СЕКУЛАРНА ПОМЕРАЊА ЗЕМЉИНИХ ПОЛОВА.

ОД

М. МИЛАНКОВИЋА.

СЕКУЛАРНА ПОМЕРАЊА ЗЕМЉИНИХ ПОЛОВА РОТАЦИЈЕ.

Од. М. МИЛАНКОВИЋА

(Приказано на скупу Академије природних наука, 26 маја 1930.)

§ 1. *Основне чињенице.* Наука о изостазији, изражена математским језиком, омогућава да се за проучавање обртања Земље створи нов један механички модел кретања који више одговара стварности но сви досадањи.

Многобројна мерења Земљине теже показала су да је спољна љуска Земљина, саграђена од «сиала», утонула хидростатски у своју тежу, чврсту али флуидалну подлогу саграђену од «симе». Испитивања Вихерта показаше да и у унутрашњости Земље влада слично изостатско стање. Зато се може Земља, као целина, сматрати за флуидално тело које под утицајем вековних сила тежи полако оном облику равнотеже који би при течном стању био одмах остварен. Ова једноставна схема модификована је осетно присуством сиалног покривача Земљиног. Тај покривач не сме се сматрати као флуидалан, јер кад би он то био, морао би већ одавна попустити дејству Земљине теже и његова површина уравнити се, а то није случај. Зато се покривач Земљин мора сматрати као чврст, у обичном смислу те речи, али уз једно ограничење. Да би се нова механичка схема могла изразити математским језиком, потребно је претпоставити да је изостазија, т. ј. хидростаска равнотежа, остварена у свакој тачки Земљине површине. Зато се мора замислити да се љуска сиала свугде приљубила уз своју подлогу тако како то захтева принцип споменуте равнотеже. У том смислу мора се сиални покривач замислити као врста гибке мембране, али неједнаке деблине, при чему њезина спољна гранична површина показује стварни релиеф Земљиног шара. Због тога се о хоризонталној и вертикалној расподели сиалне љуске не смеју правити никаква ограничења, него ваља захтевати да оне одговарају стварности. Да бисмо обухватили један општији случај и водили рачуна о једном оправданом мишљењу Гутенберговом, претпоставићемо да се сиал може протезати и испод океана и образовати њихово дно.

«Симом» смо назвали подлогу сиала, не водећи рачуна о минералном саставу њеном, који је, у главном, изражен у самом њеном имену, него разумевамо под симом све минерале флуидалних особина. Могуће је, а и вероватно, да је та флуидалност последица великог притиска који влада у унутрашњости Земље, јер је познато да нека, иначе потпуно чврста, тела постају флуидална, т. ј. попустљива према дуготрајним силама, када се изложе јаком притиску.

§ 2. *Сила померања континената, наперена ка екватору.* Замислимо да смо из које од континенталних плоча или санти исекли вертикалну елементарну призму која има за базу јединицу површине. Дебљина континенталне санте, т. ј. висина уочене призме, нека буде D; та санта нека је уроњена до дубине H у своју подлогу. Тежиште S призме, коју претпостављамо хомогеном, густине ϱ, лежи за $\frac{1}{2} D$ изнад њене базе; тежиште A потиснуте симе, чија густина нека буде означена са ϱ_0, удаљено је за $\frac{1}{2} H$ од базе призме. Међусобно одстојање тачака A и S претстављено је изразом

$$z_0 = \frac{1}{2}\,(D - H), \tag{1}$$

али како је према принципу хидростатске равнотеже

$$H\varrho_0 = D\varrho, \tag{2}$$

то је

$$z_0 = \frac{1}{2}\,\frac{\varrho_0 - \varrho}{\varrho_0}\,D. \tag{3}$$

Због спљоштености Земље, еквискаларне површине функције сила W Земљине теже, положене кроз A и S, биће дивергентне, па због тога неће, као што је то први нашао Етвеш [1]),

1) *Eötvös*, Verh. d. 17 Allg. Konf. d. Internat. Erdmessung. I Teil. S. 111 (1913).

сила тежине елементарне призме стојати нормално на еквискаларној површини, положеној кроз A, него ће имати своју, обзиром на A, хоризонталну компоненту. Ту компоненту назвао је Кепен [1]) који ју је независно од Етвеша нашао и њен прави значај увидео, немачким називом «Polfluchtkraft» јер је она, као што ћемо видети, наперена ка екватору. Извођењем математског израза за ту силу бавили су се више њих [2]), решавајући постављени проблем махом заобилазно. Директним начином добива се израз за спомениту силу на овај начин.

Положимо у тачку A почетак произвољно оријентираног ортогоналног координатног система, онда можемо функцију сила $W(x, y, z)$ у околини те тачке развити у Маклоренов ред и задовољити се првим члановима тога реда. То исто важи и за изводе функције W, па је на пример

$$\frac{\partial W(x,y,z)}{\partial x} = \frac{\partial W(0,0,0)}{\partial x} + \frac{\partial^2 W(0,0,0)}{\partial x^2}\,x + \frac{\partial^2 W(0,0,0)}{\partial x\,\partial y}\,y + \frac{\partial^2 W(0,0,0)}{\partial z\,\partial x}\,z. \tag{4}$$

Заокренимо сада наш координатни систем тако да његова оса z стоји нормално на еквискаларној површини која пролази кроз тачку A и да је наперена према горе, онда ће раван $x - y$ координатног система додиривати еквискаларну површину, па како је у овој $W(x, y, z)$ константно, то мора бити

$$\frac{\partial W(0,0,0)}{\partial x} = 0; \qquad \frac{\partial W(0,0,0)}{\partial y} = 0, \tag{5}$$

а израз

$$-\frac{\partial W(0,0,0)}{\partial x} = g \tag{6}$$

1) *Köppen,* Ursachen und Wirkungen der Kontinentalverschiebungen und Polwanderungen. Peterm. Mitt. 1921. — Ueber Aenderungen der geograph. Breiten und des Klimas in geolog. Zeit. Geografiska Annaler. 1920. — Zur Paläoklimatologie. Meteorol. Zeitschr. 1921. — Ueber die Kräfte, welche die Kontinentalverschiebungen und Polwanderungen bewirken. Geol. Rundsch; 12 (1922).

2) *Epstein,* Ueber die Polfluchtkraft der Kontinente. Die Naturwissenschaften 9. (1921). — *Lambert,* Some Mechanical Curiosities connected with the Earth's Field of Force. The Amer. Jour. of Science. Vol. II. (1921). — *Wavre,* Sur la force qui tendrait à rapprocher un continent de l'équateur. Archives des Sciences physiques et naturelles. 1925. — *Berner,* Sur la grandeur de la force qui tendrait à rapprocher un continent de l'équateur. (Thèse) Geneve 1925. — *Ertel,* Zur Analyse der Polfluchtkraft. Gerlands Beiträge zur Geophysik. Bd. 22 1931.

претстављаће акцелерацију Земљине теже у тачки A, наперену према доле. Тако добивамо помоћу (4) и помоћу сличног израза за $\dfrac{\partial W(x,y,z)}{\partial y}$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial W(x,y,z)}{\partial x} &= \frac{\partial^2 W(0,0,0)}{\partial x^2}x + \frac{\partial^2 W(0,0,0)}{\partial x\,\partial y}y + \frac{\partial^2 W(0,0,0)}{\partial x\,\partial x}z,\\ \frac{\partial W(x,y,z)}{\partial y} &= \frac{\partial^2 W(0,0,0)}{\partial x\,\partial y}x + \frac{\partial^2 W(0,0,0)}{\partial y^2}y + \frac{\partial^2 W(0,0,0)}{\partial y\,\partial z}z.\end{aligned}\right.$$

У тачки S, која има координате $x=0$; $y=0$; $z=z_0$, замислимо концентрисану целокупну масу μ елементарне призме. На ту масу дејствује, као последица функције сила W, сила

$$\mathfrak{P} = \mu \operatorname{grad} W(0,0,z_0) \tag{8}$$

чије су ортогоналне компоненте претстављене следећим изразима

$$P_1 = \mu\frac{\partial W(0,0,z_0)}{\partial x}; \quad P_2 = \mu\frac{\partial W(0,0,z_0)}{\partial y}; \quad P_3 = \mu\frac{\partial W(0,0,z_0)}{\partial z}.$$

Обе, обзиром на A хоризонталне, компоненте P_1, и P_2 те силе претстављене су, због (7) где ваља ставити $x=0$; $y=0$; $z=z_0$, изразима

$$P_1 = \mu\frac{\partial^2 W(0,0,0)}{\partial z\,\partial x}z_0; \qquad P_2 = \mu\frac{\partial^2 W(0,0,0)}{\partial y\,\partial z}z_0, \tag{9}$$

т. ј. због (6), изразима

$$P_1 = -\mu\frac{\partial g}{\partial x}z_0; \qquad P_2 = -\mu\frac{\partial g}{\partial y}z_0. \tag{10}$$

Заокренимо, што не мења горње једначине, наш координатни систем око његове осе z тако да његова оса x падне у меридијанску раван тачке A и да је наперена према екватору, а оса y према истоку, па означимо са r геоцентрично одстојање, са φ геоцентричну ширину, са ψ географску дужину тачке A, то је

$$\partial x = -r\partial\varphi; \qquad \partial y = r\cos\varphi\, d\psi, \tag{11}$$

дакле

$$P_1 = \mu\frac{z_0}{r}\frac{\partial g}{\partial\varphi}; \qquad P_2 = -\mu\frac{z_0}{r\cos\varphi}\frac{\partial g}{\partial\psi}. \tag{12}$$

Пошто су еквискаларне површине функције сила ротационе површине, то се акселерација теже може мењати само у меридионалном смислу, па је зато

$$\frac{\partial g}{\partial\psi} = 0; \qquad P_2 = 0. \tag{13}$$

Зависност акцелерације теже g од геоцентричне ширине φ претстављена је, у близини Земљине површине, којој припада и тачка A, довољном тачности, изразом

$$g = g_a + (g_p - g_a)\sin^2\varphi, \tag{14}$$

где g_a означава акцелерацију на екватору, а g_p на полу.

Зато је

$$\frac{\partial g}{\partial\varphi} = (g_p - g_a)\sin 2\varphi.$$

Стављајући ово у (12) добивамо

$$P_1 = \mu\frac{z_0}{r}(g_p - g_a)\sin 2\varphi. \tag{15}$$

Ово је аналитични израз за тражену хоризонталну силу која дејствује на масу уочене елементарне призме.

Маса μ елементарне призме која има за базу јединицу претстављена је са ϱD, па зато добивамо, водећи рачуна о (3)

$$P_1 = \frac{1}{2}\varrho\frac{\varrho_0 - \varrho}{\varrho_0}\frac{D}{r}(g_p - g_a)\sin 2\varphi. \tag{16}$$

Ово је аналитички израз за хоризонталну силу која дејствује на јединицу хоризонталне површине континенталне санте. На јединицу масе дејствује ова сила

$$p_1 = \frac{z_0}{r}(g_p - g_a)\sin 2\varphi. \tag{17}$$

Та сила дејствује, према избору нашег координатног система и пошто је $g_p > g_a$, према екватору; она достизава при једнаком z_0 свој максимум на 45^0 геоцентричне ширине, на половима и на екватору једнака је нули. За $\varphi = 45^0$, где је она највећа, достизава она величину $\frac{z_0}{r}(g_p - g_a)$, док је ту акцелерација теже претстављена изразом $\frac{1}{2}(g_p + g_a)$. Максималан однос обеју сила једнак је

(18) $$\alpha = \frac{2z_0}{r}\,\frac{g_p - g_a}{g_p + g_a}.$$

Величина z_0 позната је отприлике, па се за њу обично узима $z_0 = 2{,}5$ km. Зато добивамо за $r = 6371$ km; $g_p = 983{,}232\ \frac{cm}{sce^2}$; $g_a = 978{,}046\ \frac{cm}{sce^2}$

(19) $$\alpha = \frac{1}{482000}.$$

Сила која тежи да помери континенат према екватору веома је малена у размери према сили теже. Испитајмо у каквој размери стоји она према сили којом Сунце и Месец стварају плиму и осеку. Вертикална односно хоризонтална компонента силе којом такво небеско тело дејствује на јединицу масе дате су изразима

$$V = fm\frac{r}{a^3}(3\cos^2 z - 1); \qquad H = -fm\frac{r}{a^3}3\sin z\cos z,$$

где f означава гравитациону константу, z зенитску дистанцију, m масу, а r обстојање небеског тела. Модуо R резултате тих обеју компонената дат је једначинама

$$R^2 = V^2 + H^2$$

$$R^2 = \left(fm\frac{r}{a^3}\right)^2(\cos^2 z + 1),$$

па достизава за $z = 0$ свој максимум

$$R = 2fm\frac{r}{a^3}.$$

Целокупно дејство Сунца и Месеца претстављено је изразом

(20) $$R = 2fr\left(\frac{m_1}{a_1^3} + \frac{m_2}{a_1^3}\right),$$

где се индекс 1 односи на Сунце, а индекс 2 на Месец. Означимо ли са M масу Земље, то је довољном тачности

$$\frac{fM}{r^2} = g,$$

па тако добивамо за размеру силе R према сили теже овај израз

(21) $$\beta = 2\left[\frac{m_1}{M}\left(\frac{r}{a_1}\right)^3 + \frac{m_2}{M}\left(\frac{r}{a_2}\right)^3\right].$$

Са

$$\frac{m_1}{M} = 333.430, \qquad \frac{r}{a_1} = \frac{6371}{149{,}500.000},$$

$$\frac{m_2}{M} = 0{,}0123, \qquad \frac{r}{a_2} = \frac{6371}{384.400},$$

добивамо

(22) $$\beta = \frac{1}{6{,}112.000}.$$

Упоредимо ли овај број са (19), то видимо да је максимална вредност силе која тежи да помери континенат према екватору 12,7 пута већа од максималне вредности силе којом Сунце и Месец стварају плиму и осеку. Како утицају ове последње силе попушта не само хидросфера Земљина него и њена чврста кора, не би се смело казати да сила која тежи да помери континенат према екватору није у стању да то учини. Све то зависи од сиалне љуске Земљине, а у првом реду од тога да ли се сиал протеже и испод океана или не. Дефинитивно решење да ли се континенти померају или не, донеће астрономска опажања. Таквим опажањима, вршеним у дужем интервалу времена, не могу умаћи померања континента, ако се заиста дешавају.

Како ћемо ускоро видети, не лежи значај силе која тежи да помери континенат ка екватору у њеној величини, него у томе да њено присуство показује да елеменат континенталне плоче може само на половима и на екватору наћи свој положај равнотеже. На половима је тај положај лабилан, на екватору стабилан. Континенталне плоче у равнотежи су на пример онда када су око пола или с обе стране екватора симетрично распоређене.

§ 3. *Положај главних оса инерције.* Када Земља не би носила своју неправилну љуску од сиала, она би имала облик глатког ротационог елипсоида, а меридиански пресек његов била би елипса претстављена једначином

$$r = a\,(1 - \nu \sin^2 \varphi)\,, \tag{23}$$

где је

$$\nu = \frac{a - c}{a}\,, \tag{24}$$

при чему a означава екваторијалну, а c поларну полуосу те елипсе. Тај елипсоид назваћемо унутрашњим елипсоидом референције. У вишој геодезији назива се елипсоидом референције онај који је ограничен површином мора; он обухвата споља наш унутрашњи елипсоид референције. Оба пола унутрашњег елипсоида назваћемо половима референције и од њих уочити само северни. Присуство љуске од сиала која је неправилна и местимично поцепана, деформираће облик површине која ограничава симу и између ове површине и унутрашњег елипсоида изазвати отступања слична онима каква постоје између спољњег елипсоида референције и геоида. Та се отступања, пошто су малена вишега реда, не морају у следећим извођењима узимати у обзир. О њима ћемо овде само да додирнемо ово начелно питање. Приликом извођења једначина (12) нисмо још ништа били претпоставили о функцији $W(x, y, z)$. Зато ћемо и при деформисаном облику граничне површине симе добити коначну вредност за силу P_1, па можда и за силу P_2. Значи да ће, и у том случају, постојати хоризонтална сила која ће тежити да континент помери. Зато је облик равнотеже могућ само при нарочитим положајима сиалног покривача Земљиног. Проблемом, који облици Земље задовољавају такве услове равнотеже бавио се недавно *Жардецки* [1]) и показао све тешкоће решења таквог проблема.

За испитивање ротационог кретања Земље долази у првом реду у обзир њен елипсоид инерције, па ћемо зато испитати какав положај према нашем елипсоиду референције заузима тај елипсоид инерције.

Замислимо, дакле, око елипсоида референције омотан покривач сиала или, боље речено, да су делови симине језгре, ограничене елипсоидом референције, замењени као што треба и по принципу изостазије, лакшим сиалним сантама. Тиме ће, на произвољном делу Земљине површине, елементарна призма симе бити замењена вишом, али једнако тешком елементарном призмом сиала. Та субституција нека буде проведена на целој Земљи на тај начин да буде добивено садашње стварно стање. Положимо у центар Земље почетак координатног система $x-y-z$ којега се оса z подудара са осом ротације елипсоида референције, па нека φ, ψ, z буду поларне координате произвољне тачке Земљинога тела обзиром на тај координатни систем. Проведеном субституцијом уздигнута је елементарна маса μ за висину z_0 дату изразом (3). Услед тога, помериће се пол инерције из свога положаја, који се подударао са полом елипсоида референције, за угао претстављен изразом

$$\Delta\vartheta = \mu r \frac{\sin 2\varphi}{C - A}\, z_0\,, \tag{25}$$

где A и C претстављају главне моменте инерције Земљинога тела који су се проведеном субституцијом променули за мале величине вишега реда, тако да се те промене не морају узимати у обзир. Померање пола инерције дешава се у меридијану $180^0 + \psi$. Положимо кроз пол референције тангенцијалну раван, а у овој ортогонални координатни систем $\xi - \eta$ којега почетак лежи у том полу а оса ξ у равни гриничког меридијана, онда су координате $\Delta\xi$ и $\Delta\eta$ померања $\Delta\vartheta$ претстављене изразима

$$\left\{\begin{aligned} \Delta\xi &= -\frac{\mu z_0 r}{C - A} \sin 2\varphi \cos\psi\,, \\ \Delta\eta &= -\frac{\mu z_0 r}{C - A} \sin 2\varphi \sin\psi\,. \end{aligned}\right. \tag{26}$$

Ови се изрази не мењају при субституцији

$$\varphi \,|\, -\varphi\,; \qquad \psi \,|\, 180^0 + \psi\,,$$

а то значи да се положај пола инерције не мења ако се произвољни делови сиала помере антиподно. Зато се при одредби пола инерције можемо служити и планиглобом антипода.

Одређење положај пола инерције може се извршити на тај

[1]) *Jardetzky*, Sur les figures d'équilibre d'une masse liquide aves des corps flottants. Acta Astronomica, Sér. a. Vol 2. Cracovie 1931.

начин да се покривач сиала рашчлани у дискретне масе, па се за сваку од ових одреди одговарајуће померање. Но боље је површинску природу сиала узети у обзир и поступити као што следује.

Меридијанима ψ и $\psi + d\psi$ и упоредницима φ и $\varphi + d\varphi$ ограничен је део сиала који има хоризонталну површину

$$df = r^2 \cos\varphi \, d\varphi \, d\psi . \tag{27}$$

Тај елеменат изазваће померање пола инерције претстављено следећим изразима

$$\begin{cases} d\xi = -\dfrac{\mu z_0 r^3}{C-A} \sin 2\varphi \cos\varphi \cos\psi \, d\varphi \, d\psi , \\[2ex] d\eta = -\dfrac{\mu z_0 r^3}{C-A} \sin 2\varphi \cos\varphi \sin\psi \, d\varphi \, d\psi . \end{cases} \tag{28}$$

Целокупно дејство сиалног покривача добићемо вршећи интегрисање горњих израза преко целе Земљине површине, при чему се неједнака дебљина тог покривача, изражена величинама μ и z_0 може узети у обзир. Но, како је дебљина сиала испод мора свакако веома малена, и како о њој немамо довољних података, то је довољно горњу интеграцију ограничити само на континенталне санте. При томе се може за D ставити осредња дебљина континенталних плоча, т. ј. сматрати μ и z_0 као константе. Још је могуће, као што је то чињено у сличним приликама, и за r ставити средњу вредност r_0 Земљиног радиуса. Зато се израз

$$\frac{\mu z_0 r^3}{C-A} = K \tag{29}$$

може сматрати као константа. При вршењу рачуна најбоље је разложити континенталне плоче у један коначан број n сферних четвороуглова, ограничених меридијанима и упоредницима, израчунати дејство свакога од њих, па коначно извршити збир тих дејстава. Ако је произвољан од тих четвороуглова ограничен меридијанима ψ_i' и ψ_i'', а упоредницима φ_i' и φ_i'', онда су координате померања пола инерције, изазваног тим четвороуглом, претстављене следећим изразима

$$\begin{cases} \xi_i = -K \displaystyle\int_{\varphi_i'}^{\varphi_i''} \int_{\psi_i'}^{\psi_i''} \sin 2\varphi \cos\varphi \cos\psi \, d\varphi \, d\psi , \\[2ex] \eta_i = -K \displaystyle\int_{\varphi_i'}^{\varphi_i''} \int_{\psi_i'}^{\psi_i''} \sin 2\varphi \cos\varphi \sin\psi \, d\varphi \, d\psi . \end{cases} \tag{30}$$

Вршењем интеграције добива се

$$\begin{cases} \xi_i = \dfrac{2}{3} K (\cos^3\varphi_i'' - \cos^3\varphi_i')(\sin\psi_i'' - \sin\psi_i') , \\[2ex] \eta_i = -\dfrac{2}{3} K (\cos^3\varphi_i'' - \cos^3\varphi_i')(\cos\psi_i'' - \cos\psi_i') . \end{cases} \tag{31}$$

Свих n сферних четвороуглова дају

$$a_1 = \sum \xi_i ; \quad a_2 = \sum \eta_i . \tag{32}$$

Ово су координате пола инерције обзиром на пол референције или координате вектора положаја $\mathfrak{a}$ пола инерције обзиром на пол референције. Вектор $\mathfrak{a}$ који је, као што ћемо видети, од пресудног значаја за проблем померања полова, назваћемо *аномалијом пола инерције*. Модуо тога вектора претстављен је изразом

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} , \tag{33}$$

а правац тога вектора затвара са осом ξ нашег координатног система угао ψ_a који је једнозначно одређен једначинама

$$\sin\psi_a = \frac{a_2}{a} ; \qquad \cos\psi_a = \frac{a_1}{a} . \tag{34}$$

Нумеричко израчунавање садање аномалије пола инерције биће извршено другом приликом, но већ сада је могуће о њој саопштити ове податке.

Аномалија пола инерције достизава, при датом D, свој максимум када је покривач сиала обухватио два антиподна сферна двоугла која настају када се Земљина површина подели једним меридијанским и једним екваториалним пресеком у четири једнака дела. Два антиподна двоугла ове поделе, покривена сиалом, дају максимум аномалије. Да бисмо тај максимум израчунали, довољно је према пређашњем, само један од тих двоуглова, али двоструко, обложити сиалом. Положимо ли споменути меридијански пресек кроз почетни меридијан, то лежи двоструко обложени сферни двоугао између ширина $\varphi' = 0$ и $\varphi'' = 90^0$ а дужина $\psi' = 0$ и $\psi'' = 180^0$. Тако добивамо помоћу израза (31) које ваља узети двоструко,

$$a_1 = 0\,; \quad a_2 = -\frac{8}{3}K\,,$$

т. ј.

$$a_{\max} = \frac{8}{3}K\,, \tag{35}$$

Између главних момената инерције A и C Земље, њене масе M и њеног екваторијалног полупречника a постоји ова релација

$$C - A = 0{,}0010365a^2M\,. \tag{36}$$

Уведемо ли место екваторијалног радиуса $a = 6378$ km средњи радиус Земљин $r_0 = 6371$ km, то добивамо

$$C - A = 0{,}00104r_0^2M\,. \tag{37}$$

Из (37) и (29), где ваља ставити $r = r_0$, добивамо

$$K = \frac{\mu z_0 r_0}{0{,}00104M}\,,$$

а како је $\mu = \varrho D$; $M = \frac{4}{3}\pi r_0^3 \varrho_m$ где $\varrho_m = 5{,}52$ означава средњу густину Земље, то је

$$K = \frac{3}{4}\,\frac{z_0}{0{,}00104M}\,\frac{\varrho}{\varrho_m}\cdot\frac{D}{r_0^2}\,.$$

Како се ради о одређењу једне максималне вредности, то ћемо ставити $D = 60$ km; $\varrho_0 = 3{,}1$; $\varrho = 2{,}8$; $z_0 = 2{,}9$ km, па добивамо помоћу (3)

$$K = 0{,}0005\,.$$

Максимална аномалија износи, према томе, у лучним секундама $\frac{8}{3}\,0{,}0005 \times 206265'' = 275''$ т. ј.

$$a_{\max} = 4'35''.$$

Да помоћу овог резултата одредимо приближно садању вредност аномалије пола инерције, треба да се послужимо планиглобом антипода. На њему ћемо видети да је квадрат Земљине површине који лежи захваћен између меридијана $\psi' = -20^0$ и $\psi'' = 160^0$ и између упоредника $\varphi = 0^0$ и $\varphi = +90^0$ покривен скоро сасвим Евразијом, Северном Африком и антиподно помереном Јужном Америком и Антарктиком. Ти континенти изазвали би аномалију од округло 2 и то у меридијану $180^0 + +70^0 = 250^0$ источно, т. ј. 110^0 западно од Гринича. Тај ефекат је редукован преко половине континентима који леже између истих меридијана ψ' и ψ'', али на јужној хемисфери; то су јужни део Африке, Аустралија, делови Антарктика и антиподно померена Северна Америка; том редукцијом аномалије на око $1'$ не мења се осетно њен правац. Зато можемо да кажемо да садања вредност аномалије достиже вредност једне лучне минуте, а да лежи у меридијану 110^0 западно од Гринича. Оно што ми данас називамо северним полом Земље, то је њен пол инерције око којега пол ротације описује један веома узак круг. Због тога лежи пол референције око једне минуте удаљен од северног пола, у меридијану 70^0 источно од Гринича, дакле померен у правцу према Предњој Индији. Могуће је да је са том околности у вези резултат мерења Земље, који казује да екватор није потпуни круг него елипса чија је мала оса наперена према Предњој Индији.

§ 4. *Прилагођавање Земљиног тела.* Ако не узмемо у обзир еластичност Земљиног тела, која изазива само периодичка померања полова, која овде не долазе у обзир, то пол ротације описује, за време ајлерове периоде, око пола инерције, један пуни круг. Како нас се овде тичу само секуларна померања Земљиних полова, то ћемо то периодично кретање искључити из расматрања, па зато уочити средњи положај пола ротације за време ајлерове периоде. Како за то време пол ротације описује круг којега центар лежи у полу инерције, то тај средњи положај пола ротације пада у сам пол инерције па се налази у одстојању α од пола референције. Због свега тога ће флуидална језгра Земљина, ограничена елипсоидом референције, бити изложена деформујућим силама којима ће временом попустити, повлачећи за собом и свој покривач од сиала. Тај процес, који се зове прилагођивањем Земљиног тела,ваља сада математски описати. При томе је довољно ограничити се на онај меридијански пресек Земљин у којем леже и ротациони пол и пол референције, јер у том пресеку достизавају деформујуће силе своју максималну вредност.

Меридијански пресек елипсоида референције претстављен је изразом (23). Уведимо место геоцентричне ширине њен комплеменат, дистанцију пола δ, то добивамо за тај меридијански пресек ову једначину

$$r = a\,(1 - \nu \cos^2 \delta)\,. \tag{38}$$

Када би се оса ротације подударала са осом елипсоида референције, онда би функција сила гравитације и центрифугалне силе била претстављена овим изразом

$$W = f\frac{M}{r} + \frac{f}{2r^3}(C - A)(1 - 3\cos^2\delta) + \frac{n^2 r^2}{2}\sin^2\delta\,. \tag{39}$$

Значај појединих чланова овога израза је овај. Када би целокупна маса Земљина M била концентрисана у центру Земље или када би Земља била саграђена из концентричних кугала, од којих би свака за себе била хомогена, онда би привлачна сила Земљина на тачку M била градијенат израза $f\frac{M}{r}$. То је значај главнога члана горњега израза. Члан $\frac{f}{2r^3}(C-A)(1-3\cos^2\delta)$ је последица елипсоидалног облика Земљиног елипсоида инерције. Када би тај елипсоид био лопта, т. ј. када би било $C = A$, онда би тај члан сасвим ишчезао. Члан $\frac{n^2 r^2}{2}\sin^2\delta$ је последица центрифугалних сила. Затвара ли оса ротације Земље са малом осом горње елипсе угао $\Delta\vartheta$ онда се тиме мења функција сила центрифугалних за износ

$$\Delta W = \frac{\partial}{\partial\delta}\left(\frac{n^2 r^2}{2}\sin^2\delta\right)\Delta\vartheta = \frac{n^2 r^2}{2}\sin 2\delta\,\Delta\vartheta\,, \tag{40}$$

јер се дистанција од пола тачке M увећала за мали угао $\Delta\vartheta$, а истовремена промена радиусвектора не мора бити узета у обзир. Том променом функције сила, биће изазвана нова једна сила $\mathfrak{R}$ која дејствује на јединицу масе у тачки M. Величину

и правац те силе одредићемо овако. Пошто та сила лежи у уоченом меридијанском пресеку, то је можемо раставити у компоненте V и H од којих прва дејствује у правцу радиусвектора r, а друга стоји нормално на првој и наперена је према екватору. За то су те две силе претстављене изразима

$$V = \frac{\partial}{\partial r}\Delta W\,; \quad H = \frac{\partial}{\partial n}\Delta W\,, \tag{41}$$

при чему ∂n означава елеменат нормале на r који је једнак $r\partial\delta$. Зато је

$$H = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\delta}\Delta W\,.$$

Тако добивамо помоћу (40)

$$\begin{cases} V = n^2 r \sin 2\delta\Delta\vartheta\,, \\ H = n^2 r \cos 2\delta\Delta\vartheta\,. \end{cases} \tag{42}$$

Обе ове силе дају резултанту $\mathfrak{R}$ која има величину

$$R = \sqrt{V^2 + H^2} = n^2 r\Delta\vartheta\,. \tag{43}$$

Сила $\mathfrak{R}$ затвара са нормалом радиусвектора r, напереном према екватору угао β који дат овом једначином

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{V}{H}\,. \tag{44}$$

Зато је

$$\operatorname{tang}\beta = \operatorname{tang} 2\delta\,, \tag{45}$$

т. ј.

$$\beta = 2\delta\,. \tag{46}$$

Под утицајем оваквих сила $\mathfrak{R}$, почеће Земља да се деформира, тежећи оном облику при којем се њена оса ротације подудара са осом унутрашњег елипсоида референције. Тиме ће се и координатни систем, који нам је служио за израчунавање функције сила, заокренути, услед чега ће се дистанција пола δ и у другом од трију чланова израза W увећати за $\Delta\vartheta$. Пошто је $\Delta\vartheta$ веома мала величина, и пошто се у околини тачке Mr може сматрати за константно, то ће из тога померања резултовати промена функције сила која ће тежити граничној вредности

$$(47) \qquad \lim \Delta W = \frac{\partial W}{\partial \delta} \Delta \vartheta .$$

Зато се добива помоћу (39)

$$(48) \qquad \lim \Delta W = \frac{1}{2} \left[3 \frac{f}{r^5} (C-A) + n^2\right] r^2 \sin 2\delta \, \Delta\vartheta .$$

У изразу (38) означава ν спљоштеност унутрашњег елипсоида референције, која се веома мало разликује од спљоштености спољњег, због чега можемо ставити $\nu = \frac{1}{300}$. Како се више потенције тога малог броја могу занемарити, то је

$$\frac{1}{r^5} = \frac{1}{a^5} (1 - \nu \cos^2 \delta)^{-5} = \frac{1}{a^5} (1 + 5\nu \cos^2 \delta) .$$

Употребимо ли (36), то добивамо, стављајући

$$(49) \qquad N^2 = 3 \frac{f}{r^5} (C-A) + n^2 ,$$

$$N^2 = 0{,}003 \frac{fM}{a^3} (1 + 5\nu \cos^2 \delta) + n^2 .$$

Узмемо ли у обзир да се за $\frac{fM}{a^2}$ може ставити средња акцеларација Земљине теже и да је $n = \frac{2\pi}{\tau}$, где τ означава звездани дан, то се можемо уверити да су $0{,}003 \frac{fM}{a^3}$ и n^2 истога реда величине. Према збиру тих двају величина може се величина са $\cos^2 \delta$ занемарити, јер достиже у максимуму само износ од $\frac{5}{2} \nu = \frac{1}{120}$ оних првих двеју. Зато је

$$(50) \qquad \lim \Delta W = \frac{1}{2} N^2 r^2 \sin 2\delta \, \Delta\vartheta ,$$

где се N може сматрати као константно. Одатле следује

$$(51) \qquad \lim V = N^2 r \sin 2\delta \, \Delta\vartheta ; \quad \lim H = N^2 r \cos 2\delta \, \Delta\vartheta$$

$$(52) \qquad \lim R = N^2 r \, d\vartheta$$

$$(53) \qquad \lim \operatorname{tang} \beta = \lim \frac{V}{H} = \operatorname{tang} 2\delta$$

$$(54) \qquad \lim \beta = 2\delta .$$

Узимајући у обзир промене свих чланова функције сила W, нашли смо да се тиме мења само величина резултанте $\mathfrak{R}$, а не њен правац.

Треба да испитамо какве ће последице имати прилагођавање Земљине језгре на њен сиални покривач и на положај тога покривача према његовој подлози. Та језгра, ограничена унутрашњим елипсоидом референције, нека носи на уоченом месту Земљине површине једну континенталну санту. Издвојимо из те санте једну елементарну призму, а тачка M нека буде средина пресека те призме са површином нивоа симе. Процесом прилагођавања, помериће се та тачка у правцу силе $\mathfrak{R}$ и заузети положај који се може одредити на овај начин. Како се прилагођивањем не мењају величине A, C, a, ν, то ће, по довршеном прилагођивању, меридијански пресек елипсоида референције бити опет претстављен једначином (38), само ће он бити заокренут за $\Delta\vartheta$ према свом првом положају. Зато се коначни положај тачке M може на тај начин одредити да се нађе пресек правца у којем је померена са заокренутом меридијанском елипсом.

Нацртајмо правоугли троугао TNM_1, његов прави угао нека лежи код N, у катети NT одаберимо произвољну тачку M, па нека нам она претставља првобитни, а тачка M_1 коначни положај тачке M. Зато нам дужина MN претставља хоризонталну, а дужина NM_1 вертикалну компоненту померања. Угао NMM_1 једнак је углу β који смо малочас одредили. Заокретањем меридијанске елипсе дошла је њена тачка M у положај T, при чему је MT једнако $r\Delta\vartheta$. Угао што га померање MT гради са NM веома је мален према осталим угловима који овде долазе у обзир, због чега смо и смели дуж MT сматрати као продужење дужи NM. Елеменат TM_1 заокренуте меридијанске елипсе, затвара са радиусвектором r угао τ одређен општим обрасцем $\operatorname{tang} \tau = \frac{r}{r'}$. За комплеменат тога угла т. ј. за угао τ_1 што га затвара права TM_1 са нормалом TM радиусвектора, важи једначина

$$(55) \qquad \operatorname{tang} \tau_1 = \frac{r'}{r} = \frac{1}{r} \frac{dr}{d\delta} ,$$

т. ј. због (38)

$$\operatorname{tang} \tau_1 = \frac{\nu \sin 2\delta}{1 - \nu \cos^2 \delta} \cdot \tag{56}$$

Вертикалну односно хоризонталну компоненту померања MM_1 означимо са Δh односно $r\Delta\xi$, тако да нам $\Delta\xi$ претставља хоризонталну компоненту померања мерену у лучној мери. Нека буде дакле $NM_1 = \Delta h$; $MN = r\Delta\xi$, то следује из троуглова NTM_1 и NMM_1

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta h &= r\,(\Delta\xi + \Delta\vartheta) \operatorname{tang} \tau_1 \,, \\ \Delta h &= r\,\Delta\xi \operatorname{tang} \beta \,. \end{aligned} \right. \tag{57}$$

Одавде следује

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta\xi &= \frac{\operatorname{tang} \tau_1}{\operatorname{tang} \beta - \operatorname{tang} \tau_1} \Delta\vartheta \,, \\ \Delta h &= r \frac{\operatorname{tang} \beta \operatorname{tang} \tau_1}{\operatorname{tang} \beta - \operatorname{tang} \tau_1} \Delta\vartheta \,. \end{aligned} \right. \tag{58}$$

Ставе ли се у ове једначине изрази (56) и (46), то су тражена померања одређена. При томе је дозвољено, пошто је ν веома мало према јединици, члан $\nu \cos^2 \delta$ у (56) занемарити, па се добива

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta\xi &= \frac{\nu \cos 2\delta}{1 - \nu \cos 2\delta} \Delta\vartheta \,, \\ \Delta h &= r \frac{\nu \sin 2\delta}{1 - \nu \cos 2\delta} \Delta\vartheta \,. \end{aligned} \right. \tag{59}$$

И овде се може члан $\nu \cos 2\delta$ према јединици занемарити, па је зато

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta\xi &= \nu \cos 2\delta \,.\, \Delta\vartheta \,, \\ \Delta h &= r\nu \sin 2\delta \,.\, \Delta\vartheta \,. \end{aligned} \right. \tag{60}$$

У горњим једначинама $\Delta\xi$ је мерено у лучној, а Δh у линеарној мери. Нађена померања сиалног покривача према првобитном елипсоиду референције тичу се само оног меридијанског пресека тог елипсоида у којем лежи пол ротације Земљине; изван тог меридијана бивају горња померања све мања, па ишчезавају у нормалном меридијану сасвим. Та су померања, дакле, функције географских координата φ и ψ, или ако се ограничимо само на споменути главни пресек, функције поларне дистанције δ. При томе ваља величине $\Delta\vartheta$ и δ мерити у противном смислу, тако да пол ротације лежи у четвртом квадранту од δ непосредно испред $\delta = 360^\circ$.

Напрезања која настају тим померањима у сиалној љуски Земљиној, могу се израчунати на овај начин, при чему ћемо се опет ограничити на меридијан максималних напрезања. Замислимо да смо дуж тога меридијана исекли пругу сиала која има ширину, мерену нормално на тај меридијан, једнаку јединици, а дебљину D, па да та пруга почиње на поларној дистанцији δ_1 а свршава на поларној дистанцији δ_2, то ће се један крај те пруге услед деформације њене подлоге померити за $r\Delta\xi_1 = \nu r \cos 2\delta_1 \Delta\vartheta$, а други за $r\Delta\xi_2 = \nu r \cos 2\delta_2 \Delta\vartheta$ према екватору. Првобитна дужина пруге $r\,(\delta_2 - \delta_1)$ увећаће се, дакле, за $r\,(\Delta\xi_2 - \Delta\xi_1) = \nu r (\cos 2\delta_2 - \cos 2\delta_1)\,\Delta\vartheta$. Размера између истезања и првобитне дужине једнака је

$$\frac{\Delta l}{l} = \nu \frac{\cos 2\delta_2 - \cos 2\delta_1}{\delta_2 - \delta_1} \Delta\vartheta \,.$$

Бива ли разлика између δ_2 и δ_1 све мања и мања, то се добива

$$\lim_{\delta_2 = \delta_1 = \delta} \frac{\cos 2\delta_2 - \cos 2\delta_1}{\delta_2 - \delta_1} = \frac{\partial}{\partial\delta} \cos 2\delta = -2 \sin 2\delta \,.$$

На поларном отстојању δ, добива се, дакле, ова размера истезања

$$\frac{\Delta l}{l} = -2\nu\Delta\vartheta \sin 2\delta \,. \tag{61}$$

Према Хуковом закону, постоји ова једначина

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta\sigma}{E} \,, \tag{62}$$

где $\Delta\sigma$ означава напон истезања, а E модуо еластицитета. Зато следује

$$\Delta\sigma = -2\nu E\Delta\vartheta \sin 2\delta \,. \tag{63}$$

Овај израз претставља напон истезања проузрокован у сиалу процесом прилагођавања. У првом и трећем квадранту од δ, тај је напон негативан, т. ј. овде се појављују силе притиска.

Максимум сила истезања настаје код $\delta = 135^0$ и $\delta = 315^0$, а максимум сила притиска код $\delta = 45^0$ и $\delta = 225^0$.

На сличан начин, налази се да су силе смицања проузроковане процесом прилагођавања претстављене изразом

$$\Delta\tau = 2\nu G \Delta\vartheta \cos 2\delta \,, \tag{64}$$

где G претставља модуо смицања, за који се може ставити $G = \frac{5}{13} E$.

Хоризонтално померање сиалног покривача према првобитном елипсоиду референције, претстављено изразом (60), веома је малено, јер је ν мали број, па достиже само 300-ти део померања тог елипсоида у његов нови положај. Та померања теку толико споро да су деформације сиалног плашта рања теку толико споро да су деформације сиалног плашта Земљиног, која она изазивају, осетно мања него промене тог покривача, изазване за време тих дугих интервала геолошким силама. Зато се може тврдити да се процесом прилагођивања сиална љуска земљина неосетно деформише, али се зато помера по унутрашњем елипсоиду референције. Или обратно: при мера по унутрашњем елипсоиду референције. Или обратно: при непромењеном облику сиалне љуске, помера се пол референције из свога старог положаја у нови, а тим се мења поларно одстојање тачке M за износ $\Delta\vartheta$. Зато је, занемарујући чланове вишега реда малености,

$$\Delta\delta = \Delta\vartheta \,. \tag{65}$$

На тај начин добивамо место једначина (60), (63) и (64) ове

$$\begin{cases} d\xi = \nu \cos 2\delta d\delta \,, \\ dh = r\nu \sin 2\delta d\delta \,, \end{cases} \tag{66}$$

$$\begin{cases} d\sigma = -2\nu E \sin 2\delta d\delta \,, \\ d\tau = 2\nu G \cos 2\delta d\delta \,. \end{cases} \tag{67}$$

При коначном померању пола референције према тачки M са поларног отстојања δ_1 на отстојање δ_2, дакле за износ $(\delta_2 - \delta_1)$ добивају се следеће деформације сиалног покривача и следећи напони, интеграцијом горњих једначина

$$\begin{cases} \xi = \frac{1}{2} \nu (\sin 2\delta_2 - \sin 2\delta_1) \,, \\ h = \frac{1}{2} r\nu (\cos 2\delta_1 - \cos 2\delta_2) \,. \end{cases} \tag{68}$$

$$\begin{cases} \sigma = \nu E (\cos 2\delta_2 - \cos 2\delta_1) \,, \\ \tau = \nu G (\sin 2\delta_2 - \sin 2\delta_1) \,. \end{cases} \tag{69}$$

Екстремне вредности ових величина претстављене су изразима

$$\xi_m = \pm \nu \,; \quad h_m = \pm r\nu \,; \quad \sigma_m = \pm 2\nu E \,; \quad \tau_m = \pm 2\nu G \,. \tag{70}$$

Хоризонтално померање ξ, мерено у лучној мери, достиже максимум од $\nu = \frac{1}{300}$, дакле од 11′27″, па мења, као што смо већ споменули, пошто је за то померање потребно огромно време, хоризонталну конфигурацију континената мање него што то чине геолошке силе за то исто време.

Максимум вертикалног померања претстављен је, ако r заменимо са a, и употребимо (24), са $\pm(a-c)$. Тај максимум једнак је, као што се морало и очекивати, разлици између екваториалног и поларног радиуса земљиног. Узмемо ли у обзир да се хидросфера Земље одмах прилагођава новом положају пола ротације, док Земља сама чини то тек када је достигнута једна извесна разлика $\Delta\delta = \delta_2 - \delta_1$, то се добива помоћу (68) за такве трансгресије односно регресије мора овај израз

$$t = \pm \frac{r\nu}{2} [\cos 2\delta_1 - \cos 2(\delta_1 + \Delta\delta)] \,, \tag{71}$$

где $\Delta\delta$ претставља ону потребну разлику. Како је $\Delta\delta$ свакако мало, то је

$$\cos 2(\delta_1 + \Delta\delta) = \cos 2\delta_1 + \Delta\delta \frac{\partial \cos 2\delta_1}{\partial\delta} = \cos 2\delta_1 - 2\Delta\delta \sin 2\delta_1 \,,$$

па дакле

$$t = \pm r\nu\Delta\delta \sin 2\delta_1 \,, \tag{72}$$

т. ј. у максимуму

$$t = \pm r\nu\Delta\delta \,. \tag{73}$$

Такве трансгресије, мерене вертикално, зависе, дакле, од величине $\Delta\delta$. Ставимо ли за исту максималну вредност амплитуде пола инерције, која лежи код 4′ дакле, у лучној мери, код 0,00164, то добивамо са $r = 6{,}371.000\ m$

$$t = \pm 35\ m.$$

Нормални, односно тангенцијални напони, изазивани процесом прилагођавања у сиалној љуски Земљиној, могу достићи знатне величине, јер је н. пр. за пешчар $E = 80.000$ kg/cm², а за гранит $E = 300.000$ kg/cm², док се за G може ставити $\frac{5}{13}E$. На тај начин следују за нормална напрезања максималне вредности од 500 до 2000 kg/cm², а за тангенцијална од 200 до 800 kg/cm². Да би се дошло до таквих напона, потребна су огромни интервали времена. Но, ваља имати у виду да је отпорност камења према силама истезања веома малена, па зато у њему могу настати пукотине већ при мањим померањима полова.

§ 5. *Положај главних оса инерције при променљивом полу референције.* Да бисмо проблем померања полова земљиних могли математски формулисати, па затим решити, потребно је одговорити на једно претходно питање и то: који ће положај заузети главне осе инерције када пол референције дође на једно произвољно место испод сиалне љуске.

Видели смо да се процесом прилагођавања не мења хоризонтална конфигурација сиалног покривача, т. ј. контуре и међусобни положај континенталних санти, па зато можемо тај покривач сматрати као непроменљив у своме облику, покривао он целу Земљу или био поцепан у поједине делове. Ако су дескриптивне природне науке у стању да пруже поузданих података о томе како се тај покривач мењао у прошлости Земљиној услед геолошких сила, онда ништа не стоји на путу да се и те промене, при проучавању секуларних померања полова, узму у обзир. Претпоставком коју смо о непроменљивости континената учинили, не мислимо да заузмемо становиште против Вегенерове теорије померања континената. Ако нам пође за руком, као што ће то заиста бити случај, да докажемо да се полови земљини секуларно померају, онда ће то кретање полова бити још изразитије ако се континенти померају један према другом.

Природно је да ћемо при решавању постављеног проблема поступити на тај начин да ћемо Земљу рашчланити у два њена главна дела, у њену чврсту сиалну љуску и у њену попустљиву флуидалну језгру коју ћемо, пошто остале особине материјала који леже испод симе не долазе овде у обзир, звати кратко симином језгром. Пошто је та подела извршена, ваља израчунати моменте инерције сиалне љуске и оне симине језгре об-

зиром згодно одабраних оса, па онда, суперпозицијом, одредити главне моменте и главне осе инерције Земљиног тела. При томе ваља имати ово у виду. Што се тиче момената инерције сиалне љуске, није дозвољено те моменте идентификовати са онима који се добивају ако се израчунају моменти саме сиалне љуске, него ваља под њима разумети оне промене које настају на моментима симине језгре када се из те језгре, ограничене унутрашњим елипсоидом референције, издвоје делови симе потиснуте сиалном љуском, па замене сиалним сантама које вире изван тога елипсоида. При израчунавању тих момената инерције дозвољено је за радиус Земље узети њен средњи полупречник r_0, јер је сиална љуска, особито колико она овде долази у обзир, толико танка да учињена субституција не мења резултат рачуна. Из тога рачунског упрошћења не треба разумети да се Земља сматра као кугла. Но могуће је то упрошћење и геометријски интерпретисати, па сматрати сиалну љуску као лопту, но онда ваља замислити да је неједнакост моменатна C и A одржана распоредом маса у унутрашњости Земље.

Ток рачуна биће, дакле, овај. Положимо у центар Земље почетак ортогоналног координатног система $X-Y-Z$ тако да је његова оса Z наперена према садањем северном полу, а оса X према пресеку Гриничног меридијана са екватором. Тај координатни систем нека буде чврсто везан са сиалном љуском, дакле са садањом мрежом меридијана и упоредника, коју замишљамо урезану у континенталним плочама, па нека учествује у свима померањима сиалне љуске. Када би та љуска била свугде кондензирана на густину ϱ_0 своје подлоге, онда би Земља била ограничена унутрашњим елипсоидом референције. Моменти инерције у том случају нека буду означени са A, B, C. Уочимо сада произвољну вертикалну елементарну призму сиалне љуске. База те призме нека буде једнака јединици површине, њена маса нека буде μ, нека S буде њено тежиште, а A тежиште потиснуте симе; x, y, z нека буду координате ове последње тачке. Када би сиал био кондензован, као што је напред речено, на густину ϱ_0, онда би моменти инерције и моменти девијације ове елементарне призме обзиром на осе X, Y, Z били претстављени изразима

$$(74)\quad \begin{cases} \Delta I_1 = \mu\,(y^2+z^2)\,; & \Delta I_2 = \mu\,(z^2+x^2)\,; \quad \Delta I_3 = \mu\,(x^2+y^2)\,, \\ \Delta \Lambda_1 = -\mu yz & ; \quad \Delta \Lambda_2 = \mu zx \quad ; \quad \Delta \Lambda_3 = \mu xy \end{cases}$$

Уведимо место ортогоналних поларне координате, то је

$$x = r_0 \cos\varphi \cos\psi ; \quad y = r_0 \cos\varphi \sin\psi ; \quad z = r_0 \sin\varphi , \tag{75}$$

па зато

$$\left\{\begin{aligned} \Delta I_1 &= \mu r_0^2 (\cos^2\varphi \sin^2\psi + \sin^2\varphi) ; \quad \Delta I_2 = \mu r_0^2 (\sin^2\varphi + \\ &+ \cos^2\varphi \cos^2\psi) ; \quad \Delta I_3 = \mu r_0^2 \cos^2\varphi , \\ \Delta \Lambda_1 &= \mu r_0^2 \sin\varphi \cos\varphi \sin\psi ; \quad \Delta \Lambda_2 = \mu r_0^2 \sin\varphi \cos\varphi \cos\psi ; \\ \Delta \Lambda_3 &= \mu r_0^2 \cos^2\varphi \sin\psi \cos\psi . \end{aligned}\right. \tag{76}$$

Замислимо сада да је уочена елементарна призма враћена на своју нормалну густину. Тиме ће се тежиште масе μ дићи из положаја A у положај S, па како је међусобно отстојање тих двеју тачака једнако z_0, то резултује из тога промена горњих величина, претстављена изразима облика

$$\frac{\partial \Delta I}{\partial r_0} ; \quad \frac{\partial \Delta \Lambda}{\partial r_0} .$$

Сиална санта која лежи на елементарној површини (27) промениће, својим присуством, моменте инерције и моменте девијације кондензоване љуске за следеће износе

$$\left\{\begin{aligned} dI_1 &= 2\mu r_0^3 z_0 (\cos^2\varphi \sin^2\psi + \sin^2\varphi) \cos\varphi \, d\varphi \, d\psi , \\ dI_2 &= 2\mu r_0^3 z_0 (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi \cos^2\psi) \cos\varphi \, d\varphi \, d\psi , \\ dI_3 &= \mu r_0^2 z_0 \cos^3\varphi \, d\varphi \, d\psi , \end{aligned}\right. \tag{77}$$

$$\left\{\begin{aligned} d\Lambda_1 &= 2\mu r_0^3 z_0 \sin\varphi \cos^2\varphi \sin\psi \, d\varphi \, d\psi , \\ d\Lambda_2 &= 2\mu r_0^3 z_0 \sin\varphi \cos^2\varphi \cos\psi \, d\varphi \, d\psi , \\ d\Lambda_3 &= 2\mu r_0^3 z_0 \cos^3\varphi \sin\psi \cos\psi \, d\varphi \, d\psi . \end{aligned}\right. \tag{78}$$

Интегрисањем горњих израза широм целе површине земљине добивају се величине $I_1, I_2, I_3, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ које ваља као моменте сиалне љуске ставити у рачун. Кад су на тај начин одређене величине I и Λ, онде је моменат инерције сиалне љуске обзиром на произвољну осу ϱ која пролази кроз центар Земље и која затвара са координатним осама углова α, β, γ, претстављен изразом

$$\begin{aligned} \Omega &= I_1 \cos^2\alpha + I_2 \cos^2\beta + I_3 \cos^2\gamma - \\ &- 2\Lambda_1 \cos\beta \cos\gamma - 2\Lambda_2 \cos\gamma \cos\alpha - 2\Lambda_3 \cos\alpha \cos\beta . \end{aligned} \tag{79}$$

Ако су x, y, z ортогоналне, а r_0, φ, ψ поларне координате оне тачке у којој оса ϱ продире Земљину површину, онда је

$$x = r_0 \cos\alpha ; \quad y = r_0 \cos\beta ; \quad z = r_0 \cos\gamma . \tag{80}$$

Из (75) и (80) следује

$$\cos\alpha = \cos\varphi \cos\psi ; \quad \cos\beta = \cos\varphi \sin\psi ; \quad \cos\gamma = \sin\psi . \tag{81}$$

Стављајући ово у (29) добива се

$$\begin{aligned} \Omega &= I_1 \cos^2\varphi \cos^2\psi + I_2 \cos^2\varphi \sin^2\psi + I_3 \sin^2\varphi - \\ &- \Lambda_1 \sin 2\varphi \sin\psi - \Lambda_2 \sin 2\varphi \cos\psi - \Lambda_3 \cos^2\varphi \sin 2\psi . \end{aligned} \tag{82}$$

Свакој тачки Земљине површине одговара једна одређена вредност Ω, т. ј. моменат инерције обзиром на ону осу која пролази кроз ту тачку и кроз центар Земље. Тако нам Земљина површина претставља поље скалара Ω.

Уочимо сада језгру Земљину. Поларна оса, т. ј, оса максималног момента инерције C, те језгре подудара се са ротационом осом елипсоида референције; она нека продире Земљину површину у тачки F која има координате φ_0 и ψ_0. То је она тачка сиалног покривача испод које лежи северни пол референције. Друге две осе елипсоида референције стоје нормално на овој првој, а одговарајући моменти инерције нека буду означени са A и B. Моменат инерције T симине језгре, обзиром на произвољну осу која пролази кроз центар Земље, а затвара са координатним осама углове $\alpha_s, \beta_s, \gamma_s$, може се израчунати из опште једначине (79), у коју ваља ставити за I_1, I_2, I_3 величине A, B, C, а за $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ нулу. На тај се начин добива

$$T = A \cos^2\alpha_s + B \cos^2\beta_s + C \cos^2\gamma_s . \tag{83}$$

Но како је $A = B$, а сем тога,

$$\cos^2\alpha_s + \cos^2\beta_s + \cos^2\gamma_s = 1 ,$$

то се добива

$$T = A \sin^2\gamma_s + C \cos^2\gamma_s = A + (C - A) \cos^2\gamma_s . \tag{84}$$

Свакој тачки Земљине површине одговара једна одређена вредност од T као моменат инерције симине језгре обзиром на ону осу која пролази кроз ту тачку и кроз центар Земље. При томе означава γ_s одстојање уочене тачке од пола референције мерено у лучној мери, независно од оријентације главног круга по којем се оно мери на Земљиној површини.

Моменат инерције симине језгре и сиалног покривача обзиром на осу која пролази кроз уочену тачку Земљине површине и кроз центар Земљин претстављен је изразом

$$J = T + \Omega\,. \tag{85}$$

Сада ћемо да одредимо пол инерције целокупне Земље. Тај ће се пол, као што смо видели у § 3, налазити у непосредној близини пола референције. Положимо ли, као што је учињено и у § 3, кроз тај пол тангенцијалну раван на Земљину површину, а у тој равни ортогонални координатни систем $\xi-\eta$, којега почетак лежи у полу референције и којега оса ξ тангира садањи меридијан који пролази кроз тај произвољни положај пола референције, то ће и тражени пол инерције лежати у тој равни. Означимо са a_1 и a_2 координате тога пола обзиром на наш координатни систем, а са $\mathfrak{i}$ и $\mathfrak{j}$ јединичне векторе тога система, то је вектор положаја пола инерције обзиром на пол референције, дакле аномалија пола инерције претстављена изразом

$$\mathfrak{a} = a_1\mathfrak{i} + a_2\mathfrak{j}\,. \tag{86}$$

Пол инерције налазиће се онде где $J(\xi, \eta)$ достизава своју екстремну вредност, због чега његове координате a_1 и a_2 морају задовољити следеће једначине

$$\left\{\frac{\partial J(\xi,\eta)}{\partial \xi}\right\}_{\substack{\xi = a_1\\ \eta = a_2}} = 0\,; \qquad \left\{\frac{\partial J(\xi,\eta)}{\partial \eta}\right\}_{\substack{\xi = a_1\\ \eta = a_2}} = 0\,, \tag{87}$$

или, узимајући у обзир (85) и једноставније писано

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial T(a_1, a_2)}{\partial \xi} + \frac{\partial \Omega(a_1, a_2)}{\partial \xi} = 0\,,\\ &\frac{\partial T(a_1, a_2)}{\partial \eta} + \frac{\partial \Omega(a_1, a_2)}{\partial \eta} = 0\,. \end{aligned}\right. \tag{88}$$

Пошто су a_1 и a_2 веома малене величине, то је

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial T(a_1, a_2)}{\partial \xi} = \frac{\partial T(0,0)}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 T(0,0)}{\partial \xi^2}\, a_1\,,\\ &\frac{\partial T(a_1, a_2)}{\partial \eta} = \frac{\partial T(0,0)}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 T(0,0)}{\partial \eta^2}\, a_2\,, \end{aligned}\right. \tag{89}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \Omega(a_1, a_2)}{\partial \xi} = \frac{\partial \Omega(0,0)}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \Omega(0,0)}{\partial \xi^2}\, a_1\,,\\ &\frac{\partial \Omega(a_1, a_2)}{\partial \eta} = \frac{\partial \Omega(0,0)}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 \Omega(0,0)}{\partial \eta^2}\, a_2\,. \end{aligned}\right. \tag{90}$$

Како је, према ономе што је речено, $\partial\xi = r\partial\gamma_s$; $\partial\eta = r\partial\gamma_s$, то је, ако координате ξ и η меримо у лучној мери, т. ј. ставимо $r = 1$, $\partial\xi = \partial\gamma_s$; $\partial\eta = \partial\gamma_s$. Тако добивамо узимајући у обзир (84)

$$\frac{\partial T}{\partial \xi} = \frac{\partial T}{\partial \eta} = \frac{\partial T}{\partial \gamma_s} = -(C-A)\sin 2\gamma_s\,,$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial \gamma_s^2} = -2\,(C-A)\cos 2\gamma_s\,,$$

дакле за $\xi = \eta = \gamma_s = 0$

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial T(0,0)}{\partial \xi} = \frac{\partial T(0,0)}{\partial \eta} = 0\,,\\ &\frac{\partial^2 T(0,0)}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 T(0,0)}{\partial \eta^2} = -2\,(C-A)\,. \end{aligned}\right. \tag{91}$$

Помоћу (88), (89), (90) добивају се ове једначине

$$\left\{\begin{aligned} &-2(C-A)\, a_1 + \frac{\partial \Omega(a_1, a_2)}{\partial \xi} = 0\,,\\ &-2(C-A)\, a_2 + \frac{\partial \Omega(a_1, a_2)}{\partial \eta} = 0\,, \end{aligned}\right. \tag{92}$$

или

$$\left\{\begin{aligned} &-2\,(C-A)\, a_1 + \frac{\partial \Omega(0,0)}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \Omega(0,0)}{\partial \xi^2}\, a_1 = 0\,,\\ &-2\,(C-A)\, a_2 + \frac{\partial \Omega(0,0)}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 \Omega(0,0)}{\partial \eta^2}\, a_2 = 0\,. \end{aligned}\right. \tag{93}$$

Из (86) и (92) следује

$$\text{(94)} \qquad \mathfrak{a} = \frac{1}{2(C-A)} \left\{ \frac{\partial \Omega\ (a_1, a_2)}{\partial \xi}\, \mathfrak{i} + \frac{\partial \Omega\ (a_1, a_2)}{\partial \eta}\, \mathfrak{j} \right\},$$

т. ј.

$$\text{(95)} \qquad \mathfrak{a} = \frac{1}{2(C-A)} \operatorname{grad} \Omega\ (a_1, a_2).$$

Једначине (86) и (93) дају

$$\text{(96)} \qquad \mathfrak{a} = \frac{\dfrac{\partial \Omega\ (0,0)}{\partial \xi}}{2(C-A) - \dfrac{\partial^2 \Omega\ (0,0)}{\partial \xi^2}}\, \mathfrak{i} + \frac{\dfrac{\partial \Omega\ (0,0)}{\partial \eta}}{2(C-A) - \dfrac{\partial^2 \Omega\ (0,0)}{\partial \eta^2}}\, \mathfrak{j}.$$

Због тога што је сиални покривач веоме танак, а сем тога долази према (77) у обзир само $\frac{z_0}{r_0}$ ти део његове дебљине, могу се у имениоцима други чланови занемарити, па се добива

$$\text{(97)} \qquad \mathfrak{a} = \frac{1}{2(C-A)} \operatorname{grad} \Omega\ (0,0).$$

Упоређење израза (95) и (97) показује да смо због тога што је $\mathfrak{a}$ веома мала величина, градиенат у њезиној крајњој тачки заменили градиентом у њеној почетној тачки.

Како ξ и η меримо у лучној мери, то је

$$d\xi = -d\varphi; \quad d\eta = \cos\varphi\ d\psi,$$

а пошто смо координате пола референције означили са φ_0, ψ_0, то је

$$\text{(98)} \qquad \frac{\partial \Omega\ (0,0)}{\partial \xi} = -\frac{\partial \Omega\ (\varphi_0, \psi_0)}{\partial \varphi},$$

$$\text{(99)} \qquad \frac{\partial \Omega\ (0,0)}{\partial \eta} = \frac{1}{\cos\varphi_0} \frac{\partial \Omega\ (\varphi_0, \psi_0)}{\partial \psi}.$$

Помоћу (82) могу се координате a_1 и a_2 вектора $\mathfrak{a}$ одредити за сваки положај пола референције. Тиме је поље вектора $\mathfrak{a}$ једнозначно одређено, а постављен проблем решен.

§ 6. Секуларна померања ротационих полова Земље. Пошто су сви претходни проблеми решени, могу се једначине кретања полова ротације Земље извести на овај начин. Ротационо кретање Земљино, при изостатском належању континенталних плоча, окарактеризовано је са три кардиналне тачке: тренутним полом ротације P, полом инерције T и полом референције F, при чему узимамо у обзир само северне од тих полова. Те три тачке толико су наблизо једна другој да је дозвољено узети да те три тачке леже у тангенцијалној равни Земљине површине која пролази кроз пол референције. Одаберимо у тој равни почетну тачку O координатног система, везаног са сиалном љуском, па означимо са $\mathfrak{D}, \mathfrak{R}, \mathfrak{S}$ векторе положаја тачака P, T, F. Ротациони пол описује, сем ако се не подудара са полом инерције, око овог кружну путању. Како овде, где се ради о секуларним кретањима пола ротације, не морамо водити рачуна о еластичним осцилацијама Земљиног тела, то је време обилажења пола по том кругу једнако ајлеровој периоди

$$\text{(100)} \qquad T_1 = \frac{A}{C-A}\, \tau,$$

где τ претставља звездани дан.

Угловна брзина тога кретања претстављена је изразом

$$\text{(101)} \qquad k = \frac{2\pi}{T_1}.$$

Означимо са $\mathfrak{r}$ вектор положаја тачке P обзиром на тачку T, а са $\mathfrak{k}$ јединични вектор који стоји нормално на раван FTP, то је брзина ротационог пола при том кретању претстављена са

$$\text{(102)} \qquad \mathfrak{v}_p = k\,[\mathfrak{k}\mathfrak{r}].$$

Центрифугалне силе, одређене полом ротације, тежиће да Земљиној језгри, попустљивој према вековним силама натуре онај облик при којем пол те језгре, дакле пол референције F, пада у пол P ротације. Та тежња може бити тако схваћена да пол референције F бива привлачен од пола ротације P. Видели смо у § 4 да су силе прилагођавања пропорционалне отстојању ротационог пола од пола референције. Како се то прилагођавање врши врло полако и уз савлађивање отпорних сила, то је оправдана претпоставка да је брзина прилагођавања пола референције према полу ротације пропорционална отстојању тих двају тачака. Означимо ли, дакле, ону брзину са $\mathfrak{v}$, а са $\mathfrak{j}$ вектор $\overrightarrow{FP}$, то је

(103) $$\mathfrak{v} = \varkappa \mathfrak{j}\,.$$

Скаларни коефициенат $\varkappa$ који се овде појављује, нека се зове коефициентом прилагођавања. Када би Земљина језгра била потпуно крута, онда би било $\varkappa = o$; у ствари ће $\varkappa$ бити једна веома мала величина.

Вектор $\overrightarrow{FT}$ претставља аномалију пола инерције $\mathfrak{a}$, па зато постоје, према уведеним ознакама, ове једначине

(104) $$\begin{cases} \mathfrak{j} = \mathfrak{a} + \mathfrak{r}\,, \\ \mathfrak{R} = \mathfrak{S} + \mathfrak{a}\,, \\ \mathfrak{D} = \mathfrak{S} + \mathfrak{a} + \mathfrak{r}\,. \end{cases}$$

Пошто $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{D}$ претстављају векторе положаја пола референције односно пола ротације, то,

(105) $$\frac{d\mathfrak{S}}{dt} = \mathfrak{v}$$

претставља брзину пола референције, а

(106) $$\frac{d\mathfrak{D}}{dt} = \mathfrak{v}_p$$

брзину пола ротације обзиром на наш координатни систем, везан са сиалном љуском Земље.

Диференцијацијом израза (104) по времену t добивају се ове једначине

(107) $$\frac{d\mathfrak{R}}{dt} = \frac{d\mathfrak{S}}{dt} + \frac{d\mathfrak{a}}{dt}\,,$$

(108) $$\frac{d\mathfrak{D}}{dt} = \frac{d\mathfrak{S}}{dt} + \frac{d\mathfrak{a}}{dt} + \frac{d\mathfrak{r}}{dt}\,,$$

т. ј. због претходних једначина

(109) $$\frac{d\mathfrak{R}}{dt} = \varkappa\mathfrak{a} + \varkappa\mathfrak{r} + \frac{d\mathfrak{a}}{dt}\,,$$

(110) $$\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = k\,[\mathfrak{k}\mathfrak{r}] - \varkappa\,(\mathfrak{a} + \mathfrak{r}) - \frac{d\mathfrak{a}}{dt}\,.$$

Величина $\mathfrak{a}$ мења се само секуларно, а то мењање тече неописано споро. Због тога се при изналажењу периодичких решења горњих једначина, $\mathfrak{a}$ може сматрати као константа, т. ј. ставити $\frac{d\mathfrak{a}}{dt} = 0$. На тај начин добивају ове једначине

(111) $$\frac{d\mathfrak{R}}{dt} = \varkappa\mathfrak{a} + \varkappa\mathfrak{r}\,,$$

(112) $$\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = k\,[\mathfrak{k}\mathfrak{r}] - \varkappa\mathfrak{r} - \varkappa\mathfrak{a}\,,$$

Положимо у тачку O почетак координатног система x-y, оријентишимо осу x тог система да буде паралелна са вектором $\mathfrak{a}$ и означимо са $\mathfrak{i}$ и $\mathfrak{j}$ јединичне векторе тога система, са r_1, r_2 пројекције вектора $\mathfrak{r}$ на координатне осе, са R_1, R_2 пројекције вектора $\mathfrak{R}$, а са a модуо вектора $\mathfrak{a}$, то је

(113) $$\begin{cases} \mathfrak{r} = r_1\mathfrak{i} + r_2\mathfrak{j}\,, \\ \mathfrak{R} = R_1\mathfrak{i} + R_2\mathfrak{j}\,, \\ \mathfrak{a} = a\mathfrak{j}\,. \end{cases}$$

Како је

$$[\mathfrak{k}\mathfrak{r}] = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ r_1 & r_2 & 0 \end{vmatrix} = -r_2\mathfrak{i} + r_1\mathfrak{j}\,,$$

то се место векториелних диференцијалних једначина (111) и (112) добивају ове скаларне

(114) $$\frac{dR_1}{dt} = \varkappa a + \varkappa r_1\,,$$

(115) $$\frac{dR_2}{dt} = \varkappa r_2\,,$$

(116) $$\frac{dr_1}{dt} = -kr_2 - \varkappa r_1 - \varkappa a\,,$$

(117) $$\frac{dr_2}{dt} = kr_1 - \varkappa r_2\,,$$

Диференцирамо ли последње две једначине по t, то добивамо, пошто се a има сматрати као константно.

$$(118)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2r_1}{dt^2}+\varkappa\dfrac{dr_1}{dt}+k\dfrac{dr_2}{dt}=0, \\[2ex] \dfrac{d^2r_2}{dt^2}+\varkappa\dfrac{dr_2}{dt}-k\dfrac{dr_1}{dt}=0. \end{cases}$$

Да бисмо нашли интеграле горњих једначина, ставимо

$$(119)\qquad r_1=C_1e^{\lambda t};\qquad r_2=C_2e^{\lambda t},$$

где C_1, C_2, λ означавају константе, онда добивамо помоћу (118)

$$(120)\qquad \begin{cases} (\lambda+\varkappa)\,C_1+kC_2=0, \\ -kC_1+(\lambda+\varkappa)\,C_2=0. \end{cases}$$

Изрази (119) моћи ће задовољити једначине (118) ако детерминанта коефициената од C_1 и C_2 буде једнака нули, дакле

$$(121)\qquad (\lambda+\varkappa)^2+k^2=0.$$

Ова једначина има два корена, $\lambda=-\varkappa+ik$; $\lambda=-\varkappa-ik$, па ће зато изрази

$$r_1=A+C_1e^{-\varkappa t+ikt}+C_2e^{-\varkappa t+ikt},$$

$$r_2=B+C_3e^{-\varkappa t+ikt}+C_4e^{-\varkappa t-ikt},$$

у којима A, B, C_1, C_2, C_3, C_4 претстављају константе, задовољити такође једначине (118). Тим изразима можемо помоћу ајлеровиx образаца дати овај облик

$$(122)\qquad \begin{cases} r_1=A+e^{-\varkappa t}[C_1\cos kt+C_2\sin kt], \\ r_2=B+e^{-\varkappa t}[C_3\cos kt+C_4\sin kt]. \end{cases}$$

Ставимо ово у (116) и 117), и захтевајмо да добивене једначине буду идентично задовољене, то добивамо

$$(123)\qquad \begin{cases} A=-\dfrac{\varkappa^2}{\varkappa^2+k^2}\,a;\quad B=-\dfrac{k\varkappa}{\varkappa^2+k^2}\,a, \\[2ex] C_3=-C_2;\quad C_4=C_1. \end{cases}$$

На тај начин добивамо место једначина (122) ове

$$(124)\qquad \begin{cases} r_1=-\dfrac{\varkappa}{\varkappa^2+k^2}\varkappa a+e^{-\varkappa t}\{C_1\cos kt+C_2\sin kt\}, \\[2ex] r_2=-\dfrac{k}{\varkappa^2+k^2}\varkappa a+e^{-\varkappa t}\{C_2\cos kt+C_1\sin kt\}. \end{cases}$$

Овима једначинама одређено је кретање пола ротације око пола инерције. Кретање других двеју тачака, пола инерције и пола референције, наћи ћемо на овај начин. Сматрајући a као константно, добивамо помоћу (103) и (105)

$$(125)\qquad \frac{d\mathfrak{R}}{dt}=\frac{d\mathfrak{S}}{dt}=\mathfrak{v}.$$

Што значи да се обе тачке крећу истом брзином $\mathfrak{v}$. Означимо са v_1 и v_2 компоненте те брзине паралелне координатним осама, то је

$$(126)\qquad v_1=\frac{dR_1}{dt};\quad v_2=\frac{dR_2}{dt},$$

дакле због (114) и (115),

$$(127)\qquad \begin{cases} v_1=\varkappa a+\varkappa r_1, \\ v_2=\varkappa r_2. \end{cases}$$

Стављајући у ове једначине изразе (124) добивамо

$$(128)\qquad \begin{cases} v_1=\dfrac{k^2}{\varkappa^2+k^2}\varkappa a+\varkappa e^{-\varkappa t}\{C_1\cos kt+C_3\sin kt\}, \\[2ex] v_2=-\dfrac{k\varkappa}{\varkappa^2+k^2}\varkappa a+\varkappa e^{-\varkappa t}\{-C_2\cos kt+C_1\sin kt\}. \end{cases}$$

Коефициенат прилагођавања $\varkappa$ веома је мален према угловној брзини k ајлеровог кретања, због чега добивамо место (124) и (128) ове једначине

$$(129)\qquad \begin{cases} r_1=e^{-\varkappa t}\{C_1\cos kt+C_2\sin kt\}, \\ r_2=e^{-\varkappa t}\{-C_2\cos kt+C_1\sin kt\}, \end{cases}$$

$$(130)\qquad \begin{cases} v_1=\varkappa a+\varkappa e^{-\varkappa t}\{C_1\cos kt+C_3\sin kt\}, \\ v_2=\varkappa e^{-\varkappa t}\{-C_2\cos kt+C_1\sin kt\}. \end{cases}$$

Константе C_1 и C_2 одређују се иницијалним условима. Бројимо ли време од једног од момената у којем је $\mathfrak{r}$ паралелно са $\mathfrak{a}$ т. ј. у којем тачке F, T и P стоје у једној правој и то набројаним редом, и означимо ли модул од $\mathfrak{r}$ у томе моменту са r_0, то је за $t=0$; $r_1=r_0$, $r_2=0$. Зато је, према (129) $C_1=r_0$; $C_2=0$, т. ј.

$$\left\{\begin{aligned} r_1 &= r_0 e^{-\varkappa t}\cos kt\,, \\ r_2 &= r_0 e^{-\varkappa t}\sin kt\,, \end{aligned}\right. \tag{131}$$

$$\left\{\begin{aligned} v_1 &= \varkappa a + \varkappa r_0 e^{-\varkappa t}\cos kt\,, \\ v_2 &= \varkappa r_0 e^{-\varkappa t}\sin kt\,. \end{aligned}\right. \tag{132}$$

Сада су кретања тачака P, T, F једнозначно одређена. Једначине (131) предочавају кретање пола ротације око пола инерције. Из тих једначина следује, пошто је $r_1^2+r_2^2=r^2$, где r означава модуо од $\mathfrak{r}$,

$$r = r_0 e^{-\varkappa t}\,. \tag{133}$$

То кретање следује на овај начин. Пошто се коефициенат k појављује у тригонометријским члановима од (131), то пол ротације обиђе за време сваке ајлерове периоде око пола инерције, али, због фактора $e^{-\varkappa t}$, бива његово отстојање од пола инерције све мање и мање, па путања добива облик спиралне линије. Ово кретање не долази у обзир при секуларном кретању пола ротације. То исто важи и за тригонометријске чланове једначина (132) због њиховог периодицитета и незнатности. Због тога је

$$v_1=\varkappa a\,;\quad v_2=0\,. \tag{134}$$

Вектор брзине $\mathfrak{v}$ паралелан је оси x нашег координатног система, подудара се са вектором $\mathfrak{a}$ и пропорционалан му је. Зато је

$$\mathfrak{v}=\varkappa\mathfrak{a}\,. \tag{135}$$

Употребимо једначину (97) и узмимо у обзир да је при избору координатног система његов почетак био положен у пол референције, то добивамо

$$\mathfrak{v} = \frac{\varkappa}{2(C-A)}\,\mathrm{grad}\ \Omega\,, \tag{136}$$

као једначину кретања пола референције. За једначину пола инерције добивамо због (135) и (95) ову

$$\mathfrak{v}_t = \frac{\varkappa}{2(C-A)}\,\mathrm{grad}\ \Omega\,(a_1,\, a_2)\,. \tag{137}$$

Из горњих једначина кретања следује да је брзина пола референције односно пола инерције пропорционална градиенту поља Ω на оном месту на којем се ти полови у уоченом моменту налазе. Обе брзине разликују се, због тога што је $\mathfrak{a}$ веома малено, неосетно једна од друге.

Замислимо, дакле, да се пол референције налази у положају F, а пол инерције у положају T. Вектор $\mathfrak{a}$ једнак је тренутној аномалији пола инерције, па је он веома мален. Правац градиента од Ω у тачки F нека буде t, а правац градиента у тачки T нека буде t_1; t се поклапа са правцем вектора $\mathfrak{a}$, а t и t_1 затварају између себе један веома мали угао. Пол референције кретаће се у правцу t, а пол инерције у правцу t_1. Кад се пређе веома мали пут $\mathfrak{a}$, доћи ће пол референције у положај T, а пол инерције у положај T_1 који лежи на правој t_2. Из ових положаја кретаће се пол референције правом t_1 а пол инерције правом t_2 која са t_1 затвара веома мали угао, а претставља правац градиента у тачки T_1. Зато ће правци кретања пола референције односно пола инерције, због тога што $\mathfrak{a}$ остаје увек малено, обухватити и тангирати векторску линију поља *grad* Ω. Како нам пол инерције претставља средњи положај пола ротације за време сваке ајлерове периоде, то одатле следује да је секуларна путања пола ротације векторска линија поља *grad* Ω. Тиме је та путања једнозначно одређена, јер нам облик сиалне љуске даје све потребне податке за израчунавање те путање.

Што се тиче брзине пола ротације при томе кретању, то нам је за њено израчунавање потребно познавање коефициента прилагођавања $\varkappa$. Тај се податак може добити астрономским опажањима. Из опажања промена географских ширина може се одредити садања вредност брзине $\mathfrak{v}$, а из ове, пошто се израчуна садања вредност аномалије пола $\mathfrak{a}$, може се помоћу (135) израчунати нумеричка вредност коефициента $\varkappa$. Сва та израчунавања биће објављена на другом месту. Засада је већ могуће саопштити ово.

Према досадањим астрономским опажањима, изнаша секуларна брзина померања пола ротације 0,14 m, дакле у лучној мери $\frac{0,14}{6,371.000}$ годишње. Како је 0,14 у лучној мери једнако 8^0, то се пол ротације помера тек за 6,371.000 година за 8^0, па то померање не долази у обзир за проблем квартерних ледених доба.

Секуларна померања немају никаква утицаја на ориентацију Земљине осе у простору, као што то следује на овај начин.

Не узмемо ли у обзир прецесију Земљине осе, која је једна засебна појава, изазвана другим узроцима, то је импулс ротације Земљине један непроменљив вектор претстављен изразом

$$\mathfrak{G} = Aw_1\mathfrak{i} + Aw_2\mathfrak{j} + Cw_3\mathfrak{k}\,. \tag{138}$$

При томе претстављају w_1, w_2, w_3 координате ротационог вектора $\mathfrak{w}$ обзиром на осе које се поклапају са главним осама инерције Земљинога тела. Зато је

$$\mathfrak{w} = w_1\mathfrak{i} + w_2\mathfrak{j} + w_3\mathfrak{k}\,. \tag{139}$$

Како се средњи положај пола ротације налази у полу инерције, то је

$$w_1 = w_2 = 0\,. \tag{140}$$

Зато је

$$\mathfrak{w} = w_3\mathfrak{k}\,, \tag{141}$$

$$\mathfrak{G} = Cw_3\mathfrak{k}\,, \tag{142}$$

$$\mathfrak{w} = \frac{1}{C}\,\mathfrak{G}\,. \tag{143}$$

Пошто се вектор $\mathfrak{G}$ не мења временом, то се не мења ни вектор $\mathfrak{w}$, па зато Земљина оса ротације не мења, услед секуларних померања полова, своју ориентацију у простору.