posmatranja. Pritom bi bilo zgodno da se u jednom od tih vremena kometa nalazi u svom perigeju, ili ne previše daleko od njega. Pomoću trigonometrijskih operacija

iz tih relativnih mesta pronaći ćemo tri istinska mesta komete na toj pretpostavljenoj ravni putanje. Onda ćemo iz tih pronađenih mesta i oko centra Sunca kao žiže opisati konusni presek pomoću aritmetičkih operacija, u skladu sa Prop. XXI, Knjige I. Neka su površine te figure, koja je ograničena poluprečnicima povučenim od Sunca ka pronađenim mestima, D i E. Pri tome je D površina između prvog i drugog posmatranja, a E površina između drugog i trećeg. Neka T predstavlja ukupno vreme tokom kog bi ukupna površina D + E trebalo da bude opisana sa brzinom komete pronađenoj prema Prop. XVI, Knjige I.

Operacija 2. Zadržavajući inklinaciju ravni putanje prema ravni ekliptike, neka je longituda čvorova ravni putanje P uvećana dodatkom od 20 ili 30 minuta. Zatim ćemo iz tri gore pomenuta posmatrana mesta komete pronaći tri istinska mesta (kao i ranije) u toj novoj ravni. Takođe ćemo pronaći i orbitu koja prolazi kroz ta mesta, kao i dve njene površine *d* i *e* koje su opisane između dva posmatranja. Neka *t* predstavlja ukupno vreme tokom kog bi ukupna površina *d* + *e* trebalo da bude opisana.

Operacija 3. Zadržavajući longitudu čvorova iz prvog posmatranja, neka se inklinacija ravni putanje prema ravni ekliptike umanjuje dodavanjem 20 ili 30 minuta, a nju ćemo označiti sa Q. Onda ćemo iz tri posmatrana relativna mesta komete pronaći tri istinska mesta u toj novoj ravni, orbitu koja prolazi kroz njih, kao i dve njene površine, δ i ε, opisane između posmatranja. I neka τ predstavlja ukupno vreme tokom kog bi ukupna površina δ + ε trebalo da bude opisana.

Uzećemo da se C prema 1 odnosi kao A prema B; G prema 1 kao D prema E; *g* prema 1 kao *d* prema *e*; γ prema 1 kao δ prema ε; neka S predstavlja istinsko vreme između prvog i trećeg posmatranja. Ako pravilno uočimo znakove + i −, pronaći ćemo brojeve *m* i *n* tako da je 2G − 2C = *m*G − *mg* + *n*G − *n*γ, a 2T − 2S = *m*T − *mt* + *n*T − *nt*. Ako u prvoj operaciji I predstavlja inklinaciju ravni putanje prema ravni ekliptike, a K dužinu bilo kog čvora, onda će I + *n*Q biti istinska inklinacija ravni putanje prema ravni ekliptike, a K + *m*P istinska dužina čvora. Na kraju, ako u prvoj, drugoj i trećoj operaciji veličine R, *r* i ρ predstavljaju parametre putanje, a veličine $\frac{1}{L}$, $\frac{1}{l}$ i $\frac{1}{\lambda}$ njene poprečne prečnike, onda će R + *mr* − *m*R + *n*ρ − *n*R biti istinski parametar, a $\frac{1}{L + ml - mL + n\lambda - nL}$ istinski po-

prečni prečnik putanje koju opisuje kometa. Iz datog poprečnog prečnika, poznat je i period komete. Q.E.I.

Međutim, period revolucija kometa i poprečni prečnici njihovih orbita ne mogu se dovoljno precizno odrediti drugačije do međusobnim upoređivanjem kometa koje se pojavljuju u različitim vremenima. Ako posle jednakih intervala vremena nekoliko kometa opisuje istu orbitu, onda odatle možemo zaključiti da one predstavljaju jednu te istu kometu koja kruži po istoj orbiti. Iz vremena njihovih revolucija poznati su i poprečni prečnici njihovih orbita, a iz tih prečnika možemo odrediti same eliptične orbite.

U tu svrhu neophodno je izračunati putanje mnogih kometa, pod pretpostavkom da su te putanje parabolične. Takve putanje uvek će se približno slagati sa fenomenima, kao što sledi ne samo iz parabolične putanje komete iz 1680. godine, već i iz one velike komete koja se pojavila 1664. i 1665. godine, a koju je uočio Hevelije. On je, prema svojim posmatranjima, izračunao longitude i latitude kometa, premda sa malom preciznošću. Međutim, prema istim posmatranjima dr Halej je ponovo izračunao mesta komete i iz tih novih mesta odredio je njenu putanju. Pritom je pronašao da se njen uzlazni čvor nalazio u ♊ 21° 13' 55", da je inklinacija orbite prema ravni ekliptike iznosila 21° 18' 40", da je rastojanje perihela od čvora, procenjeno na orbiti komete, 29° 27' 30", da se perihel nalazio u ♌ 8° 40' 30" sa heliocentričnom širinom od 16° 01' 24" južno. Kometa se nalazila u svom perihelu 21. novembra u 11^h 52' popodne što je jednako vremenu u Londonu, ili u 13^h 8' u Dancigu (prema starom stilu). Žižni parametar parabole iznosio je 410286 delova pri čemu je pretpostavljeno da srednje rastojanje između Zemlje i Sunca iznosi 100000 takvih delova. Koliko se mesta komete, izračunata za ovu orbitu, slažu sa posmatranjima, pokazano je u narednoj tabeli koju je načinio dr Halej.

Relativno vreme u Dancigu	Uočeno rastojanje komete		Posmatrana mesta			Izračunata mesta na orbiti	
d h′		° ′ ″			° ′ ″		° ′ ″
Dec., 1664. 3.18.29½	Regulus Spika Device	46.24.20 22.52.10	Dužina Širina (S)	♎	7. 1. 0 21.39. 0	♎	7. 1.29 21.38.50
4.18. 1½	Regulus Spika Device	46. 2.45 23.52.40	Dužina Širina (S)	♎	6.15. 0 22.24. 0	♎	6.16. 5 22.24. 0
7.17.48	Regulus Spika Device	44.48. 0 27.56.40	Dužina Širina (S)	♎	3. 6. 0 25.22. 0	♎	3. 7.33 25.21.40
17.14.43	Regulus Desno rame Oriona	53.15.15 45.43.30	Dužina Širina (S)	♌	2.56. 0 49.25. 0	♌	2.56. 0 49.25. 0
19. 9.25	Prokion Sjajna zvezda Vilice Kita	35.13.50 52.56. 0	Dužina Širina (S)	♊	28.40. 0 45.48. 0	♊	28.43. 0 45.46. 0
20. 9.53½	Prokion Sjajna zvezda Vilice Kita	40.49. 0 40. 4. 0	Dužina Širina (S)	♊	13. 3. 0 39.54. 0	♊	13. 5. 0 39.53.40
21. 9. 9½	Desno rame Oriona Sjajna zvezda vilice Kita	26.21.25 29.28. 0	Dužina Širina (S)	♊	2.16. 0 33.41. 0	♊	2.18.30 33.39.40
22. 9. 0	Desno rame Oriona Sjajna zvezda Vilice Kita	29.47. 0 20.29.30	Dužina Širina (S)	♉	24.24. 0 27.45. 0	♉	24.27. 0 27.46. 0
26. 7.58	Sjajna zvezda Ovna Aldebaran	23.20. 0 26.44. 0	Dužina Širina (S)	♉	9. 0. 0 12.36. 0	♉	9. 2.28 12.34.13
27. 6.45	Sjajna zvezda Ovna Aldebaran	20.45. 0 28.10. 0	Dužina Širina (S)	♉	7. 5.40 10.23. 0	♉	7. 8.45 10.23.13
28. 7.39	Sjajna zvezda Ovna Palilicujum	18.29. 0 29.37. 0	Dužina Širina (S)	♉	5.24.45 8.22.50	♉	5.27.52 8.23.37
31. 6.45	Pojas Andromede Palilicijum	30.48.10 32.53.30	Dužina Širina (S)	♉	2. 7.40 4.13. 0	♉	2. 8.20 4.16.25
Januar, 1665. 7. 7.37½	Pojas Andromede Palilicijum	25.11. 0 37.12.25	Dužina Širina (N)	♈	28.24.47 0.54. 0	♈	28.24. 0 0.53. 0
13. 7. 0	Pojas Andromede Palilicijum	28. 7.10 38.55.20	Dužina Širina (N)	♈	27. 6.54 3. 6.50	♈	27. 6.39 3. 7.40
24. 7.29	Pojas Andromede Palilicijum	20.32.15 40. 5. 0	Dužina Širina (N)	♈	26.29.15 5.25.50	♈	26.28.50 5.26. 0
Februar 7. 8.37			Dužina Širina (N)	♈	27. 4.46 7. 3.29	♈	27.24.55 7. 3.15
22. 8.46			Dužina Širina (N)	♈	28.29.46 8.12.36	♈	28.29.58 8.10.25
Mart 1. 8.16			Dužina Širina (N)	♈	29.18.15 8.36.26	♈	29.18.20 8.36.12
7. 8.37			Dužina Širina (N)	♉	0. 2.48 8.56.30	♉	0. 2.42 8.56.56

Početkom 1665. godine, u februaru, prva zvezda Ovna, koju ću odavde pa nadalje označavati sa γ, nalazila se u ♈ 28° 30′ 15″ sa širinom 7° 8′ 58″ severno. Druga zvezda Ovna nalazila se u ♈ 29° 17′ 18″ sa širinom 8° 28′ 16″ severno. Još jedna zvezda, sedmog reda veličine, koju ću označiti sa A, nalazila se u ♈ 28° 24′ 45″ sa širinom 8° 28′ 13″ severno. U Parizu je 7. februara u 7ʰ 30′ (7. februara, u 8ʰ 37′ u Dancigu) kometa napravila trougao sa tim zvezdama γ i A, sa pravim uglom u γ. Rastojanje komete od zvezde γ bilo je jednako sa rastojanjem između zvezda γ i A, tj., 1° 19′ 46″ po velikom krugu i zbog toga je na paraleli širine zvezde γ bilo na 1° 20′ 26″. Prema tome, ako od dužine zvezde γ oduzmemo dužinu 1° 20′ 26″, preostaće nam longituda komete koja iznosi ♈ 27° 9′ 49″. Ozu (Auzout) je, prema svojim posmatranjima, smestio kometu približno u ♈ 27° 0′. Prema shemi u kojoj je dr Huk ucrtao njeno kretanje, kometa se nalazila u ♈ 26° 59′ 24″. Uzimajući sredinu između dve krajnosti, smestio sam kometu u ♈ 27° 4′ 46″.

Prema istim posmatranjima, Ozu je u tom vremenu uzeo da je latituda komete na 7° i 4′ ili 5′ prema severu. Ipak, bilo bi pravilnije da je uzeo 7° 3′ 29″, jer je razlika između latitude komete i zvezde γ jednaka sa razlikom između longituda zvezde γ i zvezde A.

U Londonu je 22. februara u 7ʰ 30′ (u 8ʰ 46′ u Dancigu) rastojanje između komete i zvezde A (sudeći prema posmatranjima dr Huka koja je on ucrtao u shemu, kao i prema posmatranjima Ozua, koja je na sličan način ucrtao gospodin Peti [Petit]), iznosilo je jednu petinu rastojanja između zvezde A i prve zvezde Ovna, ili 15° 57′. Rastojanje komete od prave linije koja spaja zvezdu A sa prvom zvezdom Ovna iznosilo je jednu četvrtinu od te jedne petine, tj., 4′. Prema tome, kometa se nalazila u ♈ 28° 29′ 46″ sa širinom 8° 12′ 36″ severno.

U Londonu je 1. marta u 7ʰ 0′ (tj., u 8ʰ 16′ u Dancigu) kometa uočena u blizini druge zvezde Ovna, pri čemu se rastojanje između njih odnosilo prema rastojanju između prve i druge zvezde Ovna, tj., prema 1° 33′, kao 4 prema 45, prema Huku, ili kao 2 prema 23, prema gospodinu Gotignisu (Gottignies). Prema tome, rastojanje između komete i druge zvezde Ovna iznosilo je 8′ 16″ prema dr Huku ili 8′ 5″ prema Gotignisu ili 8′ 10″, ako uzmemo srednju vrednost. Međutim, prema Gotignisu, kometa je prošla iza druge zvezde Ovna za oko četvrtinu ili petinu dela prostora koju bi obično prešla tokom jednog dana, tj., oko 1′ 35″ (u čemu se slaže sa Ozuom), a prema dr Huku, ne baš u tolikoj meri, oko 1′. Prema tome, ako dužini prve zvezde u sazvežđu Ovna dodamo 1′, a njenoj širini 8′ 10″, dobićemo da se dužina komete nalazi u ♈ 29° 18′, sa širinom 8° 36′ 26″ severno.

U Parizu je 7. marta u u 7^h 30' (u 8^h 37' u Dancigu), prema posmatranjima Ozua, rastojanje između komete i druge zvezde Ovna bilo jednako sa rastojanjem te zvezde i zvezde A, a iznosilo je 52' 29", dok je razlika između dužina komete i druge zvezde Ovna iznosila 45' ili 46', ili 45' 30", ako uzmemo srednju vrednost. Prema tome, kometa se nalazila u ♈ 0° 2' 48". Iz sheme posmatranja gospodina Ozua, koju je konstruisao Peti, Hevelije je izračunao da širina komete iznosi 8° 54'. Međutim, graver nije dobro ucrtao zakrivljenje puta na kraju kretanja komete, a Hevelije je na Ozuovoj shemi posmatranja koju je sam konstruisao ispravio to nepravilno zakrivljenje, pa je širina komete iznosila 8° 55' 30". Daljim ispravkama ove nepravilnosti, širina može biti na 8° 56' ili na 8° 57'.

Ta kometa takođe je uočena 9. marta, a u tom vremenu njeno mesto moralo bi se nalaziti približno u ♉ 0° 18', sa širinom 9° $3\frac{1}{2}$' severno.

Kometa je bila vidljiva tokom tri meseca, a u tom vremenu je prešla preko skoro šest znakova, pri čemu je u jednom od tih dana opisala otprilike 20 stepeni. Njen pravac je umnogome skretao sa velikog kruga, savijajući se prema severu, a njeno kretanje je na kraju od retrogradnog postalo direktno. Pored toga što je njen pravac bio toliko neuobičajen, iz tabele kretanja sledi da se teorija od početka do kraja slaže sa posmatranjima i to ne manje precizno od uobičajenog slaganja teorija planeta sa njihovim posmatranjima. Ipak, moraćemo da oduzmemo otprilike 2' tamo gde je kometa najbrža, a to možemo postići tako što ćemo oduzeti 12" od ugla između uzlaznog čvora i perihela, ili tako što ćemo učiniti da taj ugao iznosi 49° 27' 18". Godišnja paralaksa ove komete, kao i prethodne, bila je veoma izražena, a tom se veličinom izražava godišnje kretanje Zemlje po *orbis magnusu*.

Ova teorija je na sličan način potvrđena kretanjem komete koja se pojavila 1683. godine. Njeno kretanje bilo je retrogradno i dešavalo se na orbiti čija je ravan sastavljala gotovo prav ugao sa ravni ekliptike; uzlazni čvor se (prema računu dr Haleja) nalazio u ♍ 23° 23'; inklinacija njene orbite prema ekliptici iznosila je 83° 11'; perihel se nalazio u ♊ 25° 29' 30"; rastojanje perihela od Sunca iznosilo je 56020 delova, pri čemu poluprečnik *orbis magnusa* sadrži 100000 takvih delova; a vreme njenog perihela bilo je 2. jula 3^h 50'. Ta mesta, koja je na toj orbiti izračunao dr Halej, upoređena su sa mestima koja je uočio gospodin Flemstid i izložena su u narednoj tabeli.

Srednje vreme 1683	Mesto Sunca	Izračunata dužina komete	Izračunata širina komete	Posmatrana dužina komete	Posmatrana širina komete	Razlika u dužini	Razlika u širini
d h '	° ' "	° ' "	° ' "	° ' "	° ' "	' "	' "
Jul	♌	♋	(N)	♋	(N)		
13.12.55	1.02.30	13. 5.42	29.28.13	13. 6.42	29.28.20	+ 1.00	+ 0.07
15.11.15	2.53.12	11.37.48	29.34. 0	11.39.43	29.34.50	+ 1.55	+ 0.50
17.10.20	4.45.45	10. 7. 6	29.33.30	10. 8.40	29.34. 0	+ 1.34	+ 0.30
23.13.40	10.38.21	5.10.27	28.51.42	5.11.30	28.50.28	+ 1.03	- 1.14
25.14. 5	12.35.28	3.27.53	24.24.47	3.27. 0	28.23.40	- 0.53	- 1.7
		♊		♊			
31. 9.42	18. 9.22	27.55. 3	26.22.52	27.54.24	26.22.25	- 0.39	- 0.27
31.14. 5	18.21.53	27.41. 7	26.16.57	27.41. 8	26.14.50	+ 0.1	- 2.7
Avgust							
2.14.56	20.17.16	25.29.32	25.16.19	25.28.46	25.17.28	- 0.46	+ 1.9
4.10.49	22. 2.50	23.18.20	24.10.49	23.16.55	24.12.19	- 1.25	+ 1.30
6.10. 9	23.56.45	20.42.23	22.47. 5	20.40.32	22.49. 5	- 1.51	+ 2.0
9.10.26	26.50.52	16. 7.57	20. 6.37	16. 5.55	20. 6.10	- 2.2	- 0.27
	♍						
15.14. 1	2.47.13	3.30.38	11.37.33	3.26.18	11.32. 1	- 4.30	- 5.32
16.15.10	3.48. 2	0.43. 7	9.34.16	0.41.55	9.34.13	- 1.12	- 0.3
		♉		♉			
18.15.44	6.45.33	24.52.53	5.11.15	24.49. 5	5. 9.11	- 3.48	- 0.24
			(S)		(S)		
22.14.44	9.35.49	11. 7.14	5.16.58	11. 7.12	5.16.58	- 0.2	- 0.3
23.15.52	10.36.48	7. 2.18	8.17. 9	7. 1.17	8.16.41	- 1.1	- 0.28
		♈		♈			
26.16. 2	13.31.10	24.45.31	16.38. 0	24.44. 0	16.38.20	- 1.31	+ 0.20

Ova teorija potvrđena je i kretanjem one retrogradne komete koja se pojavila 1682. godine. Uzlazni čvor te komete se nalazio (prema računu dr Haleja) u ♉ 21° 16' 30", inklinacija njene orbite prema ravni ekliptike iznosila je 17° 56' 00", perihel se nalazio u ♒ 2° 52' 50", a rastojanje perihela od Sunca iznosilo je 58328 delova, pri čemu poluprečnik *orbis magnusa* sadrži 100000 takvih delova, a srednje vreme prolaska komete kroz perihel iznosilo je 4. septembra 7^h 39'. Mesta te komete, dobijena iz Flemstidovih posmatranja, upoređena su sa mestima koja su izračunata prema našoj teoriji i izložena su u narednoj tabeli.

Srednje vreme 1682.	Mesto Sunca	Izračunata dužina komete	Izračunata širina komete (N)	Posmatrana dužina komete	Posmatrana širina komete (N)	Razlika u dužini	Razlika u širini
d h '	° ' "	° ' "	° ' "	° ' "	° ' "	' "	' "
Avgust	♍	♌		♌			
19.16.38	7. 0. 7	18.14.28	25.50. 7	18.14.40	25.49.55	− 0.12	+ 0.12
20.15.38	7.55.52	24.46.23	26.14.42	24.46.22	26.12.52	+ 0.1	+ 1.50
21. 8.21	8.36.14	29.37.15	26.20. 3	29.38.02	26.17.37	− 0.47	+ 2.26
		♍		♍			
22. 8. 8	9.33.55	6.29.53	26. 8.42	6.30. 3	26. 7.12	− 0.10	+ 1.30
		♎		♎			
29. 8.20	16.22.40	12.37.54	18.37.47	12.37.49	18.34. 5	+ 0.5	+ 3.42
30. 7.45	17.19.41	15.36. 1	17.26.43	15.35.18	17.27.17	+ 0.43	− 0.34
Septembar							
1. 7.33	19.16. 9	20.30.53	15.13. 0	20.27. 4	15. 9.49	+ 3.49	+ 3.11
4. 7.22	22.11.28	25.42. 0	12.23.48	25.40.58	12.22. 0	+ 1.2	+ 1.48
5. 7.32	23.10.29	27. 0.46	11.33.08	26.59.24	11.33.51	+ 1.22	− 0.43
8. 7.16	26. 5.58	29.58.44	9.26.46	29.58.45	9.26.43	− 0.1	+ 0.3
		♍		♍			
9. 7.26	27. 5. 9	0.44.10	8.49.10	0.44. 4	8.48.25	+ 0.6	+ 0.45

Ova teorija takođe je potvrđena retrogradnim kretanjem komete koja se pojavila 1723. godine. Uzlazni čvor te komete se nalazio (prema računu gospodina Bredlija [Bradley], savilijanskog profesora astronomije u Okfordu) u ♈ 14° 16', inklinacija njene orbite prema ravni ekliptike iznosila je 49° 59', perihel se nalazio u ♉ 12° 15' 20", a rastojanje perihela od Sunca iznosilo je 998651 delova, pri čemu poluprečnik *orbis magnusa* sadrži 1000000 takvih delova, a srednje vreme prolaska komete kroz perihel iznosilo je 16. septembra 16^h 10'. Mesta te komete koje je na toj orbiti izračunao gospodin Bredli upoređana su sa mestima koja je uočio on sam, zatim njegov ujak, gospodin Paund (Pound), kao i dr Halej i izložena su u narednoj tabeli.

Srednje vreme 1723.	Posmatrana dužina komete	Posmatrana širina komete (N)	Izračunata dužina komete	Izračunata širina komete (N)	Razlika u dužini	Razlika u širini
d h '	° ' "	° ' "	° ' "	° ' "	' "	' "
Oktobar	♏		♏			
9. 8. 5	7.22.15	5. 2. 0	7.21.26	5. 2.47	+ 49	− 47
10. 6.21	6.41.12	7.44.13	6.41.42	7.43.18	− 50	+ 55
12. 7.22	5.39.58	11.55. 0	5.40.19	11.54.55	− 21	+ 5
14. 8.57	4.59.49	14.43.50	5. 0.37	14.44. 1	− 48	− 11
15. 6.35	4.47.41	15.40.51	4.47.45	15.40.55	− 4	− 4
21. 6.22	4. 2.32	19.41.49	4. 2.21	19.42. 3	+ 11	− 14
22. 6.24	3.59. 2	20. 8.12	3.59.10	20. 8.17	− 8	− 5
24. 8. 2	3.55.29	20.55.18	3.55.11	20.55. 9	+ 18	+ 9
29. 8.56	3.56.17	22.20.27	3.56.42	22.20.10	− 26	+ 17
30. 6.20	3.58. 9	22.32.28	3.58.17	22.32.12	− 8	+ 16
Novembar						
5. 5.53	4.16.30	23.38.33	4.16.23	23.38. 7	+ 7	+ 26
8. 7. 6	4.29.36	24. 4.30	4.29.54	24. 4.40	− 18	− 10
14. 6.20	5. 2.16	24.48.46	5. 2.51	24.48.16	− 35	+ 30
20. 7.45	5.42.20	25.24.45	5.43.13	25.25.17	− 53	− 32
Decembar						
7. 6.45	8. 4.13	26.54.18	8. 3.55	26.53.42	+ 18	+ 36

Iz tih primera sasvim je očigledno da kretanja kometa nisu manje precizno predstavljena pomoću naše teorije od kretanja planeta koja su uobičajeno predstavljena pomoću teorija planeta. Prema tome, na osnovu te teorije možemo izračunati orbite kometa i dobiti periode revolucije kometa po bilo kojoj orbiti. Na kraju, možemo izračunati poprečne prečnike njihovih eliptičnih orbita kao i rastojanja njihovih afela.

Retrogradno kretanje komete koja se pojavila 1607. godine i koja je opisivala orbitu čiji se uzlazni čvor (prema računu dr Haleja) nalazio u ♉ 20° 21', inklinacija njene orbite prema ravni ekliptike iznosila je 17° 2', perihel se nalazio u ♏ 2° 16', a rastojanje perihela od Sunca iznosilo je 58680 delova, pri čemu poluprečnik *orbis magnusa* sadrži 100000 takvih delova, dok se kometa nalazila u perihelu 16. oktobra tokom 3^h 50'. Ta orbita približno odgovara orbiti komete koja je viđena 1682. godine. Ako te dve komete nisu različite već je to jedna te ista kometa, onda bi ona završila svoju revoluciju u periodu od 75 godina. Veća osa njene orbite odnosila bi se prema većoj osi *orbis magnusa* kao $\sqrt[3]{75\times75}$ prema 1, ili približno kao 1778 prema 100. Rastojanje afela te komete od Sunca odnosilo bi se prema srednjem rastojanju Zemlje od Sunca otprilike kao 35 prema 1. Iz tih podataka nije teško odrediti eliptičnu orbitu te komete. Ipak, sve to se podrazumeva pod uslovom da se ista kometa, posle perioda od 75 godina, ponovo vrati na istu orbitu.

Čini se da se ostale komete podižu do većih visina i da im je potrebno duže vreme za izvođenje revolucija.

Međutim, usled velikog broja kometa, velike udaljenosti njihovih afela od Sunca, sporog kretanja u afelima, one će njihovim uzajamnim gravitacijama međusobno delovati jedna na drugu. Na taj način će njihovi ekscentriciteti kao i vremena njihovih revolucija biti ponekad malo uvećani, a ponekad umanjeni. Prema tome, ne treba očekivati da se ista kometa precizno vrati na istu orbitu i u istim periodima. Biće dovoljno ako pronađene promene nisu veće od onih koje mogu proizaći iz upravo pomenutih uzroka.

Odatle možemo pripisati razlog po kome komete nisu uvek sadržane unutar granica Zodijaka, kao što to jesu planete, već su, sa raznovrsnim kretanjima, rasute svuda po nebu, jer nisu ograničene. Naime, u svojim afelima, gde je njihovo kretanje izuzetno sporo, one se međusobno udaljavaju do velikih rastojanja i trpe manje smetnje od svojim uzajamnih gravitacija. Prema tome, komete koje se najniže spuštaju i koje se zbog toga najsporije kreću u afelima morale bi, takođe, da se podignu do najvećih visina.

Kometa koja se pojavila 1680. godine nalazila se u svom perihelu na rastojanju od Sunca koje je manje od jedne šestine prečnika Sunca. Usled njene izuzetno velike brzine u takvoj blizini sa Suncem i usled gustine atmosfere Sunca, morala bi trpeti određeni otpor i usporenje. Prema tome, pošto je u svakoj revoluciji privučena bliže Suncu, ona će na kraju pasti na telo Sunca. U svojim afelima, gde se sporije kreće, ponekad se može desiti da je još više usporena privlačenjem drugih kometa. Posledica tog usporenja je približavanje Suncu. Na takav način, fiksne zvezde, koje se postepeno troše jer emituju svetlost i isparenja tokom dugog vremenskog perioda, mogu se obnoviti kometama koje padaju na njih. Iz te sveže zalihe novog goriva stare zvezde dobijaju novi sjaj i mogu se smatrati novim zvezdama. Takve su vrste one fiksne zvezde koje se iznenada pojavljuju i koje na početku sijaju izuzetnom blistavošću, a koje nakon toga postepeno nestaju. Takva je bila zvezda koja se pojavila u sazvežđu Kasiopeje, a koju nije uočio Kornelije Gema (Cornelius Gemma) koji je u toku noći 8. novembra 1572. godine posmatrao taj deo neba koji je bio savršeno miran. Sledeće večeri, 9. novembra, uočio je da zvezda sija sjajnije od bilo koje fiksne zvezde i da je jačina njenog sjaja jedva nešto manja od sjaja Venere. Tiho Brahe ju je uočio 11. novembra. Tad je sijala najvećim sjajem, a od tada je započela postepeno da nestaje, da bi potpuno

iščezla posle 16 meseci. U novembru, kada se prvi put pojavila, njena svetlost je bila jednaka sa svetlošću Venere. U decembru je njena svetlost malo oslabljena, pa je postala jednaka sa svetlošću Jupitera. U januaru 1573. godine bila je slabija od Jupiterove, a jača od svetlosti Sirijusa s kojom je postala jednaka otprilike krajem februara i početkom marta. Tokom aprila i maja bila je jednaka sa zvezdama drugog reda veličine, a tokom juna, jula i avgusta sa zvezdama trećeg reda veličine. Tokom septembra, oktobra i novembra bila je jednaka sa zvezdama četvrtog reda veličine, a tokom decembra i januara 1574. godine sa zvezdama petog reda veličine, u februaru sa zvezdama šestog reda veličine; a u martu je potpuno iščezla. Njena boja je na početku bila jasna i svetla i naginjala je ka beloj, kasnije je postajala žutom, a u martu 1573. godine, postala je crvena poput Marsa ili Aldebarana. U maju je postala sivobeličasta (kao ona boja koju vidimo na Saturnu) i tu boju zadržava do kraja, pri čemu postepeno uvek biva nejasnija i nerazgovetnija. Takva je bila i zvezda koja se nalazila na levom stopalu Zmijonoše, a koju su Keplerovi učenici prvi put uočili 30. septembra 1604. godine. Sijala je svetlošću koja je bila jača od Jupiterove, premda se prethodne noći uopšte nije mogla videti. Od tog vremena postepeno je slabila, da bi nakon 15 ili 16 meseci potpuno iščezla. Navodno su te nove zvezde koje se pojavljuju i blistaju neobičnom svetlošću podstakle Hiparha (Hipparchus) da posmatra fiksne zvezde i da ih katalogizuje. Izgleda da su one fiksne zvezde koje se naizmenično pojavljuju i nestaju, čiji sjaj se postepeno i sporo uvećava i čija svetlost jedva prelazi svetlost zvezda trećeg reda veličine, zapravo zvezde drugačije vrste, tj. one koje kruže oko svojih osa i koje imaju svoju svetlu i tamnu stranu koje se naizmenično pokazuju. Isparavanja koja nastaju od Sunca i koja se podižu sa fiksnih zvezda i repova kometa mogu na kraju, usled svoje gravitacije, pasti u atmosfere planeta gde bi se kondenzovale i pretvorile u vodu i vlažnost. Odatle bi sporim zagrevanjem postepeno zadobijale oblik soli, sumpora, tinktura, mulja, gline, peska, kamena, korala i drugih zemaljskih supstanci.

OPŠTA SHOLIJA

Hipoteza o virovima podleže mnogim teškoćama. Da bi svaka planeta, poluprečnikom povučenim do Sunca, mogla da opiše površine koje su proporcionalne sa vremenima opisivanja, periodi

nekoliko delova virova trebali bi da su proporcionalni sa kvadratima njihovih rastojanja od Sunca. Da bi periodi planeta mogli biti u polukubnom odnosu njihovih rastojanja od Sunca, periodi delova vira moraju biti u polukubnom odnosu njihovih rastojanja do Sunca. Da bi manji virovi mogli nastaviti svoje manje revolucije oko Saturna, Jupitera i drugih planeta i mirno i neometano plivati u većem viru Sunca, periodi delova Sunčevog vira bi trebalo da su međusobno jednaki. Međutim, rotacije Sunca i planeta oko svojih osa, koja bi trebalo da odgovaraju kretanju njihovih virova, daleko su od svih navedenih proporcija. Kretanja kometa sasvim su pravilna i regulisana istim zakonima kao i kretanja planeta. Ona se ne mogu objasniti hipotezom o virovima, jer su komete nošene izuzetno ekscentričnim kretanjima preko svih delova nebeskog prostranstva, sa slobodom koja je nekompatibilna sa pojmom vira.

Na tela koja su bačena u našem vazduhu ne deluje nijedan drugi otpor osim otpora tog vazduha. Ako uklonimo vazduh, kao što je urađeno u Bojlovom (Boyle) vakuumu, otpor će nestati. U toj praznini fino paperje i komad zlata padaju istom brzinom. Jednaki su uslovi i u nebeskim prostorima koji se nalaze iznad Zemljine atmosfere. U tim prostorima, u kojima ne postoji vazduh koji bi delovao na kretanja, sva tela bi se kretala s najvećom slobodom, a planete i komete konstantno bi se obrtale po orbitama koje su date prema vrsti i položaju, u skladu sa gore objašnjenim zakonima. Ipak, iako bi ta tela mogla nastaviti da se kreću po svojim orbitama samo pomoću zakona gravitacije, njihove pravilne položaje orbita ne bi trebalo prvenstveno izvesti iz tih zakona.

Šest osnovnih planeta kruži oko Sunca po krugovima koji su koncentrični sa Suncem i sa kretanjima koja su usmerena ka istim delovima i približno u istoj ravni. Deset meseca kruži oko Zemlje, Jupitera i Saturna po krugovima koji su koncentrični sa njima, sa istim pravcem kretanja i približno u ravnima orbita tih planeta. Međutim, ne treba smatrati da puki mehanički uzroci mogu proizvesti toliko pravilnih kretanja, jer, komete se kreću preko svih delova nebeskog prostranstva po izuzetno ekscentričnim orbitama. Usled takve vrste kretanja, komete lako mogu proći preko orbita planeta velikom brzinom, a u njihovim afelima, u kojima se kreću najsporije i zadržavaju najduže, udaljavaju se do najvećih međusobnih rastojanja, i zbog toga na njih najmanje deluju međusobna privlačenja. Taj najlepši sistem Sunca, planeta i kometa jedi-

no može proizaći iz namere i vlasti inteligentnog i moćnog Bića. I ako su fiksne zvezde centri ostalih sličnih sistema, koji su nastali iz slične mudre namere, onda svi oni moraju biti podvrgnuti vladavini Jednog. Posebno zbog toga što je svetlost fiksnih zvezda iste prirode kao i svetlost Sunca, i zbog toga što svetlost iz svakog sistema prelazi u sve druge sisteme. A kako sistemi fiksnih zvezda, usled svoje gravitacije, ne bi padali jedan na drugog, smešteni su na ogromnom međusobnom rastojanju.

To Biće upravlja svim stvarima, ne kao duša sveta već kao Gospodar nad svim. S obzirom na njegovu vladavinu treba ga zvati Gospod Bog, παντοκράτωρ, ili Univerzalni vladalac, jer, Bog je relativna reč i odnosi se na sluge, a Božanstvo je vladavina Boga ne nad svojim sopstvenim telom, kao što zamišljaju oni koji bi želeli da je Bog duša sveta, već nad slugama. Vrhovni Bog je Biće koje je večno, beskonačno i apsolutno savršeno. Ipak, bez obrzira na to koliko je savršeno, Biće bez gospodarenja ne može se nazvati Gospodom Bogom. Jer, mi kažemo: moj Bog, tvoj Bog, Bog Izraela, Bog nad bogovima i Gospodar nad gospodarima, ali ne kažemo: moj Večni, tvoj Večni, Večni Izraela, Večni nad bogovima, baš kao što ne kažemo: moj Beskonačni ili moj Savršeni. Ti nazivi ne odnose se na sluge. Reč Bog[1] obično znači Gospodar. Ipak, nije svaki gospodar Bog. Vladavina duhovnog Bića čini Boga: istinsko, vrhovno ili izmišljeno vladanje čini istinskog, vrhovnog ili izmišljenog Boga. Iz njegove istinske vladavine sledi da je istinski Bog živo, inteligentno i moćno Biće, a iz njegovih ostalih savršenstva sledi da je vrhovni ili najsavršeniji. On je večan i beskonačan, svemoguć i sveznajući; njegovo je trajanje u rasponu od večnosti do večnosti; njegova prisutnost, od beskonačnosti do beskonačnosti; on gospodari nad svim stvarima i poznaje sve stvari onakvima kakve jesu i kakve bi mogle da budu. On nije večnost ili beskonačnost, već je večan i beskonačan; on nije trajanje i prostor, već traje i prisutan je. On traje večno i svuda je prisutan, a postojanjem uvek i svuda, on predstavlja trajanje i prostor. Pošto je svaka čestica prostora *uvek*, i pošto je svaki nedeljivi momenat trajanja *svuda*, za-

[1] Dr Pokok (Pocock) izvodi latinsku reč *deus* iz arapske reči *du* (genitiv od *di*), koja označava Gospodara. U tom smislu, prinčevi su nazivani bogovima (Psalm LXXXII, stih 6; Jovan, Psalm X, stih 35). I Mojsije je nazivan bogom svog brata Arona i bogom Faraona (Egzodus, IV, stih 16; i VII, stih 1). A tako su i pagani, premda netačno, duše preminulih prinčeva ranije nazivali bogovima usled njihove želje za vladanjem.

sigurno je da Tvorac i Gospodar svih stvari ne može biti *nikad* i *nigde*. Svaka duša koja ima percepciju, iako u različitim vremenima i sa različitim organima čula i kretanja, uvek je ista nedeljiva osoba. Dati su uzastopni delovi u trajanju i koegzistentni delovi u prostoru, ali ni jedni ni drugi u pojedinačnom čoveku, ili u njegovom mislećem principu, a još manje se mogu pronaći u mislećoj supstanci Boga. Svaki čovek, dokle god ima percepciju, jedan je te isti čovek tokom svog celokupnog života u svim svojim pojedinačnim osetima. Bog je isti Bog, uvek i svuda. On je sveprisutan ne samo *praktično*, već *supstancijalno*, jer svojstvo ne može opstajati bez supstancije. U njemu[2] je sve sadržano i u njemu se sve pokreće; pri čemu nijedno ne utiče na ono drugo. Na Boga ne utiče kretanje tela, na tela ne deluje otpor od sveprisutnog Boga. Svim tim dopušteno je da Vrhovni Bog nužno postoji, a na osnovu te nužnosti on postoji *uvek* i *svuda*. Odatle sledi da je sav sličan, sav oko, sav uho, sav mozak, sav ruka, sav moć opažanja, razumevanja, delovanja, na način koji uopšte nije ljudski, koji nije telesni, već potpuno nepoznat nama. Kao što slep čovek nema predstavu o bojama, tako mi nemamo predstavu o načinu po kojem svemudri Bog opaža i razume sve stvari. On je potpuno lišen tela i svih telesnih oblika i zbog toga se ne može ni videti, ni čuti, ni dodirnuti, niti se može obožavati pod predstavom bilo koje telesne stvari. Imamo ideje o njegovim atributima, ali ne znamo šta je istinska suština bilo koje stvari. Mi vidimo oblike i boje tela, čujemo samo zvukove, dodirujemo samo njihove spoljašnje površine i osećamo samo mirise i ukuse. Međutim, unutrašnju suštinu ne možemo znati našim čulima ili bilo kojom refleksnom radnjom našeg uma, još manje možemo imati bilo kakvu predstavu o suštini Boga. Znamo ga samo prema njegovim najmudrijim i najizvrsnijim pronalascima stvari i prema konačnim uzrocima, divimo se njegovoj savršenosti. Ipak, kao njegove sluge, poštujemo ga i obožavamo zbog njegovog

[2] Takvog su mišljenja bili stari narodi: Pitagora (*Cicron, De Natura Deorum*, Knjiga I), Tales i Anaksagora (*Virgilius, Georg*, Knjiga IV, stih 220; i *Eneide*, Knjiga VI, stih 721), Filon (*Alegorije*, na početku Knjige I), Aratus (na početku svojih *Fenomena*); baš kao i sveci: Sv. Pavle (*Dela*, XVII, stihovi 27 i 28), Sv. Jovan (*Jevandelje*, pasus XIV, stih 2), Mojsije (*Deut.*, Knjiga IV, stih 39 i Knjiga X, stih 14), David (*Psalmi*, CXXXIX, stihovi 7, 8, 9), Solomon, (*Kraljevi*, Knjiga VIII, stih 27), Jov (Knjiga XXII, stihovi 12, 13, 14), Jeremija (Knjiga XXIII, stihovi 23 i 24). Idolopoklonici su, pogrešno, pretpostavljali da su Sunce, Mesec i zvezde čovekove duše, a da su drugi delovi sveta delovi Vrhovnog Boga koji se, zbog toga, moraju obožavati.

gospodarenja, jer Bog bez gospodarenja, proviđenja i konačnih uzroka nije ništa drugo do Sudbina i Priroda. Slepa metafizička nužnost, koja je zacelo ista uvek i svuda, ne bi mogla da proizvede raznovrsnost stvari. Sva ta raznolikost prirodnih stvari, koju pronalazimo u različitim vremenima i u različitim mestima, može proizaći samo iz ideje i volje nužno postojećeg Bića. Međutim, figurativno se za Boga kaže da vidi, da govori, da se smeje, da voli, mrzi, želi, daje, prima, zatim da se raduje, ljuti, bori, stvara, radi, gradi itd. jer naše predstave o Bogu formiraju se na osnovu određene sličnosti sa ljudskim rodom koji, iako nije savršen, ipak ima određene sličnosti. Toliko se može izložiti o Bogu na osnovu pojavnosti stvari, a to zasigurno i pripada prirodnoj filozofiji.

Do sada smo objasnili fenomene neba i naših mora pomoću sile gravitacije, iako još uvek nismo pripisali uzrok toj sili. Sigurno je da ta sila mora nastati iz uzroka koji prodire sve do centra Sunca i centara planeta bez i najmanjeg umanjenja. Ta sila ne deluje u skladu sa veličinom površina čestica na koje je usmerena (kao što je slučaj sa mehaničkim uzrocima), već u skladu sa količinom čvrste materije koju oni sadrže, pri čemu se njeno dejstvo svuda rasprostire na ogromnim rastojanjima i umanjuje se uvek proporcionalno sa kvadratom rastojanja. Gravitacija ka Suncu sastoji se iz gravitacija ka pojedinim česticama od kojih je sačinjeno telo Sunca i pri udaljavanju od Sunca umanjuje se precizno proporcionalno sa kvadratom rastojanja sve do orbite Saturna, kao što očigledno i sledi iz stanja mirovanja afela planeta, a čak i do najudaljenijih afela kometa, ukoliko su ti afeli u stanju mirovanja. Međutim, do sada nisam mogao da otkrijem uzrok tim svojstvima gravitacije iz fenomena. Ja ne sastavljam hipoteze, a sve ono što nije izvedeno iz fenomena, trebalo bi nazvati hipotezama. I bez obzira na to da li su metafizičke ili fizičke, sa okultnim svojstvima ili mehaničke, hipotezama nije mesto u eksperimentalnoj filozofiji. U ovoj filozofiji određene propozicije zaključene su iz fenomena i kasnije su izvedene obično indukcijom. Na taj način otkrivena je neprobojnost, pokretljivost i impulsivna sila, kao i zakoni kretanja i gravitacije. Za nas je dovoljno da gravitacija zapravo postoji i da deluje u skladu sa izloženim zakonima, kao i da sasvim pogoduje objašnjenju svih kretanja nebeskih tela i našeg Sunca.

Sada bismo mogli dodati nešto u vezi sa određenim najfinijim Duhom koji prožima sva velika tela i koji se nalazi skriven u njima. Silom i delovanjem tog Duha, čestice tela međusobno se privlače

na malim rastojanjima i sjedinjuju se ukoliko su susedne. Naelektrisana tela deluju na većim rastojanjima i privlače i odbijaju susedna manja tela. Životinje se kreću komandom volje Duha, svetlost je emitovana, odbijena, prelomljena, savijena i zagreva tela, i svi osećaji pobuđeni su vibracijama tog Duha, koje se prostiru preko čvrstih nervnih vlakana iz spoljašnjih čulnih organa do mozga i iz mozga ka mišićima. Sve ovo ne može se objasniti u nekoliko reči, niti imamo na raspolaganju dovoljno eksperimenata koji su neophodni za precizno određivanje i potvrdu zakona u skladu sa kojima deluje ovaj električni i elastični Duh.

БИБЛИОТЕКА ФИЛОЗОФСКОГ ФАКУЛТЕТА НОВИ САД

ISAK NJUTN
MATEMATIČKI PRINCIPI PRIRODNE FILOZOFIJE

AKADEMSKA KNJIGA
Novi Sad, Pašićeva 6
Telefon: 021/4724-924
www.akademskaknjiga.com
e-mail: akademskaknjiga@ncobee.net

Prevod predgovora s latinskog
Danijela Jevtić

Korektura
Ana Kukolj

Kompjuterski slog
Vladimir Vatić, GRAFIT, Novi Sad

Štampa
Budućnost, Novi Sad

ISBN 978-86-86611-86-4

2011

CIP – Каталогизација у публикацији
Библиотека Матице српске, Нови Сад

521.1

НЬУТН, Исак, 1642–1727
Matematički principi prirodne filozofije / Isak Njutn ; prevela s engleskog Ljiljana Matić. – Novi Sad : Akademska knjiga, 2011 (Novi Sad : Budućnost). – 486 str. ; 23 cm. – (Biblioteka Physis / Akademska knjiga, Novi Sad)

Prevedeno prema: The Mathematical Principles of Natural Philosophy / Isaac Newton; izv. stv. nasl.: Philosophiae Naturalis Principia Mathematica / Isaaco Newtono. – Tiraž 1.000.

ISBN 978-86-86611-86-4
I. Newton, Isaac s. Њутн, Исак, 1642–1727
a) Небеска механика – Принципи

COBISS.SR-ID 266894855